Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2012/2013
Analisi Matematica 1

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 20 aprile 2013

1. Sono dati i numeri complessi $z_1 = 2\,i - 3$ e $z_2 = 1 - 3\,i$. Determinare:

   (i) $z_1 + z_2$ e $z_1\, z_2$;

   (ii) z_1/z_2;

   (iii) z_1^* e z_2^*;

   (iv) $|z_1|$ e $|z_2|$,

   dove il simbolo * indica l'operazione di coniugazione.

2. Date le seguenti successioni

$$\ln\frac{n^2+2}{n^4+5}; \qquad e^{(-1)^n\, n^2}; \qquad \frac{1}{n}\sin(n)\,; \qquad \tan\left(\frac{\pi}{4}+n\,\pi\right),$$

   indicare quali sono irregolari e quali regolari, e calcolare il limite di quest'ultime.

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^{2x}+3\,e^x-4}{e^{2x}+5\,e^x+6}$$

4. Identificare e classificare i punti di discontinuità delle funzioni

$$f_1(x) = \frac{x^2-4}{x+2}; \qquad f_2(x) = [\sin^2 x],$$

   dove $[x]$ indica la parte intera di x, ed i punti di non derivabilità della funzione

$$f_3(x) = e^{x^{1/5}}$$

5. Calcolare l'integrale

$$\int_{-1}^{\ln(\pi/2)} e^{|x|}\cos(e^{|x|})\,dx.$$

6. Stabilire la convergenza degli integrali impropri

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x^2+1}\,dx; \qquad \int_0^1 \frac{1}{e^x - 1 - \sin x - \frac{x^2}{2}}\,dx.$$

7. Determinare il dominio $X \in \mathbb{R}^2$ della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2-3x-4}{y^2-5y+6}}$$

e rappresentarlo graficamente sul piano cartesiano.

8. Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = e^{xy} + x\,e^y.$$

Calcolarne la derivata direzionale nel punto $(1,1)$, lungo la direzione del vettore $\mathbf{v} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

9. Calcolare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = e^{x^2+y^3-x}$$

---

3 $f(x) = \dfrac{g(y)}{h(y)}$ $\quad g(y) = y^2+3y-4 \quad h(y) = y^2+5y+6$

con $y = e^x > 0$

$D: h(y) \neq 0 \quad y_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \dfrac{-5\pm 1}{2} = \begin{cases} -3 \\ -2 \end{cases}$ NON ACCETT.

$\Rightarrow D = \mathbb{R}$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \dfrac{-4}{6} = -\dfrac{2}{3} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \qquad f(0) = 0$

$f(x) = 0 \; : \; g(y) = 0 \quad y_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} -4 & \text{NON ACCETT.} \\ 1 \end{cases}$

$f'(x) = e^x \dfrac{(2y+3)(y^2+5y+6) - (2y+5)(y^2+3y-4)}{(y^2+5y+6)^2} = e^x \dfrac{2y^2+20y+38}{(y^2+5y+6)^2} =$

$= 2e^x \dfrac{e^{2x}+10e^x+19}{(\quad)^2} \qquad y_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25-19} = -5 \pm \sqrt{6}$ entrambi < 0 NON ACC.

$\Rightarrow f' > 0 \;\; \forall x$

(grafico alla pag. seguente)

① $z_1 = 2i-3 \qquad z_2 = 1-3i$

$z_1+z_2 = -2-i \qquad z_1 z_2 = (2i-3)(1-3i) = (-3+6)+(2+9)i = 3+11i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2i-3}{1-3i}\cdot\frac{1+3i}{1+3i} = \frac{(-3-6)+(2-9)i}{1+9} = \frac{-9-7i}{10}$$

$z_1^* = -2i-3 \qquad z_2^* = 1+3i \qquad |z_1| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \qquad |z_2| = \sqrt{10}$

---

② Le successioni $e^{(-1)^n n^2}$ e $\tan\left(\frac{\pi}{4}+n\pi\right)$ sono irregolari

$\frac{n^2+2}{n^4+5} \to 0$ quindi $\lim_{n\to\infty} \ln\frac{n^2+2}{n^4+5} = -\infty$

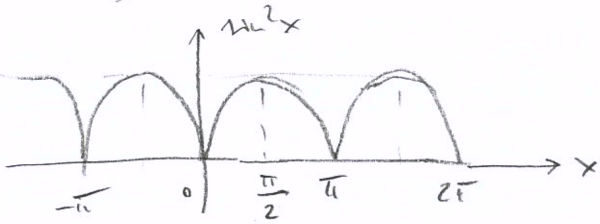
$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin(n) = \lim_{n\to\infty}$ (succ. infinitesima) $\cdot$ (succ. limitata) $= 0$

---

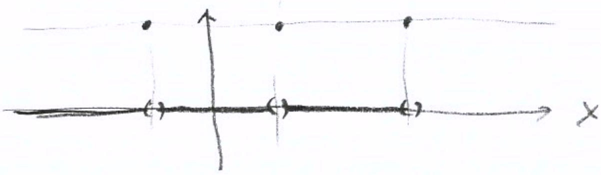
④ $f_1(x) = \frac{x^2-4}{x+2} = \frac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} = x-2$ per $x \neq -2$

DISCONT. ELIMINABILE per $x=-2$

$f_2(x) = [\sin^2 x]$



DIS. ELIMINABILI per $x = \frac{\pi}{2}+k\pi$



$f_3(x) = e^{x^{1/5}}$

$f_3'(x) = \frac{1}{5}x^{-4/5}e^{x^{1/5}} = \frac{e^{x^{1/5}}}{5x^{4/5}} \qquad \lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = +\infty$

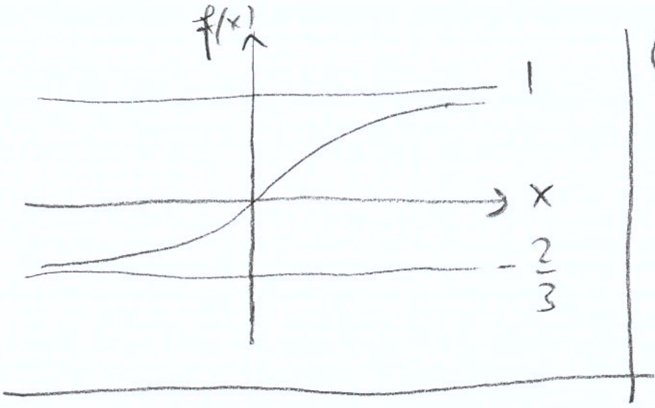
FLESSO a TANG. VERTICALE CRESCENTE

---

⑧ $f(x,y) = e^{xy}+xe^y$ è differenziabile in $(1,1)$, pertanto

$$D_{\hat v} f(1,1) = \langle \nabla f(1,1), \hat v\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\left[ye^{xy}+e^y\right]_{(1,1)} + \left[xe^{xy}+xe^y\right]_{(1,1)}\right\} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{2e+2e\right\} = 2e\sqrt{2}$$



(5) $$\int_{-1}^{\ln(\pi/2)} e^{|x|}\cos(e^{|x|})\,dx = (*)$$

$\frac{\pi}{2} > 1$ quindi $\ln\frac{\pi}{2} > 0$

$$(*) = \int_{-1}^{0} e^{-x}\cos(e^{-x})\,dx + \int_{0}^{\ln\frac{\pi}{2}} e^{x}\cos(e^{x})\,dx =$$

$$= \left[-\sin(e^{-x})\right]_{-1}^{0} + \left[\sin(e^{x})\right]_{0}^{\ln\frac{\pi}{2}} = \sin(e) - \sin(1) + 0 - \sin(1) =$$

$$= \sin(e) - 2\sin(1)$$

---

(6) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x^2+1}\,dx$ è improprio sia per $x \to 0$ che per $x \to +\infty$

$x \to 0$: $\ln(1+\frac{1}{x}) \sim \ln(\frac{1}{x}) = -\ln x$ il cui integrale converge

Notiamo che $\int_{\varepsilon}^{a} \ln(x)\,dx = \left[x\ln x - x\right]_{\varepsilon}^{a} = a\ln a - a - \varepsilon\ln\varepsilon - \varepsilon$ converge per $\varepsilon \to 0$

$x \to +\infty$: $\ln(1+\frac{1}{x}) \sim \frac{1}{x}$ $\quad \frac{\ln(1+1/x)}{x^2+1} \sim \frac{1}{x^3}$ il cui integrale converge

L'integrale converge

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x - 1 - \sin x - \frac{x^2}{2}} \ : \quad e^x - 1 - \sin x - \frac{x^2}{2} \sim \cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{6} + \dots \cancel{-1} \cancel{-x} + \frac{x^3}{6} + \dots \cancel{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \to 0$$

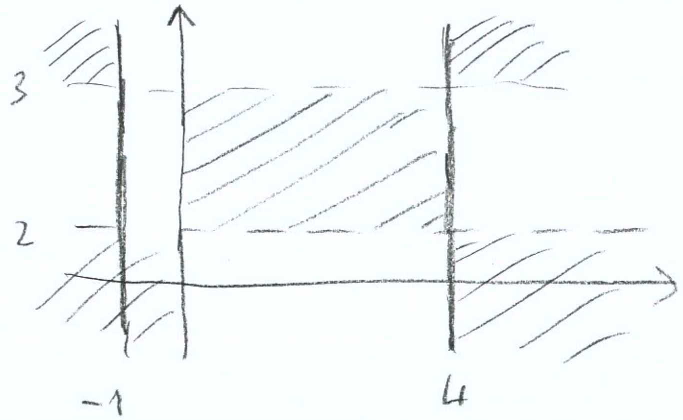
$$= \frac{x^3}{3}$$

$\frac{1}{x^3}$ NON È INTEGRABILE

---

(7) $f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2-3x-4}{y^2-5y+6}}$ $\quad \frac{x^2-3x-4}{y^2-5y+6} \geq 0$ $\quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} -1 \\ 4 \end{cases}$

$y_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$



D = Aree tratteggiate comprese le rette $x = -1$ e $x = 4$

(9) $f(x,y) = e^{x^2+y^3-x} \equiv e^{\varphi(x,y)}$

Punti critici:

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{\varphi}(2x-1)$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = e^{\varphi}(3y^2)$ $\quad \begin{cases} 2x-1=0 \\ 3y^2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=0 \end{cases}$

$P \equiv \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{\varphi}(2x-1)^2 + 2e^{\varphi} = e^{\varphi}\left[(2x-1)^2+2\right]$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{\varphi}(3y^2)^2 + 6y\,e^{\varphi} = e^{\varphi}(9y^4+6y)$ $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (2x-1)3y^2 e^{\varphi}$

$\varphi\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}$ $\quad e^{\varphi\left(\frac{1}{2},0\right)} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$

$H\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt[4]{e}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Caso indecidibile