Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2012/2013
Analisi Matematica 1

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 20 aprile 2013

1. Sono dati i numeri complessi $z_1 = 3 + 2\,i$ e $z_2 = 3\,i - 1$. Determinare:

   (i) $z_1 + z_2$ e $z_1\, z_2$;

   (ii) z_1/z_2;

   (iii) z_1^* e z_2^*;

   (iv) $|z_1|$ e $|z_2|$,

   dove il simbolo * indica l'operazione di coniugazione.

2. Date le seguenti successioni

$$\ln \frac{n+1}{n^3+3}; \qquad e^{(-1)^n\, n}; \qquad n\,\sin\left(\frac{1}{n}\right); \qquad \cos(n\,\pi),$$

   indicare quali sono irregolari e quali regolari, e calcolare il limite di quest'ultime.

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 3\,e^x - 4}{e^{2x} - 5\,e^x + 6}$$

4. Identificare e classificare i punti di discontinuità delle funzioni

$$f_1(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}; \qquad f_2(x) = [\sin x],$$

   dove $[x]$ indica la parte intera di x, ed i punti di non derivabilità della funzione

$$f_3(x) = e^{-x^{1/3}}$$

5. Calcolare l'integrale

$$\int_{-1}^{\ln \pi} e^{|x|}\,\sin(e^{|x|})\,dx.$$

(1) $z_1 = 3+2i \qquad z_2 = 3i-1$

$z_1 + z_2 = 2+5i \qquad z_1 z_2 = (3+2i)(3i-1) = (-3-6)+(9-2)i = -9+7i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+2i}{3i-1}\cdot\frac{-1-3i}{-1-3i} = \frac{(-3+6)+(-9-2)i}{1+9} = \frac{3-11i}{10}$$

$z_1^* = 3-2i \qquad z_2^* = -3i-1 \qquad |z_1| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \qquad |z_2| = \sqrt{10}$

---

(2) Le succ. $e^{(-1)^n n}$ e $\cos(n\pi)$ sono irregolari

$\frac{n+1}{n^2+3} \to 0^+$ e quindi $\lim_{n\to\infty} \ln\frac{n+1}{n^2+3} = -\infty$

$\lim_{n\to\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ perché $\frac{1}{n} \to 0$

---

(3) $f(x) = \frac{g(e^x)}{h(e^x)} \qquad g(y) = y^2-3y-4 \qquad h(y) = y^2-5y+6 \qquad y=e^x \quad y>0$

$D: h(y)\neq 0 \qquad y_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases} \qquad y \neq 2,3 \quad x \neq \ln 2, \ln 3$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x\to(\ln 2)^\pm} f(x) = \frac{-6}{0^\mp} = \pm\infty \qquad \lim_{x\to(\ln 3)^\pm} f(x) = \frac{-1}{0^\pm} = \mp\infty$

$f(x) = 0 \ : \ g(y) = 0 \qquad y_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} -1 & \text{(NON ACC., } e^x>0) \\ 4 & x = \ln 4 \end{cases}$

$f(0) = \frac{-6}{2} = -3$

$$f'(x) = e^x \frac{(2y-3)(y^2-5y+6)-(2y-5)(y^2-3y-4)}{(y^2-5y+6)^2} = e^x \frac{-2y^2+20y-38}{(y^2-5y+6)^2} =$$

$$= 2e^x \frac{-e^{2x}+10e^x-19}{(e^{2x}-5e^x+6)^2} \qquad f'(x)=0 \qquad y_{1,2} = \frac{-5\pm\sqrt{25-19}}{-1} = 5\pm\sqrt{6}$$

$$x_{1,2} = \begin{cases} \ln(5-\sqrt{6}) \approx 0.94 \\ \ln(5+\sqrt{6}) \approx 2.01 \end{cases}$$

6. Stabilire la convergenza degli integrali impropri

$$\int_0^{+\infty} e^{\frac{1}{x}}\,dx; \qquad \int_0^1 \frac{1}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}\,dx.$$

7. Determinare il dominio $X \in \mathbb{R}^2$ della funzione

$$f(x,y) = \ln \frac{x^2 - 3x - 4}{y^2 - 5y + 6}$$

e rappresentarlo graficamente sul piano cartesiano.

8. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = \ln(xy) + x \ln y.$$

Calcolarne la derivata direzionale nel punto $(1,1)$, lungo la direzione del vettore $\mathbf{v} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

9. Calcolare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = \ln\left(x^2 + y^3 - x\right)$$

---

(6) $\int_0^{+\infty} e^{\frac{1}{x}}\,dx$ è improprio sia in 0 $\left(\frac{1}{x} \to \infty\right)$ sia all'infinito.

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$ DIVERGE

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}\,dx \qquad e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \sim \cancel{1} \cancel{+x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{6} + \dots - 1 - x - \frac{x^2}{2}, \quad x \to 0$$

$$= \frac{x^3}{6}, \quad x \to 0$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3}\,dx$$ DIVERGE

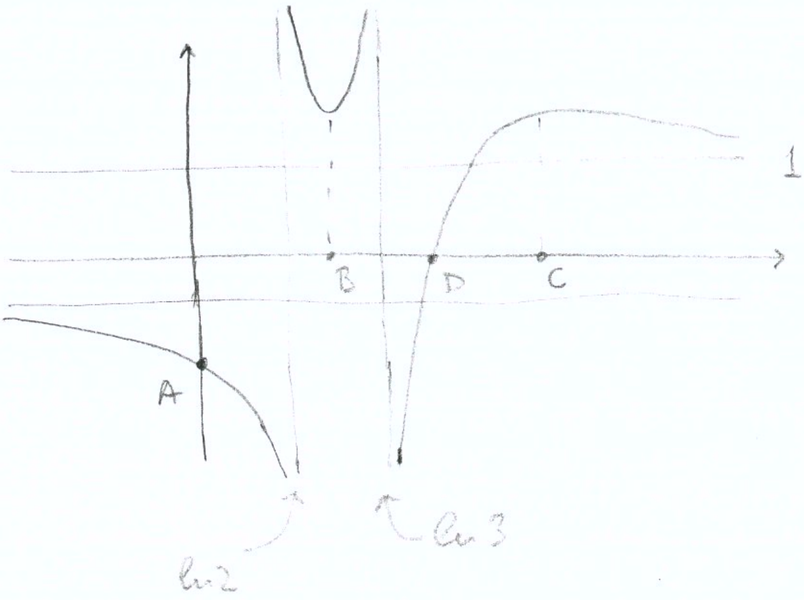
quindi, per il confronto asintotico, l'integrale DIVERGE

---

(8) $f(x,y)$ è differenziabile in $(1,1)$. Quindi:

$$D_{\hat{v}} f(1,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\,v_x + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\,v_y = \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{ \left[\frac{1}{x} + \ln y\right]_{(1,1)} + \left[\frac{1}{y} + \frac{x}{y}\right]_{(1,1)} \right\} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1 + 2\right\} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$



$A = (0, -3)$

$B = \ln(5-\sqrt{6})$

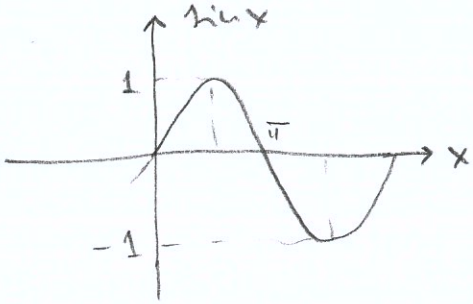
$C = \ln(5+\sqrt{6})$

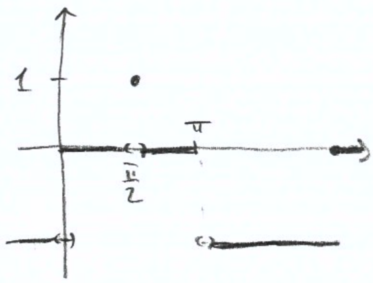
$D = \ln 4$

---

(4) $f_1(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1} = \dfrac{(x-1)\cdot(x+1)}{x+1} = x+1$ per $x \neq -1$ $\qquad x = -1$ DISC. ELIMIN.

$f_2(x) = [\sin x]$





DISC. A SALTO

in $x = 0, \pi, 2\pi, \dots = k\pi$

DISC. ELIMIN.

in $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$f_3(x) = e^{-x^{1/3}}$ $\qquad f_3'(x) = -\frac{1}{3} x^{-2/3} e^{-x^{1/3}} = -\dfrac{e^{-x^{1/3}}}{x^{2/3}}$

$\lim_{x \to 0^{\pm}} f_3'(x) = -\infty$ FLESSO A TANG. VERTICALE (DECRESC.)

---

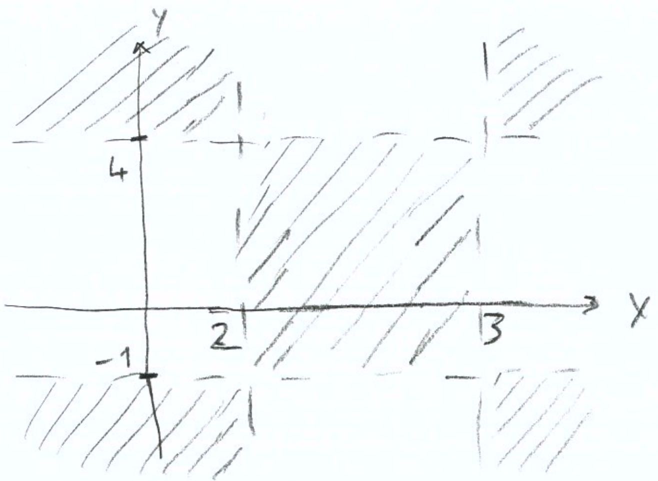
(7) $f(x) = \ln \dfrac{x^2-3x-4}{y^2-5y+6}$ $\qquad \dfrac{x^2-3x-4}{y^2-5y+6} > 0$

$x^2-3x-4=0$

$x_{1,2} = 2, 3$

$y^2-5y+6=0$

$y_{1,2} = -1, 4$



D = Aree tratteggiate aperte

(9) $f(x,y) = \ln(x^2+y^3-x)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x-1}{x^2+y^3-x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3y^2}{x^2+y^3-x} \qquad \begin{cases} 2x-1=0 \\ 3y^2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=0 \end{cases}$$

Ma $f\left(\frac{1}{2},0\right) = \ln\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right) = \ln\left(-\frac{1}{4}\right)$ NON ESISTE

---

(5) $\displaystyle\int_{-1}^{\ln\pi} e^{|x|} \sin\left(e^{|x|}\right) dx$ $\boxed{\ln\pi > 0}$

$\shortparallel$

$$\int_{-1}^{0} e^{-x} \sin\left(e^{-x}\right) dx + \int_{0}^{\ln\pi} e^{x} \sin\left(e^{x}\right) dx =$$

$$= \left[\cos\left(e^{-x}\right)\right]_{-1}^{0} + \left[-\cos\left(e^{x}\right)\right]_{0}^{\ln\pi} = \cos(1) - \cos(e) - (-1) + \cos(1) =$$

$$= 1 + 2\cos(1) - \cos(e)$$