Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Anno Accademico 2012/2013
Analisi Matematica 1

Nome ....

N. Matricola .... Ancona, 16 febbraio 2013

1. Dati gli insiemi numerici

$$E_1 = [-\infty, 1) \cup (1, 2]; \qquad E_2 = \left\{ \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right\}_{n=2}^{\infty}; \qquad E_3 = \left\{ \frac{2\sqrt{n} - 3}{\sqrt{n} - 1} \right\}_{n=2}^{\infty}$$

determinarne estremo superiore ed estremo inferiore e punti di accumulazione; dire se ammettono massimo e minimo e, in caso affermativo, determinarli.

2. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n+3} x^n; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^{3n} x^n$$

3. Calcolare i limiti

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(e^{-x} + \pi)}{\sin(1/x)}; \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin(e^x - 1) - x}{x^2}.$$

usando il teorema di de l'Hopital.

4. Studiare la funzione

$$f(x) = e^{g(x)} - e \qquad \text{dove} \qquad g(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - x - 2}$$

5. Identificare e classificare i punti di discontinuità ed i punti di non derivabilità della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} + (x - 2)^{2/3}.$$

Dopo aver verificato la derivabilità della funzione nel punto di ascissa $x = 0$, scrivere l'equazione della retta tangente al grafico in tale punto.

1. $E_1 = (-\infty, 1) \cup (1,2]$ $\sup E_1 = \max E_1 = 2$ Acc.

$\inf E_1 = -\infty$ $\nexists \min E_1$ $(-\infty,1] \cup [1,2]$

$$E_2 = \left\{ \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right\}_{n=2}^{\infty} = \left\{ \frac{n+1-n+1}{n^2-1} \right\}_{n=2}^{\infty} = \left\{ \frac{2}{n^2-1} \right\}_{n=2}^{\infty}$$

$\inf E_2 = 0$ $\sup E_2 = \max E_2 = \frac{2}{3}$ $\nexists \min E_2$ Acc. $= \{0\}$

$$E_3 = \left\{ \frac{2\sqrt{n}-3}{\sqrt{n-1}} \right\}_{n=2}^{\infty} \qquad \text{Per } n=2 \rightarrow \frac{2\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}} < 0$$

Acc. $= \{2\}$ $\lim_{n\to\infty} = 2$ $\sup E_3 = 2$ $\max E_3 \nexists$

$\inf E_3 = \min E_3 = \frac{2\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}}$

---

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n+3} x^n \qquad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \frac{n+3}{n+4} = 1$$

$R = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2+\frac{1}{n}\right)^{3n} x^n \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(2+\frac{1}{n}\right)^{3n}} = \lim_{n\to\infty} \left(2+\frac{1}{n}\right)^3 = 8$$

$R = \frac{1}{8}$

---

3. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(e^{-x}+\pi)}{\sin(1/x)} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{-e^{-x}\cos(e^{-x}+\pi)}{-\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x} \frac{1}{1} = 0$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin(e^x-1)-x}{x^2} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x\to0} \frac{e^x\cos(e^x-1)-1}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{e^x\cos(e^x-1) - e^{2x}\sin(e^x-1)}{2} = \frac{1}{2}$$

6. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}+\pi\right)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$$
usando gli andamenti asintotici ed i polinomi di Taylor.

7. Calcolare l'integrale
$$\int_{x_1}^{x_2} e^x \sin(|e^x - e|)\,dx$$
dove $x_1 = \ln(e - 3\pi/4)$; $x_2 = \ln(e+\pi)$.

8. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da
$$f(x,y) = \cos(xy) + y\sin x.$$
Calcolarne la derivata direzionale nel punto $(\pi/4, 1)$, lungo la direzione del vettore $\mathbf{v} = (-\sqrt{3}/2, 1/2)$.

9. Calcolare e classificare i punti critici della funzione
$$f(x,y) = e^{g(x)} \qquad \text{dove} \qquad g(x) = x^3 - y^3 + x\,y$$

---

5) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1} + (x-2)^{2/3}$ SINGOLAR. ELIMINABILE $x=-1$

CUSPIDE $x=2$

---

6) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}+\pi\right)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{x}+\dots}{\frac{1}{x}+\dots} = -1$$

---

7) $e^{x_1} - e = e - \frac{3}{4}\pi - e = -\frac{3}{4}\pi \qquad e^{x_2} - e = \pi$

$$\int_{x_1}^{x_2} e^x \sin(|e^x - e|)\,dx = \int_{x_1}^{1} e^x \sin(e-e^x)\,dx + \int_1^{x_2} e^x \sin(e^x - e)\,dx =$$

$$= \left[\cos(e-e^x)\right]_{x_1}^{1} - \left[\cos(e^x - e)\right]_1^{x_2} =$$

$$= 1 - \cos\left(\tfrac{3}{4}\pi\right) - \cos(\pi) + 1 = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(8) $f(x,y) = \cos(xy) + y \sin x$ differenziabile in $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

$$D_{\hat{v}} f\left(\frac{\pi}{4},1\right) = \langle \hat{v}, \underline{\nabla} f\left(\frac{\pi}{4},1\right) \rangle$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -y \sin(xy) + y \cos x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -x \sin(xy) + \sin x$$

$$D_{\hat{v}} f\left(\frac{\pi}{4},1\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] + \frac{1}{2}\left[-\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

---

(9) $f(x,y) = e^{x^3 - y^3 + xy} = e^{g(x,y)}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (3x^2 + y)\, e^g \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = (-3y^2 + x)\, e^g$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left[(3x^2+y)^2 + 6x\right] e^g \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left[(-3y^2+x)^2 - 6y\right] e^g$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \left[1 + (3x^2+y)(-3y^2+x)\right] e^g$$

$$\begin{cases} 3x^2 + y = 0 \\ x - 3y^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3y^2 \\ 3 \cdot 9y^4 + y = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} y(27y^3+1) = 0 \\ y = 0 \quad e \quad -\frac{1}{3} \\ x = 0 \quad\quad x = \frac{1}{3} \end{array}$$

$$P_1 = (0,0), \quad P_2 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

$$g\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} + \frac{1}{27} - \frac{1}{9} = \frac{2}{27} - \frac{3}{27} = -\frac{1}{27}$$

$$H(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(H) < 0 \qquad \text{SELLA}$$

$$H(P_2) = \begin{pmatrix} 2e^{-1/27} & e^{-1/27} \\ e^{-1/27} & 2e^{-1/27} \end{pmatrix} \qquad \det(H) = 3e^{2/27} > 0 \qquad \text{MINIMO}$$

④ $f(x) = e^{g(x)} - e \qquad g(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2-x-2}$

$D: x^2-x-2 \neq 0 \qquad x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases} \qquad x \neq -1, 2$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ perché $g(x) \to 1$ per $x \to \pm\infty$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = e^{+\infty} - e = +\infty \qquad \lim_{x \to -1^+} f(x) = e^{-\infty} - e = -e$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -e \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

$f(0) = \frac{1}{e} - e \qquad f(x) = 0$ per $g(x) = 1 \qquad x^2+2 = x^2-x-2 \qquad x = -4$

$$f'(x) = e^{g(x)} \frac{2x(x^2-x-2)-(2x-1)(x^2+2)}{(x^2-x-2)^2} = -e^{g} \frac{x^2+8x-2}{(x^2-x-2)^2}$$

$f'(x) = 0 \qquad x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16+2} = -4 \pm 3\sqrt{2} \approx \begin{cases} -8.2 \\ 0.2 \end{cases}$