Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2012/2013
Analisi Matematica 1

Nome ....

N. Matricola ....

Ancona, 16 febbraio 2013

1. È dato il numero complesso

$$z = \frac{2-i}{3+i} - (2i-1)(3i+2) + 3i - 2 - (4i+3)^*,$$

dove il simbolo * indica l'operazione di coniugazione. Determinare:

(i) Re (z);

(ii) Im (z);

(iii) z^*;

(iv) $|z|$.

2. Calcolare il limite delle seguenti successioni, indicando esplicitamente se e quali di esse sono irregolari:

$$\ln \frac{n^2+n+1}{n^2-2n+3}; \qquad \ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]; \qquad \frac{\ln n}{\sqrt{n}}; \qquad (-1)^n \ln n$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = e^{g(x)} - e \qquad \text{dove} \qquad g(x) = \frac{x^2+1}{x^2-3x+2}$$

4. Identificare e classificare i punti di discontinuità ed i punti di non derivabilità della funzione

$$f(x) = [x] + \sqrt{\left|x - \frac{1}{2}\right|^3},$$

dove $[x]$ indica la parte intera di x. Dopo aver verificato la continuità e la derivabilità della funzione nel punto di ascissa $x = 3/2$, scrivere l'equazione della retta tangente al grafico in tale punto.

5. Calcolare l'integrale
$$\int_{x_1}^{x_2} e^{-x}\cos(|e^{-x}-e|)\,dx$$
dove $x_1 = -\ln(e+\pi/2)$; $x_2 = -\ln(e-\pi/2)$.

6. Stabilire la convergenza degli integrali impropri
$$\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sin x}\,dx; \qquad \int_1^{+\infty} \frac{x\,e^x+1}{x^3\,e^x+1}\,dx.$$

7. Determinare il dominio $X \in \mathbb{R}^2$ della funzione
$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}$$
e rappresentarlo graficamente sul piano cartesiano.

8. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da
$$f(x,y) = \sin(xy) + x\cos y.$$
Calcolarne la derivata direzionale nel punto $(1, \pi/4)$, lungo la direzione del vettore $\mathbf{v} = (1/2, \sqrt{3}/2)$.

9. Calcolare e classificare i punti critici della funzione
$$f(x,y) = e^{g(x,y)} \qquad \text{dove} \qquad g(x,y) = x^4 + y^4 - x\,y$$

---

(5)

$$e^{-x_1} - e = e^{\ln(e+\pi/2)} - e = e + \frac{\pi}{2} - e = \frac{\pi}{2}$$

$$e^{-x_2} - e = e^{\ln(e-\pi/2)} - e = -\frac{\pi}{2}$$

Inoltre $x_1 < -1$
$x_2 > -1$

$e^{-x} - e = 0$ per $x = -1$

$$\int_{x_1}^{x_2} e^{-x}\cos(|e^{-x}-e|)\,dx = \int_{x_1}^{-1} e^{-x}\cos(e^{-x}-e)\,dx + \int_{-1}^{x_2} e^{-x}\cos(e-e^{-x})\,dx =$$

$$= \Big[-\sin(e^{-x}-e)\Big]_{x_1}^{-1} + \Big[\sin(e-e^{-x})\Big]_{-1}^{x_2} =$$

$$= 0 + \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} - 0 = 2$$

(1) $$z = \frac{2-i}{3+i} - (2i-1)(3i+2) + 3i - 2 - (4i+3)^* =$$

$$= \frac{(2-i)(3-i)}{9+1} - (-8+i) + 3i - 2 - (-4i+3) =$$

$$= \frac{5-5i}{10} + 8 - i + 3i - 2 + 4i - 3 = \frac{1}{2}(1-i) + 3 + 6i =$$

$$= \frac{7}{2} + \frac{11}{2}i \qquad \mathrm{Re}(z) = \frac{7}{2} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{11}{2} \qquad z^* = \frac{7}{2} - \frac{11}{2}i$$

$$|z| = \sqrt{\frac{49+121}{4}} = \frac{\sqrt{170}}{4}$$

---

(2) $(-1)^n \ln n$ è irregolare

$$\lim_{n\to\infty} \ln \frac{n^2+n+1}{n^2-2n+3} = \ln 1 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = \ln e = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$$

---

(4) $f(x) = [x] + \sqrt{|x-\frac{1}{2}|^3}$ presenta discontinuità a salto per $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

e una cuspide in $x = \frac{1}{2}$

---

(6) $$\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sin x} \sim \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x \to 0$$

$\frac{1}{\sqrt{x}}$ è integrabile in 0 quindi l'integrale converge

$$\frac{xe^x+1}{x^3e^x+1} \sim \frac{xe^x}{x^3e^x} = \frac{1}{x^2}, \quad x \to +\infty$$

$\frac{1}{x^2}$ è integrabile all'∞

quindi l'integrale converge

③ $f(x) = e^{g(x)} - e \qquad g(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-3x+2}$

$D: \; x^2 - 3x + 2 = 0 \qquad x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

$x \neq 1$ e $x \neq 2$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ (perché $g(x) \longrightarrow 1$ in entrambi i limiti)

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = e^{+\infty} - e = +\infty \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = e^{-\infty} - e = -e$

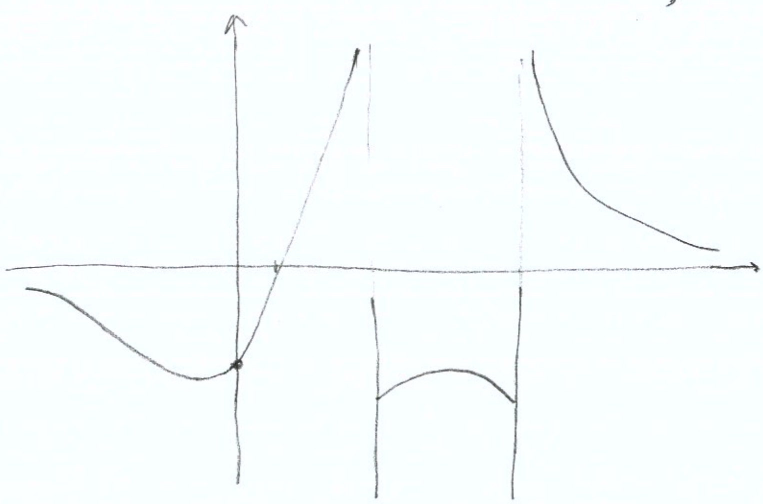
$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -e \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

$f(x) = 0 \quad g(x) = 1 \qquad x^2 + 1 = x^2 - 3x + 2 \qquad 3x = 1 \qquad x = \frac{1}{3}$

$f(0) = \sqrt{e} - e$

$$f'(x) = e^{g(x)} g'(x) = e^{g(x)} \frac{2x(x^2-3x+2) - (x^2+1)(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2} = e^{g} \frac{3+2x-3x^2}{(\;)^2}$$

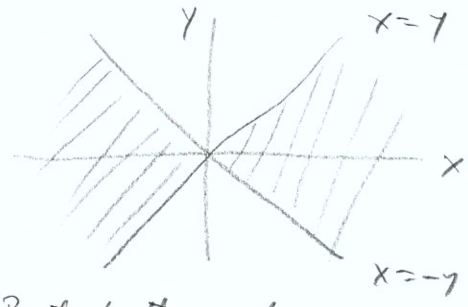
$f'(x) = 0$ per $x = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{10}}{3} \approx -\frac{2}{3} \\ \frac{1+\sqrt{10}}{3} \approx \frac{4}{3} \end{cases}$



(7) $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}$ $\qquad \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\geq 0 \qquad x^2+y^2\geq 0$ sempre

$x^2-y^2>0$: $x>y$ e $x<-y$

$(x+y)(x-y)>0 \qquad \begin{cases} x>y \\ x>-y \end{cases}$ e $\begin{cases} x<y \\ x<-y \end{cases}$



Part tratteggiata senza le frontiere

---

(8) $f(x,y)=\sin(xy)+x\cos y$

differenziabile in $(1,\pi/4)$

Pertanto $D_{\hat v} f(1,\pi/4)=\langle \hat v, \nabla f(1,\pi/4)\rangle$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=y\cos(xy)+\cos y \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}=x\cos(xy)-x\sin y$

$D_{\hat v} f(1,\frac{\pi}{4})=\left[\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}\right]\frac12+\left[\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{2}\right]\frac{\sqrt3}{2}=\frac{\sqrt2}{4}\left(1+\frac{\pi}{4}\right)$

---

(9) $f(x,y)=e^{x^4+y^4-xy}$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial x}=(4x^3-y)e^{x^4+y^4-xy}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\left[(4x^3-y)^2+12x^2\right]e^{x^4+y^4-xy} \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}=(4y^3-x)e^{x^4+y^4-xy}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\left[(4x^3-y)(4y^3-x)-1\right]e^{x^4+y^4-xy} \qquad \begin{cases} 4x^3-y=0 \\ 4y^3-x=0 \end{cases}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\left[(4y^3-x)^2+12y^2\right]e^{x^4+y^4-xy} \qquad \begin{cases} y=4x^3 \\ 4(4x^3)^3-x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=4x^3 \\ 256x^9-x=0 \end{cases}$

$x(256x^8-1)=0 \quad \begin{cases} x=0 \\ x=\dfrac{1}{\sqrt[8]{256}}=\dfrac12 \end{cases} \qquad \begin{array}{ll} x=0,\ y=0 & P_1(0,0) \\ x=\frac12,\ y=\frac12 & P_2(\frac12,\frac12) \end{array}$

$H(P_1)=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\det(H)<0$ SELLA

$H(P_2)=\begin{pmatrix} 3/\sqrt[4]{e} & -1/\sqrt[4]{e} \\ -1/\sqrt[4]{e} & 3/\sqrt[4]{e} \end{pmatrix}$ $\det(H)=\dfrac{8}{\sqrt[4]{e}}>0$ MINIMO