

Dispense del corso di
FISICA-MATEMATICA
per il
Corso di Laurea Specialistica in
Ingegneria Civile

Lucio Demeio
Dipartimento di Scienze Matematiche
Università Politecnica delle Marche

6 ottobre 2008

0.1 Prefazione

In questo corso ci proponiamo di fornire gli elementi generali della teoria delle equazioni differenziali alle derivate parziali (EDP) e dei loro metodi risolutivi. Nella trattazione dell'argomento, è inevitabile il ricorso ad alcuni concetti di analisi funzionale, come gli spazi funzionali (spazi di Banach e di Hilbert) e gli operatori. Pertanto, dedichiamo una prima parte delle dispense a raccogliere alcune definizioni e fatti importanti su questi argomenti, accompagnandoli con poche dimostrazioni.

Queste dispense sono divise in tre parti: una prima parte dedicata ai richiami di analisi funzionale ed all'introduzione dei concetti teorici sulle EDP, una parte dedicata ai metodi analitici di risoluzione ed una parte dedicata ai metodi numerici. Quest'ultima parte rimane necessariamente molto limitata, non essendovi spazio per esporre i concetti generali, teorici e pratici, del calcolo numerico.

Indice

0.1	Prefazione	ii
I	Nozioni generali	1
1	Elementi introduttivi	3
1.1	Richiami sui numeri complessi	3
1.2	Spazi di funzioni	6
1.2.1	Spazi di Banach	7
1.2.2	Spazi di Hilbert	10
1.2.3	Basi ortonormali	12
1.2.4	Operatori lineari	17
1.2.5	Spettro di un operatore lineare	20
1.2.6	Operatori autoaggiunti ed unitari	21
1.3	Operatori differenziali e problemi al contorno	22
1.3.1	Problemi al contorno	23
1.3.2	Esempi	26
1.4	Trasformate di Fourier	29
1.4.1	Introduzione	29
1.4.2	La delta di Dirac	30
1.4.3	Trasformate di Fourier negli spazi L^1 ed L^2	34
1.4.4	Trasformate di Fourier nello spazio di Schwartz	35
1.4.5	Proprietà ed esempi notevoli	38
1.5	Operatori differenziali in coordinate curvilinee ortogonali	40
1.5.1	Sistemi di coordinate curvilinee ortogonali	40

1.5.2	L'operatore gradiente in coordinate curvilinee	42
1.5.3	L'operatore divergenza in coordinate curvilinee	43
1.5.4	Il rotore in coordinate curvilinee	44
1.5.5	Il Laplaciano in coordinate curvilinee	45
1.5.6	Coordinate ortogonali notevoli	45
1.6	Esercizi	48
2	Equazioni differenziali alle derivate parziali	51
2.1	Introduzione	51
2.2	Esempi	54
3	Equazioni del prim'ordine	57
3.1	Equazioni quasi-lineari	58
3.2	Il problema di Cauchy per l'equazione quasi-lineare	60
3.3	Equazioni lineari	64
3.4	Esempi	65
3.5	Esercizi	69
4	Equazioni del second'ordine	71
4.1	Caratteristiche e classificazione	71
4.2	Forma canonica	74
4.3	Esempi	77
4.4	Esercizi	81
5	Equazioni notevoli	83
5.1	L'equazione delle onde	83
5.1.1	Derivazione euristica	83
5.1.2	Proprietà fondamentali e formula di D'Alembert	85
5.2	L'equazione di Laplace	87
5.2.1	Giustificazione fisica	87
5.2.2	Proprietà e teoremi fondamentali	88
5.3	L'equazione del calore e della diffusione	92

5.3.1	Derivazione euristica	92
5.3.2	Problema di Hadamard	99
5.3.3	L'equazione del calore in un mezzo infinito	101
5.3.4	L'equazione del calore in un mezzo semi-infinito	104
5.3.5	Stati stazionari	105
5.4	Esercizi	106
 II Soluzioni analitiche		107
 6 Equazioni del prim'ordine		109
6.1	Soluzione diretta del problema di Cauchy	109
6.2	Metodo delle caratteristiche	114
6.3	Metodo delle trasformate di Fourier	118
6.4	Ulteriori applicazioni	119
6.5	Esercizi	136
 7 Equazioni iperboliche		137
7.1	Sviluppo in autofunzioni	137
7.2	Metodo delle caratteristiche	142
7.3	Metodo delle trasformate di Fourier	146
7.4	Ulteriori applicazioni	149
7.5	Esercizi	155
 8 Equazioni paraboliche		157
8.1	Sviluppo in autofunzioni	157
8.2	Metodo delle trasformate di Fourier	167
8.3	Trasformazioni di similitudine	171
8.4	Esercizi	173
 9 Equazioni ellittiche		175
9.1	L'equazione di Laplace nel disco	175
9.2	L'equazione di Laplace nella sfera	177

9.3	L'equazione di Laplace nel rettangolo	179
9.4	Il problema di Poisson-Dirichlet nel rettangolo	183
9.5	Esercizi	185
 III Soluzioni numeriche		189
 10 Differenze finite		191
10.1	Introduzione	191
10.2	Il metodo delle differenze finite	191
10.3	L'equazione del calore	194
10.4	Il metodo <i>upwind</i> per l'equazione di trasporto	198
10.5	Problemi ellittici	200

Parte I

Nozioni generali

Capitolo 1

Elementi introduttivi

1.1 Richiami sui numeri complessi

Indichiamo con \mathbb{C} il corpo dei numeri complessi. Ogni $z \in \mathbb{C}$ si può scrivere come $z = x + iy$, dove $x = \operatorname{Re}(z)$ è la *parte reale* ed $y = \operatorname{Im}(z)$ è la *parte immaginaria*. I numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ per i quali è $\operatorname{Im}(z) = 0$ sono i *numeri reali*, mentre quelli per i quali è $\operatorname{Re}(z) = 0$ sono detti *numeri immaginari puri*.

Si definisce il *complesso coniugato* $z^* = x - iy$ come quel numero complesso che ha la stessa parte reale di z e la parte immaginaria opposta.

Si definisce il *modulo* di $z = x + iy$ come

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Da notare che $zz^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$ e quindi $|z| = |z^*|$.

La *somma* di due numeri complessi $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ è data da

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Il *prodotto* è dato da

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

e la *divisione* da

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

In *rappresentazione polare* il numero complesso $z \in \mathbb{C}$ si può scrivere utilizzando la trasformazione

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi \\y &= \rho \sin \varphi\end{aligned}$$

ottenendo così

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

ρ è detto modulo, e φ è detto *anomalia* (vedi figura 1.1).

Introduciamo a questo punto la *funzione esponenziale* nel campo complesso

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Il numero complesso z si può allora scrivere

$$z = \rho e^{i\varphi}.$$

Il complesso coniugato è dato da

$$z^* = \rho(\cos \varphi - i \sin \varphi) = \rho e^{-i\varphi}.$$

Dunque il complesso coniugato z^* ha lo stesso modulo di z ed anomalia op-

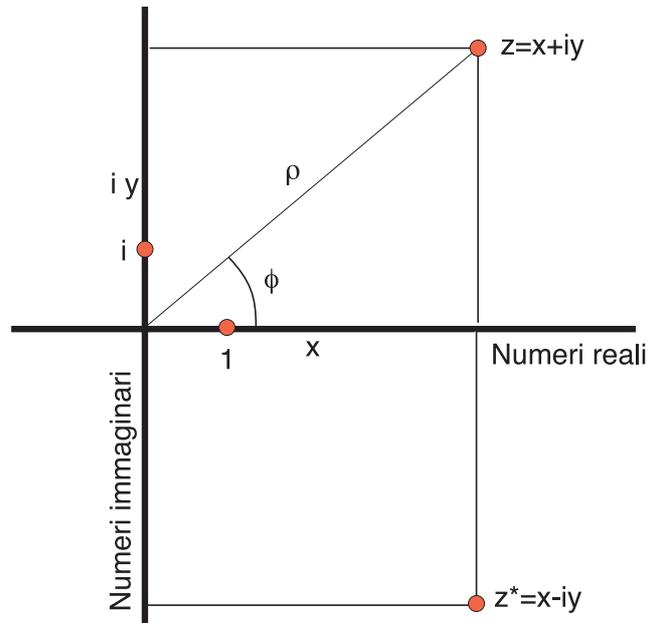


Figura 1.1: Il piano complesso.

posta. La definizione del modulo ρ è consistente con quella data in precedenza come $|z|$, come si vede dal fatto che $z z^* = \rho^2$. Dunque è $|z| = \rho$ ed in particolare $|e^{i\varphi}| = 1$. Il fattore $e^{i\varphi}$ viene detto *fase*. Ai numeri reali positivi corrisponde l'anomalia $\varphi = 0$; ai numeri reali negativi $\varphi = \pi$, ai numeri immaginari puri con parte immaginaria positiva $\varphi = \pi/2$, a quelli con parte immaginaria negativa $\varphi = 3\pi/2$. Per esempio,

$$\begin{aligned} e^{i\pi} &= -1 \\ e^{i\pi/2} &= i \\ e^{3i\pi/2} &= -i. \end{aligned}$$

Sono molto importanti le seguenti formule, dette *formule di Eulero*, che legano gli esponenziali complessi con le funzioni trigonometriche:

$$\begin{aligned}e^{i\varphi} &= \cos \varphi + i \sin \varphi \\e^{-i\varphi} &= \cos \varphi - i \sin \varphi \\ \cos \varphi &= \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \\ \sin \varphi &= \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}\end{aligned}$$

In rappresentazione polare, le operazioni di moltiplicazione e divisione di numeri complessi risultano particolarmente semplici. Siano $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$ due numeri complessi. Abbiamo allora

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Infine, definiamo il *logaritmo* di un numero complesso z al modo seguente:

$$\ln z = \ln(\rho e^{i\varphi}) = \ln \rho + i\varphi,$$

che restituisce la definizione usuale della funzione logaritmo quando z è reale positivo ($\varphi = 0$ in tal caso) e fornisce invece

$$\ln z = \ln \rho + i\pi,$$

quando z è reale negativo.

1.2 Spazi di funzioni

Nella trattazione delle equazioni differenziali, sorge la necessità di generalizzare alcuni concetti ben noti dell'algebra e della geometria elementare, e definiti negli spazi vettoriali \mathbb{R}^n , a spazi più "grandi" e più complessi. Lo studente ha sicuramente familiarità con i vettori nel piano e nello spazio, rappresentati algebricamente come coppie o terne di numeri reali, od i vettori in \mathbb{R}^n , rappresentati algebricamente da n -uple in \mathbb{R}^n . A questi vettori, ad esempio, si associa una grandezza chiamata *norma*, definita in questi casi come la lunghezza cartesiana del vettore, o il suo modulo. A ciascuna coppia di vettori si associa un *prodotto scalare*, che è legato all'angolo formato dai due vettori, oltre che ai loro moduli, e si parla di vettori ortogonali quando il loro prodotto scalare si annulla. Negli spazi \mathbb{R}^n si introduce poi il concetto di *dipendenza ed indipendenza lineare* dei vettori ed il concetto di *base ortonormale*, strettamente legata alla *dimensione* dello spazio in questione. Ricordiamo che una base, in uno spazio a dimensione finita, è un insieme di vettori linearmente indipendenti tali che qualunque vettore dello spazio si può rappresentare come combinazione lineare degli elementi della base. In uno spazio a dimensione n si possono determinare al più n vettori linearmente indipendenti e tale spazio possiede sempre una base di n elementi. Lo studente ha poi sicuramente familiarità con le matrici, che agiscono sui vettori dello spazio fornendo altri vettori. Le matrici $m \times n$ sono un esempio di *applicazione* (o mappa) di uno spazio \mathbb{R}^n in uno spazio \mathbb{R}^m ; le matrici quadrate mappano uno spazio in se stesso. Per le matrici quadrate, si introduce poi il concetto di *autovalore*, e quello collegato di *autovettore*. L'insieme degli autovalori (un insieme discreto di numeri complessi) costituisce lo *spettro* di una matrice.

Questi concetti vanno estesi, o generalizzati, con i dovuti cambiamenti, al caso in cui gli elementi degli spazi vettoriali non siano i vettori elementari intesi come n -uple in \mathbb{R}^n , ma siano funzioni. Gli spazi di questo tipo hanno solitamente dimensione infinita, ma si possono comunque introdurre i concetti sopra menzionati. Una novità importante rispetto agli spazi \mathbb{R}^n è data dal concetto di *completezza*. Gli spazi \mathbb{R}^n sono spazi completi, cioè qualunque successione convergente di elementi di uno spazio ha come limite un elemento dello stesso spazio. Ciò non è sempre vero negli spazi di funzioni, che possono essere completi oppure no. La nozione di matrice si generalizza a quella più complessa di *operatore* e lo spettro diventa un insieme del piano complesso con una parte discreta ed una parte continua. Gli operatori che troviamo nelle equazioni differenziali (sia ordinarie che EDP) sono ovviamente *operatori differenziali*.

1.2.1 Spazi di Banach

Con la nozione di *spazio di Banach* si generalizzano i concetti elementari di norma e di distanza e si introduce il concetto di completezza.

Sia X uno *spazio vettoriale* rispetto ad un campo di scalari \mathbb{F} , che supponiamo uguale ad \mathbb{R} oppure \mathbb{C} . Nel seguito, chiameremo *vettori* gli elementi di tale spazio. Ricordiamo che uno spazio vettoriale rispetto ad un campo di scalari \mathbb{F} è un insieme di elementi sui quali sono definite un'operazione di somma ed un'operazione di moltiplicazione per gli elementi del campo scalare e che danno come risultato ancora un elemento dello stesso spazio.

Uno *spazio normato* è uno spazio X in cui è definita una norma, $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

- $\|x\| \geq 0$,
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, detta *disuguaglianza triangolare*,

$\forall x, y \in X$ e $\forall \alpha \in \mathbb{F}$. Dalle ultime due segue che

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|,$$

$\forall x, y \in X$. La norma $\|x - y\|$, per $x, y \in X$, si dice *distanza* tra x ed y .

Richiamiamo brevemente il concetto di *successione*, che ha un ruolo essenziale nel definire le proprietà di completezza degli spazi. Una successione nello spazio X è un'applicazione dell'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali nello spazio X , che fa corrispondere ad ogni $n \in \mathbb{N}$ un elemento $x \in X$. Indicheremo le successioni con $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Sia ora $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di elementi di X . Si dice che tale successione *converge* al vettore $x \in X$ se $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$. Una successione $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ di elementi di X si dice *successione di Cauchy* se $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = 0$. Il significato di questa condizione è immediato: in una successione di Cauchy gli elementi si avvicinano sempre più tra loro come ci si sposta verso l'infinito. In particolare, una successione convergente è sempre una successione di Cauchy. Una norma in X tale che ogni successione di Cauchy converge ad un elemento di X si dice *completa*. Uno spazio normato dotato di norma completa si dice *spazio di Banach*.

I punti fin qui esposti permettono di introdurre il concetto di continuità. Siano X ed Y due spazi normati. Sia $U \subset X$, e sia $f: U \rightarrow Y$ una mappa. Sia $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di elementi di U che converge ad $x \in U$. La funzione

f si dice *continua* se la successione $\{f(x_n)\}$ converge ad $f(x)$, qualunque sia la successione $\{x_n\}$ che converge ad x .

Sia ora $x \in X$ e sia r un numero reale positivo. L'insieme

$$B(x, r) = \{y \in X : \|x - y\| < r\}$$

è detto *sfera aperta* di raggio r e centro x . Un sottoinsieme U si dice *aperto* se $\forall x \in U$ esiste $r > 0$ tale che $B(x, r) \subset U$.

Un sottoinsieme $U \subset X$ si dice *chiuso* se esso contiene i limiti di *tutte* le successioni convergenti, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, con $x_n \in U$ e limite in X . La *chiusura* \bar{U} di un insieme $U \subset X$ è il più piccolo insieme chiuso che contiene U .

Sia $U \subset X$ un insieme. Si dice *diametro* di U il numero reale

$$\text{diam}(U) = \sup\{\|x - y\|, x, y \in U\}.$$

Un sottoinsieme $U \subset X$ si dice *limitato* se $\text{diam}(U)$ è finito.

Un sottoinsieme $D \subset X$ si dice *denso* in X se ogni elemento $x \in X$ è il limite di una successione $\{x_n\}$ di elementi di D . Intuitivamente, questo significa che ci si può avvicinare quanto si vuole a ciascun elemento $x \in X$ rimanendo sempre sul sottoinsieme denso D . Uno spazio di Banach si dice *separabile* se contiene un sottoinsieme denso che sia finito o infinito numerabile.

Vediamo alcuni esempi di spazi di Banach, omettendo le dimostrazioni sulla completezza delle norme che definiamo.

Esempio 1.2.1 (Spazi \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n) Sia $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un vettore di \mathbb{R}^n (o \mathbb{C}^n). Nello spazio vettoriale \mathbb{R}^n (o \mathbb{C}^n) introduciamo la norma

$$\|x\| = \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right]^{1/2},$$

che definisce la solita lunghezza euclidea dei vettori. Con questa norma, \mathbb{R}^n (o \mathbb{C}^n) è uno spazio di Banach. Lo spazio di Banach \mathbb{R} è separabile; infatti esso contiene il sottoinsieme denso ed infinito numerabile dei numeri razionali, \mathbb{Q} . A sua volta, \mathbb{Q} non è uno spazio di Banach: basta infatti considerare la successione

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n,$$

che è una successione di Cauchy ma converge al numero di Nepero e che non è razionale. Anche con le norme alternative $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ e $\|x\|_{\infty} = \max_{i=1, n} |x_i|$, \mathbb{R}^n (o \mathbb{C}^n) è uno spazio di Banach.

Esempio 1.2.2 (Spazi di funzioni continue - I) Siano a e b due numeri reali con $a < b$. L'insieme di tutte le funzioni f continue in $[a, b]$ si indica con $C([a, b])$ ed è uno spazio vettoriale. Con la norma

$$\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

$C([a, b])$ diventa uno spazio di Banach. L'esempio è generalizzabile a funzioni definite su un sottoinsieme chiuso e limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Esempio 1.2.3 (Spazi L^p) Sia $1 \leq p < \infty$ un numero reale e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme misurabile. Con $L^p(\Omega)$ si indica l'insieme delle funzioni $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ per le quali esiste ed è finito l'integrale di Lebesgue

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx,$$

con la condizione che due funzioni, i cui valori differiscono soltanto su un insieme di misura nulla, sono uguali. Con la norma

$$\|f\|_p = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p}.$$

$L^p(\Omega)$ diventa uno spazio di Banach. Esempi particolarmente importanti si hanno per $p = 2$ (funzioni a quadrato sommabile e spazi L^2) e per $p = 1$ (funzioni sommabili in valore assoluto e spazi L^1).

Esempio 1.2.4 (Spazi di funzioni continue - II) Consideriamo nuovamente lo spazio $C([a, b])$ delle funzioni f continue in $[a, b]$, ma invece della norma $\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ introdotta in precedenza, usiamo la norma dello spazio $L^1([a, b])$. In questo caso $C([a, b])$ non è uno spazio di Banach. Per vedere questo, mostriamo che esiste una successione di Cauchy che non converge ad un elemento dello spazio. Consideriamo la successione $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ di $C([0, 1])$ con $f_1(x) = 1$ e

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1 - (x - 1/2)n & \text{for } 1/2 < x < 1/2 + 1/n \\ 0 & \text{for } 1/2 + 1/n \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (1.1)$$

(vedi figura 1.2). Si vede che questa è una successione di Cauchy; infatti per $2 \leq n \leq m$ si ha

$$\|f_n - f_m\| \leq \int_{1/2}^{1/2+1/n} |f_n(x) - f_m(x)| dx \leq 1/n$$

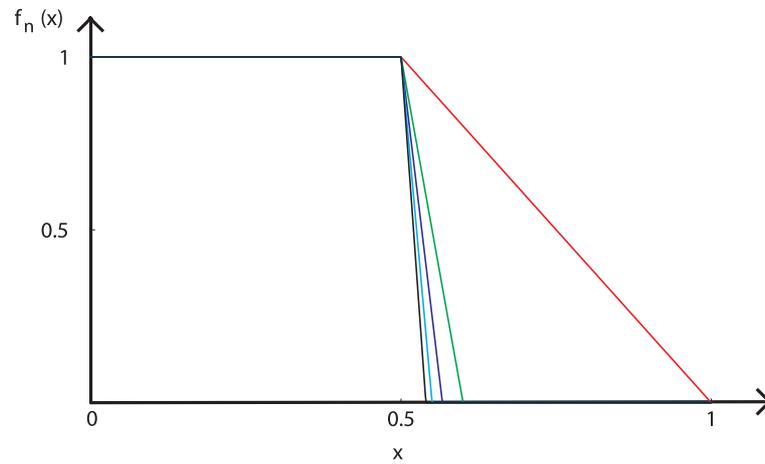


Figura 1.2: La successione (1.1) per $n = 2, 10, 15, 20$ e 25 .

e quindi $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\| = 0$. La successione però converge alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 0 & \text{for } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

che chiaramente non è continua e quindi non appartiene allo spazio $C([0, 1])$. Per rendere questo spazio completo con questa norma, abbiamo dunque bisogno di allargarlo fino a comprendere i limiti di tutte le sue successioni (come quella appena vista); questo porta automaticamente alla sua chiusura che è proprio $L^1([0, 1])$.

Esempio 1.2.5 (Spazi l^p) Sia $1 \leq p < \infty$ un numero reale e sia l^p l'insieme di tutte le successioni $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, reali o complesse, tali che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ converge. Con la norma

$$\|x\|_p = \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right]^{1/p}.$$

l^p diventa uno spazio di Banach.

1.2.2 Spazi di Hilbert

Con gli spazi di Hilbert si generalizza anche il concetto di prodotto scalare.

Sia X uno spazio vettoriale, con campo $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Una funzione $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{F}$ è detta *prodotto scalare* se, $\forall x, y \in X$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ valgono le seguenti proprietà (indichiamo con $x^*, y^*, \dots, \alpha^*, \beta^*, \dots$ i complessi coniugati di $x, y, \dots, \alpha, \beta, \dots$):

- $(x, x) \geq 0$,
- $(x, x) = 0 \iff x = 0$,
- $(x, y) = (y, x)^*$,
- $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$,
- $(z, \alpha x + \beta y) = \alpha^*(z, x) + \beta^*(z, y)$,

$\forall x, y, z \in X$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Il prodotto scalare induce in modo naturale una norma, data da

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}. \quad (1.2)$$

Per tale norma vale la *disuguaglianza di Schwartz*

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\| \quad (1.3)$$

$\forall x, y \in X$, dove vale il segno di uguaglianza se e solo se $y = \alpha x$, per qualche $\alpha \in \mathbb{F}$. Uno spazio vettoriale sul quale è definito un prodotto scalare è detto *spazio pre-Hilbert*. Uno spazio pre-Hilbert con norma indotta completa si dice *spazio di Hilbert*. La norma di uno spazio di Hilbert soddisfa l'*identità del parallelogramma*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad (1.4)$$

Se la norma di uno spazio di Banach soddisfa l'identità del parallelogramma, allora lo spazio è uno spazio di Hilbert, con prodotto scalare:

$$(x, y) = (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)/4$$

se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, e

$$(x, y) = (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)/4$$

se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Lo studente è invitato a dimostrarlo per esercizio.

Sia ora X uno spazio pre-Hilbert. Due vettori $x, y \in X$ si dicono *ortogonali*, $x \perp y$, se $(x, y) = 0$. Per due vettori ortogonali x ed y si ha ovviamente

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

(*teorema di Pitagora*).

Un vettore $x \in X$ si dice ortogonale ad un sottoinsieme $D \subset X$, $x \perp D$, se $(x, y) = 0 \forall y \in D$. Due sottoinsiemi $D \subset X$ ed $E \subset X$ si dicono tra loro ortogonali, $D \perp E$, se $(x, y) = 0 \forall x \in D$ ed $y \in E$. Se $D \subset X$, l'insieme

$$D^\perp = \{y \in X, y \perp D\}$$

si dice *complemento ortogonale* di D .

Vediamo alcuni esempi di spazi di Hilbert, omettendo le dimostrazioni sulla completezza.

Esempio 1.2.6 (Spazi \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n) Gli spazi \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n , descritti nell'esempio (1.2.1), diventano spazi di Hilbert con il prodotto scalare

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i^*.$$

In uno spazio vettoriale reale questo definisce il solito prodotto scalare tra vettori.

Esempio 1.2.7 (Spazi L^2) Gli spazi L^2 , descritti nell'esempio (1.2.3) per $p = 2$, diventano spazi di Hilbert con il prodotto scalare

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g^*(x)dx.$$

Esempio 1.2.8 (Spazi di funzioni continue) Lo spazio $C([a, b])$, descritto nell'esempio (1.2.2) con la norma ivi definita, non è uno spazio di Hilbert, in quanto la norma non soddisfa l'identità del parallelogramma (1.4). Infatti, sia $f(x) \in C([a, b])$ monotona decrescente con $f(a) = 1$, $f(b) = 0$ e sia $g(x) \in C([a, b])$ con $g(x) = 1 - f(x)$. Si vede subito che $\|f\| = \|g\| = \|f + g\| = \|f - g\| = 1$, violando la (1.4).

Esempio 1.2.9 (Spazi l^2) Gli spazi l^2 , descritti nell'esempio (1.2.5) per $p = 2$, diventano spazi di Hilbert con il prodotto scalare

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i^*.$$

Esempio 1.2.10 (Prodotti scalari con funzione peso) Il prodotto scalare definito nell'esempio 1.2.7 nello spazio L^2 si può modificare al modo seguente

$$(f, g) = \int_{\Omega} w(x)f(x)g(x)dx, \quad (1.5)$$

dove $w(x)$ è una funzione continua non negativa ed integrabile definita su Ω e ci siamo inoltre limitati a considerare uno spazio reale. La funzione w si chiama *funzione peso*.

1.2.3 Basi ortonormali

Sia X uno spazio vettoriale di dimensione N , nel quale sia stato introdotto un prodotto scalare. Tale spazio possiede un insieme di N vettori linearmente

indipendenti ed ortonormali che costituiscono una *base ortonormale* $\{\phi_n\}_{n=1}^N$. Ogni elemento $x \in X$ si può sviluppare secondo i vettori della base:

$$x = \sum_{n=1}^N c_n \phi_n$$

con $c_n = (x, \phi_n)$. Valgono inoltre le identità

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^N |(x, \phi_n)|^2 \quad (1.6)$$

$$(x, y) = \sum_{n=1}^N (x, \phi_n)(y, \phi_n), \quad (1.7)$$

dette *identità di Parseval*. Quando $X = \mathbb{R}^n$, queste identità esprimono le regole ben note che legano la norma ed il prodotto scalare alle componenti dei vettori.

Questi concetti si possono generalizzare anche ad uno spazio di Hilbert X separabile a dimensione infinita. In particolare, possiamo introdurre una base ortonormale, costituita da un insieme infinito numerabile di vettori linearmente indipendenti, $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ che permettono di sviluppare ciascun elemento $x \in X$ secondo $\{\phi_n\}$,

$$x = \sum_{n=1}^\infty c_n \phi_n \quad (1.8)$$

(questo in realtà significa che $\lim_{N \rightarrow \infty} \|x - \sum_{n=1}^N c_n \phi_n\| = 0$). Inoltre, anche in questo caso valgono le identità di Parseval

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |(x, \phi_n)|^2 \quad (1.9)$$

$$(x, y) = \sum_{n=1}^\infty (x, \phi_n)(y, \phi_n). \quad (1.10)$$

Sia ora $E_N \subset X$ un sottospazio di dimensione N . Negli spazi \mathbb{R}^n siamo abituati a considerare la proiezione ortogonale di un qualsiasi vettore su un sottospazio. Per esempio, un vettore dello spazio cartesiano $O(x, y, z)$ può essere proiettato in modo univoco sul piano $O(x, y)$. Questa operazione può essere generalizzata agli spazi a dimensione infinita. Vale il seguente

Teorema 1.2.1 *Un qualsiasi vettore $x \in X$ si può decomporre in modo univoco nella somma $y + z$ di un vettore $y \in E_N$ ed un vettore $z \in E_N^\perp$. Il vettore $y \in E_N$ si dice proiezione ortogonale di x su E_N . (Teorema di proiezione).*

Sia ora $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormale in X tale che $\phi_n \in E_N$ per $n = 1, 2, \dots, N$ (questa base esiste sempre). Si può dimostrare che la proiezione ortogonale y del vettore x su E_N è data da

$$y = \sum_{n=1}^N (x, \phi_n) \phi_n.$$

Esempio 1.2.11 (Basi di \mathbb{R}^n) Un primo esempio elementare ci viene dall'algebra. I vettori

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \dots, 0, 0) \\ e_2 &= (0, 1, \dots, 0, 0) \\ &\dots \\ e_n &= (0, 0, \dots, 0, 1) \end{aligned}$$

costituiscono una base ortonormale nello spazio di Hilbert \mathbb{R}^n , dove il prodotto scalare è definito da

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

La base $\{e_i\}_{i=1}^n$ appena definita si chiama *base canonica* di \mathbb{R}^n .

Esempio 1.2.12 (Polinomi ortogonali) Consideriamo lo spazio di Hilbert reale $L^2([a, b])$. Un insieme di polinomi $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, con p_n di grado n e $(p_n, p_m) = 0$ per $m \neq n$, costituisce una base ortogonale. Questi polinomi sono detti *polinomi di Legendre*. Se introduciamo il prodotto scalare con la funzione peso (1.5) dell'esempio 1.2.10 otteniamo, a seconda del dominio di definizione e della funzione peso, diverse famiglie di *polinomi ortogonali*. Ecco una tabella riepilogativa di alcuni di essi:

$[a, b]$	$w(x)$	Nome del polinomio
$[-1, 1]$	1	Legendre
$[-1, 1]$	$(1 - x^2)^{-1/2}$	Chebyshev
$[0, +\infty)$	e^{-x}	Laguerre
$(-\infty, +\infty)$	e^{-x^2}	Hermite

Per maggiori dettagli sui polinomi ortogonali vedi, ad esempio, [9]

Esempio 1.2.13 (Funzioni trigonometriche e serie di Fourier) Si consideri lo spazio di Hilbert $L^2([-\pi, \pi])$. L'insieme di funzioni $\{\phi_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, con

$$\phi_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \tag{1.11}$$

è una base ortonormale:

$$(\phi_n, \phi_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = \begin{cases} \frac{1}{i(n-m)} [e^{i(n-m)x}]_{-\pi}^{\pi} = 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

Una qualunque funzione $f \in L^2([-\pi, \pi])$ si può sviluppare secondo

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \phi_n(x) \tag{1.12}$$

con

$$c_n = (f, \phi_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \tag{1.13}$$

La (1.12) si dice *serie di Fourier* della funzione f e la (1.13) fornisce i coefficienti della serie di Fourier. Infine, in base all'identità di Parseval, si ha che

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

Nell'ottenere questa rappresentazione per la funzione $f(x)$, abbiamo considerato i suoi valori soltanto per $x \in [-\pi, \pi]$. Se si considerano valori di x fuori di tale intervallo, estendendo la serie a tutto l'asse reale, si ottiene una funzione $f_p(x)$ che coincide con $f(x)$ per $x \in [-\pi, \pi]$ e ne è l'estensione periodica su \mathbb{R} : $f_p(x + 2\pi) = f_p(x)$ con $f_p(x) = f(x)$ per $x \in [-\pi, \pi]$. Da notare (ci sarà utile in seguito) che la serie di Fourier si può definire su qualunque intervallo reale. In particolare, consideriamo l'intervallo simmetrico $[-T/2, T/2]$ e sia $f \in L^2([-T/2, T/2])$. La base ortonormale delle funzioni trigonometriche è in questo caso

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{in2\pi x/T} \quad (1.14)$$

e quindi i coefficienti della serie (1.12) sono

$$c_n = (f, \phi_n) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in2\pi x/T} dx. \quad (1.15)$$

Esempio 1.2.14 (Esempi di serie di Fourier) Calcoliamo la serie di Fourier di alcune funzioni elementari.

(a) Sia

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -T/2 \leq x \leq 0 \\ 0, & 0 < x \leq T/2. \end{cases}$$

Il periodo di questa funzione è T . Pertanto

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in2\pi x/T} dx = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^0 e^{-in2\pi x/T} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{1 - e^{in\pi}}{-in2\pi/T} = \frac{\sqrt{T}}{n\pi} \frac{(-1)^n - 1}{2i} \end{aligned}$$

per $n \neq 0$, mentre $c_n = \sqrt{T}/2$ per $n = 0$.

(b) Sia $f(x) = \sin Kx$. Il periodo di questa funzione è $T = 2\pi/K$. Pertanto:

$$\begin{aligned} c_n &= \sqrt{\frac{K}{2\pi}} \int_{-\pi/K}^{\pi/K} \sin Kx e^{-inKx} dx = \sqrt{\frac{K}{2\pi}} \int_{-\pi/K}^{\pi/K} \sin Kx (\cos nKx - i \sin nKx) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi K}} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \phi (\cos n\phi - i \sin n\phi) d\phi, \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza è ottenuta dalla precedente con la sostituzione $\phi = Kx$. Ricordando che

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin m\phi \cos n\phi d\phi &= 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin m\phi \sin n\phi d\phi &= 0 \quad \text{per } n \neq m \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \phi d\phi &= \pi \end{aligned}$$

abbiamo $c_n = 0$ per $n \neq \pm 1$, $c_{\pm 1} = \mp i \sqrt{\pi/2K}$. Si verifica facilmente che la somma della serie, ormai ridotta a due soli termini, dà proprio la funzione $f(x) = \sin Kx$.

Commento. Gli spazi $C(\Omega)$ ed $L^p(\Omega)$ possono essere definiti anche su regioni Ω non limitate, purchè sussistano le opportune condizioni di convergenza sulle norme e sugli integrali.

1.2.4 Operatori lineari

La nozione di *operatore lineare* generalizza il concetto elementare di matrice agli spazi funzionali e molte delle definizioni che troveremo presentano una stretta analogia con il caso delle matrici.

Siano X ed Y due spazi di Banach e sia $D \subset X$. Un'applicazione $T : D \rightarrow Y$ si dice *operatore lineare* se

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

$\forall x, y \in D$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. $D = D(T)$ si dice *dominio* dell'operatore T mentre l'insieme

$$R = R(T) \subset Y = \{Tx : x \in D\}$$

si dice *immagine*. L'insieme

$$K = K(T) = \{x \in X : Tx = 0\}$$

si dice *kernel* di T . R e K sono sottospazi vettoriali lineari. Un operatore $T : D \subset X \rightarrow Y$ si dice *invertibile* se è una corrispondenza biunivoca tra D ed R . In tal caso, esiste l'operatore inverso T^{-1} , si ha $D(T^{-1}) = R(T)$ definito da $x = T^{-1}y$, per $x \in D, y = Tx \in R$. Si ha il seguente

Teorema 1.2.2 *Un operatore lineare $T : D \subset X \rightarrow Y$ è invertibile se e solo se $R(T) = Y$ e $K(T) = \{0\}$.*

Dimostrazione. Se T è invertibile, allora necessariamente deve essere $R(T) = Y$ e $K(T) = \{0\}$ (per definizione). Viceversa, se $R(T) = Y$ e $K(T) = \{0\}$, $\forall y \in Y, \exists x \in X$ tale che $Tx = y$. Supponiamo allora che esistano due vettori $x_1, x_2 \in X$ tali che $Tx_1 = Tx_2 = y$. Allora $T(x_1 - x_2) = Tx_1 - Tx_2 = 0$ per la linearità di T e quindi $x_1 - x_2 = 0$ perchè $K(T) = \{0\}$. La soluzione x di $Tx = y$ è quindi unica. ■

Lo studente ha già incontrato queste definizioni nello studio delle matrici. In quel caso il dominio è semplicemente tutto \mathbb{R}^n . Ad esempio, la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

non è invertibile (il suo determinante è nullo) ed il suo kernel è formato dai vettori di \mathbb{R}^3 le cui prime due componenti sono uguali e la terza è nulla, $(\alpha, \alpha, 0)$, con α reale qualsiasi.

Un operatore $T : X \rightarrow Y$, dove X ed Y sono spazi di Banach, si dice *limitato* se $\sup_{\|x\|=1} \|Tx\| < +\infty$ ed in tal caso si definisce la *norma* dell'operatore T come

$$\|T\| = \sup_{x \in X, \|x\|=1} \|Tx\|.$$

Se $X = \mathbb{F}^n$ ha dimensione finita, allora ogni operatore lineare $\mathbb{F}^n \rightarrow Y$ è limitato. Questo è il caso delle matrici, che sono operatori limitati.

Esempio 1.2.15 (Operatori in \mathbb{F}^n) Sia $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ la base canonica di \mathbb{F}^n e sia $x = \sum_{i=1}^n c_i e_i$, con $c_i = (x, e_i)$, un vettore di \mathbb{F}^n . Allora ogni operatore limitato $T : \mathbb{F}^n \rightarrow Y$ può essere rappresentato come

$$Tx = T \left(\sum_{i=1}^n c_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n c_i T e_i.$$

Se abbiamo anche $Y = \mathbb{F}^m$, allora l'insieme degli elementi $T e_i$, $i = 1, \dots, n$ si può rappresentare come una matrice $m \times n$.

Esempio 1.2.16 (Operatori integrali-I) Consideriamo lo spazio di Banach $X = C([a, b])$ introdotto nell'esempio (1.2.2), con $a < b$ numeri reali. L'integrale di Riemann di una funzione continua tra a e b definisce un operatore lineare $T : X \rightarrow \mathbb{R}$:

$$Tf = \int_a^b f(x) dx.$$

L'operatore T è lineare e limitato ed ha norma $\|T\| = b - a$ (verificare per esercizio). Il kernel $K(T)$ è dato da tutte quelle funzioni per le quali

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

Ad esempio, se $a = 0$ e $b = 2\pi$, $\sin x$ e $\cos x$ appartengono a $K(T)$ con tutte le loro combinazioni lineari. L'operatore non è pertanto invertibile.

Esempio 1.2.17 (Operatori integrali-II) Consideriamo nuovamente lo spazio di Banach $X = C([a, b])$ dell'esempio precedente. L'integrale di Riemann

$$Tf = \int_a^x f(t) dt.$$

di una funzione continua tra a e b definisce un operatore lineare $T : X \rightarrow X$: L'operatore T è lineare e limitato. Notiamo innanzitutto che le funzioni $f \in X$ aventi $\|f\| = 1$ sono le funzioni per le quali

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x)| = 1.$$

Su tali funzioni avremo

$$\left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq \int_a^x |f(t)| dt \leq \int_a^b |f(t)| dt \leq \int_a^b 1 dt = b - a.$$

Questo mostra che T è limitato e che $\|T\| = 1$. Per quanto riguarda il kernel $K(T)$, esso è dato da quelle funzioni per le quali

$$\int_a^x f(t) dt \equiv 0,$$

che è possibile se e solo se $f(x) \equiv 0$. Quindi $K(T) = \{0\}$. Attenzione però: l'operatore integrale $T : X \rightarrow X$ non è invertibile, perchè $R(T) \subset X$ ma non è $R(T) = X$. Quale deve essere allora lo spazio Y tale che, come operatore $T : X \rightarrow Y$, T risulti invertibile? Rispondere per esercizio.

Esempio 1.2.18 (Operatore derivata) Accanto allo spazio $C([a, b])$ introdotto negli esempi precedenti, consideriamo anche lo spazio $C^1([a, b])$ delle funzioni derivabili nell'intervallo chiuso $[a, b]$ con derivata prima continua. Siano allora $X = C^1([a, b])$ ed $Y = C([a, b])$ due spazi di Banach, con la stessa norma introdotta nell'esempio (1.2.2) per lo spazio $C([a, b])$. L'operatore lineare

$$Tf = \frac{df}{dx}$$

è allora un operatore $T : X \rightarrow Y$. È facile vedere che questo operatore non è limitato. Si consideri infatti una successione di funzioni continue e derivabili $\{f_n(x)\}$ con $|f_n(x)| \leq 1$, ad esempio

$$f_n(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(x/\delta^n), \tag{1.16}$$

dove δ è un numero reale tale che $0 < \delta < 1$. È facile rendersi conto che non c'è nessun limite superiore alla pendenza che queste funzioni possono assumere nel punto $x = 0$ (vedi figura 1.3), e quindi non esiste nessun limite superiore per $\|Tf\|$. Il kernel è dato dalle funzioni costanti e quindi l'operatore non è invertibile.

Siano ora X ed Y spazi di Banach. Se consideriamo l'insieme $\mathcal{L}(X, Y)$ di tutti gli operatori lineari limitati $T : X \rightarrow Y$, si può dimostrare che $\mathcal{L}(X, Y)$ è uno spazio di Banach. Se $X = \mathbb{F}^n$ ed $Y = \mathbb{F}^m$, allora $\mathcal{L}(X, Y)$ coincide con lo spazio delle matrici $m \times n$. Quando $Y = X$, indicheremo $\mathcal{L}(X, X)$ con $\mathcal{L}(X)$.

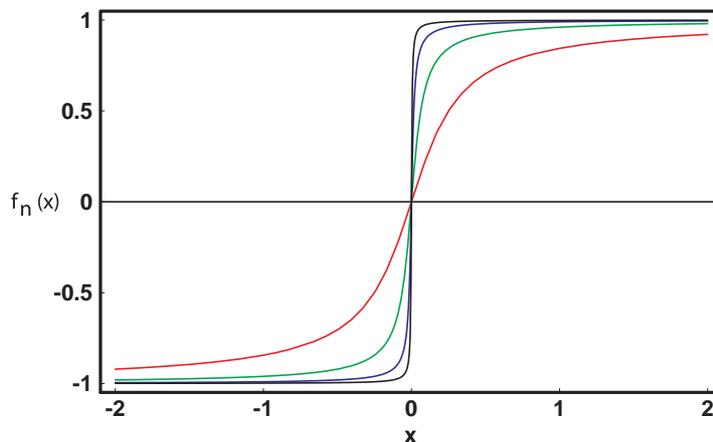


Figura 1.3: La successione (1.16), con $\delta = 1/4$ e per $n = 1$ (linea rossa), 2 (linea verde), 3 (linea blu) e 4 (linea nera).

1.2.5 Spettro di un operatore lineare

Ricordiamo brevemente il concetto di autovalore per le matrici. Data una matrice $A(n \times n)$, reale o complessa, il numero complesso λ si dice autovalore di A se l'equazione $Av = \lambda v$ (equazione agli autovalori) ammette altre soluzioni $v \in \mathbb{F}^n$ oltre a quella banale. Le soluzioni v si chiamano autovettori. Gli autovalori formano un insieme discreto e si trovano risolvendo l'equazione secolare (o caratteristica) $\det(A - \lambda I) = 0$. Una matrice $A(n \times n)$ con elementi in \mathbb{F}^n è un operatore da \mathbb{F}^n ad \mathbb{F}^n . Se λ è un suo autovalore, da quanto appena detto segue che $K(A - \lambda I) \neq \{0\}$, e quindi, da quanto esposto in precedenza a proposito degli operatori invertibili, la matrice $A - \lambda I$ non è invertibile.

Il concetto di *autovalore* si estende in generale agli operatori lineari limitati. Sia X uno spazio di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. L'insieme $\rho(T)$ dei numeri complessi λ tali che l'operatore $T - \lambda I$ è invertibile si chiama *risolvente* di T , mentre il suo complemento nel piano complesso $\sigma(T) = \mathbb{C}/\rho(T)$ si chiama *spettro* di T . Si può dimostrare che $\sigma(T)$ è un insieme chiuso e limitato (quindi il risolvente è aperto ed illimitato). Come nel caso delle matrici, il numero complesso λ si dice autovalore di T se esiste $x \in X$, con $x \neq 0$, tale che $Tx = \lambda x$. Quindi, gli autovalori di T formano un sottoinsieme dello spettro $\sigma(T)$, che si indica con $\sigma_p(T)$ (dall'inglese “*point-spectrum*”). L'insieme $\sigma_c(T) = \sigma(T)/\sigma_p(T)$ si chiama *spettro essenziale*. Si può dimostrare che lo spettro di un operatore lineare limitato non è mai vuoto.

1.2.6 Operatori autoaggiunti ed unitari

Sia ora X uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Siano $x, y \in X$ e si consideri l'operatore T^\dagger definito da

$$(x, Ty) = (T^\dagger x, y).$$

L'operatore T^\dagger si chiama *operatore aggiunto* di T e si può dimostrare che $T^\dagger \in \mathcal{L}(X)$ e $\|T^\dagger\| = \|T\|$. Nel caso delle matrici, ricordiamo che una matrice è autoaggiunta quando è uguale alla sua trasposta coniugata, cioè quando elementi simmetrici sono complessi coniugati (questo implica che gli elementi diagonali sono reali). Ad esempio, la matrice di ordine 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2-3i \\ 1-i & -2 & 1-2i \\ 2+3i & 1+2i & -1 \end{pmatrix}$$

è autoaggiunta. Quindi, una matrice reale è autoaggiunta quando è simmetrica. Valgono inoltre le seguenti proprietà:

- (a) $(\lambda T)^\dagger = \lambda^* T^\dagger$
- (b) $(T + S)^\dagger = T^\dagger + S^\dagger$
- (c) $(TS)^\dagger = S^\dagger T^\dagger$
- (d) $(T^\dagger)^\dagger = T$
- (e) $\sigma(T^\dagger) = \sigma(T)^*$
- (f) $\rho(T^\dagger) = \rho(T)^*$.

Da notare che in (b) e (c) compare la somma e, rispettivamente, il prodotto di due operatori. Affinchè gli operatori somma e prodotto siano ben definiti, devono verificarsi le seguenti condizioni sui domini: $D(T+S) = D(T) \cap D(S)$, quindi la somma è ben definita se l'intersezione dei domini non è vuota. Per quanto riguarda il prodotto TS , deve ovviamente essere $R(S) \subset D(T)$ ed alla fine risulta $D(TS) = D(S)$ e $R(TS) \subset R(T)$. Invitiamo lo studente a dimostrare (a),(b),(c) e (d) per esercizio, mentre (e) ed (f) sono più complicate. Le proprietà (a)-(d) si possono illustrare facilmente con esempi tratti dall'insieme delle matrici.

Sia X uno spazio di Hilbert. Un operatore $T \in \mathcal{L}(X)$ si dice

- *autoaggiunto* se $T^\dagger = T$;
- *unitario* se è invertibile e $T^{-1} = T^\dagger$;
- *normale* se $TT^\dagger = T^\dagger T$.

Notiamo che la classe degli operatori normali contiene sia gli operatori autoaggiunti che quelli unitari.

Ricordiamo che le matrici autoaggiunte hanno sempre autovalori reali e posseggono un insieme ortogonale di autovettori. Vediamo come si estende questo fatto agli operatori, dimostrando un importante teorema.

Teorema 1.2.3 *Sia X uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(X)$ un operatore autoaggiunto. Lo spettro di T è reale, cioè $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ ed, in particolare, tutti gli autovalori di T sono reali. Inoltre, autovettori appartenenti ad autovalori diversi sono ortogonali.*

Dimostrazione. Ci limitiamo a dimostrare la parte riguardante gli autovalori. Poichè T è autoaggiunto, abbiamo $(x, Tx) = (Tx, x) \forall x \in X$. Sia ora $x \in X$ un autovettore di T appartenente all'autovalore λ . Abbiamo: $(x, Tx) = (x, \lambda x) = \lambda^* \|x\|^2$ ed anche $(Tx, x) = (\lambda x, x) = \lambda \|x\|^2$. Ma $\|x\| \neq 0$, e dunque deve essere $\lambda^* = \lambda$. Siano inoltre λ e μ due autovalori con $\lambda \neq \mu$ e siano $x \in X$ ed $y \in X$ due autovettori appartenenti a λ ed a μ rispettivamente. Innanzitutto notiamo che, per l'autoaggiuntezza di T , $(y, Tx) = (Ty, x) = (x, Ty)^*$. Ne segue che $0 = (y, Tx) - (x, Ty)^* = \lambda(y, x) - \mu(x, y)^* = (\lambda - \mu)(y, x)$. Siccome $\lambda - \mu \neq 0$, deve essere $(x, y) = 0$. ■

1.3 Operatori differenziali e problemi al contorno

Introduciamo qui brevemente gli operatori differenziali e discutiamo il problema di Sturm-Liouville.

Data una funzione u di n variabili, definita in una regione $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, si definisce *operatore differenziale lineare* un'applicazione del tipo

$$Lu = F \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots \right),$$

dove F è una funzione nota delle variabili indicate, lineare nella u ed in tutte le sue derivate parziali. Il dominio dell'operatore L dipende dalle richieste che si pongono sulla funzione u ; se, ad esempio, nella funzione F compaiono le derivate di u fino all'ordine n , una possibile scelta per il dominio di L è $D(L) = C^n(\Omega)$. Siccome andremo a studiare solo alcune particolari realizzazioni di operatori differenziali, ci occuperemo del dominio caso per caso.

1.3.1 Problemi al contorno

Nello studio delle EDP ci troveremo spesso a lavorare con un operatore differenziale definito in una regione $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e di dover imporre condizioni aggiuntive, o *condizioni al contorno*, sulla frontiera $\partial\Omega$ di tale regione. Introduciamo pertanto ora un importante primo esempio di operatore differenziale del second'ordine, specificandone il dominio attraverso tali condizioni al contorno.

Sia dunque $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ una regione limitata e sia $\partial\Omega$ la sua frontiera, che supponiamo regolare a tratti. Nel caso unidimensionale, $n = 1$, si ha $\Omega = (a, b)$ e $\partial\Omega = \{a, b\}$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Si supponga infine introdotto in \mathbb{R}^n un insieme di coordinate cartesiane ortogonali (x_1, x_2, \dots, x_n) . Indichiamo con

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

l'*operatore gradiente* nello spazio \mathbb{R}^n e con

$$\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \quad (1.17)$$

l'*operatore di Laplace*. Siano $p(x)$ e $q(x)$ due funzioni reali definite in \mathbb{R}^n tali che:

$$p \in C^1(\bar{\Omega}) \text{ con } p(x) > 0$$

e

$$q \in C(\bar{\Omega}).$$

Definiamo l'operatore differenziale del second'ordine

$$Lu = -\nabla \cdot (p\nabla u) + qu, \quad (1.18)$$

il cui dominio $D(L)$ sia dato dalle funzioni di classe C^2 in Ω e di classe C^1 in $\bar{\Omega}$ (ovvero $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$) e che soddisfano le relazioni

$$\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (1.19)$$

dove α e β sono funzioni non negative e continue definite sulla frontiera $\partial\Omega$ di Ω e non entrambe nulle (quindi $\alpha, \beta \in C(\partial\Omega)$ e $\alpha(x) + \beta(x) > 0$). Abbiamo inoltre indicato con

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \hat{n} \cdot \nabla u$$

la derivata di u lungo la direzione del versore \hat{n} , normale alla superficie $\partial\Omega$ e rivolto verso l'esterno. Nel seguito, indicheremo con $\partial\Omega_0$ quella parte della frontiera dove $\min(\alpha(x), \beta(x)) > 0$. Se indichiamo con

$$D_0(\Omega) = C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$$

abbiamo,

$$D(L) = \{u \in D_0(\Omega) : u \text{ soddisfa (1.19)}\}.$$

Sia inoltre $L^2(\Omega)$ l'immagine di L . Si può dimostrare che $D_0(\Omega)$ è denso nello spazio di Hilbert $L^2(\Omega)$, che è pertanto lo spazio nel quale si studia l'operatore L . Definiamo il prodotto scalare tra due funzioni u e v in $D(L)$ come

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v^*(x)dx,$$

dove l'integrale va inteso nel senso di Lebesgue. Per $u, v \in D(L)$, valgono le *identità di Green*,

$$\int_{\Omega} vLudx = \int_{\Omega} p\nabla v \cdot \nabla u - \int_{\partial\Omega} pv \frac{du}{dn} dS + \int_{\Omega} quvdx \quad (1.20)$$

$$\int_{\Omega} (vLu - uLv)dx = \int_{\partial\Omega} p \left(u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn} \right) dS. \quad (1.21)$$

Dimostrazione. Dimostriamo la (1.20): $\int_{\Omega} vLudx = \int_{\Omega} v[-\nabla \cdot (p\nabla u) + qu] = -\int_{\Omega} \nabla \cdot (pv\nabla u)dx + \int_{\Omega} p\nabla u \cdot \nabla vdx + \int_{\Omega} quvdx = \int_{\Omega} p\nabla u \cdot \nabla vdx - \int_{\partial\Omega} pv\nabla u \cdot ndS + \int_{\Omega} quvdx = \int_{\Omega} p\nabla u \cdot \nabla vdx - \int_{\partial\Omega} pv(du/dn) dS + \int_{\Omega} quvdx$. La (1.21) discende banalmente dalla (1.20) ■

Il prodotto scalare (Lu, u) si chiama *integrale d'energia*. Usando la prima identità di Green (1.20) con $v = u^*$ ed il teorema della divergenza otteniamo la seguente espressione:

$$\begin{aligned} (Lu, u) &= \int_{\Omega} (Lu)u^*dx = \\ &= - \int_{\partial\Omega} pu^*\nabla u \cdot \hat{n}dS + \int_{\Omega} p|\nabla u|^2dx + \int_{\Omega} q|u|^2dx = \\ &= \int_{\partial\Omega_0} \frac{\alpha}{\beta}|u|^2dS + \int_{\Omega} (p|\nabla u|^2 + q|u|^2)dx, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato anche le condizioni al contorno (1.19). Sotto l'ulteriore ipotesi che sia $q(x) \geq 0$, i tre termini di (Lu, u) sono non negativi, per cui abbiamo $(Lu, u) \geq 0$. Inoltre vale la maggiorazione

$$(Lu, u) \geq p_0\|\nabla u\|_2^2 \quad (1.22)$$

ottenuta eliminando il primo ed il terzo termine e dove $p_0 = \min_{x \in \Omega} p(x) > 0$.

Consideriamo ora il problema agli autovalori per l'operatore L :

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (p\nabla u) + qu &= \lambda u \\ \left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned} \quad (1.23)$$

che si intende posto in $L_2(\Omega)$. Sono importanti i seguenti due casi particolari:

$$\alpha(x) \equiv 1, \quad \beta(x) \equiv 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \quad \text{detto } \textit{problema di Dirichlet} \quad (1.24)$$

$$\alpha(x) \equiv 0, \quad \beta(x) \equiv 1 \quad \forall x \in \partial\Omega \quad \text{detto } \textit{problema di Neumann}. \quad (1.25)$$

Proposizione 1.3.1 *L'operatore L è autoaggiunto, cioè*

$$(u, Lv) = (Lu, v)$$

$\forall u, v \in D(L)$. Inoltre, se $q(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$, condizione necessaria e sufficiente affinché $\lambda = 0$ sia un autovalore, è che $q(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$ ed $\alpha(x) = 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega}$.

Dimostrazione. Per la (1.21) si ha

$$(u, Lv) - (Lu, v) = \int_{\Omega} (u(Lv)^* - v^*Lu)dx = \int_{\partial\Omega} p \left(v^* \frac{du}{dn} - u \frac{dv^*}{dn} \right) dS$$

ed inoltre u e v^* soddisfano le condizioni al contorno (1.19):

$$\begin{aligned} \left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{\partial\Omega} &= 0 \\ \left(\alpha v^* + \beta \frac{\partial v^*}{\partial n} \right) \Big|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

Queste si possono riguardare come un sistema omogeneo di due equazioni algebriche nelle due incognite $\alpha(x)$ e $\beta(x)$, per $x \in \partial\Omega$. Siccome per ipotesi $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ non sono entrambe nulle, il sistema ammette soluzioni non triviali e quindi il determinante della matrice dei coefficienti deve essere nullo, cioè

$$\det \begin{pmatrix} u & \partial u / \partial n \\ v^* & \partial v^* / \partial n \end{pmatrix} = \left(u \frac{dv^*}{dn} - v^* \frac{du}{dn} \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Da questo segue che $(u, Lv) - (Lu, v) = 0$ e quindi L è autoaggiunto. Infine, se $\lambda = 0$ è autovalore, deve esistere $f \in D(T)$, con $f \neq 0$ ed $Lf = 0$. Dalla (1.22) segue allora che $\nabla f = 0$, cioè f è costante. Allora, se $\alpha(x) \equiv 0$ e $q(x) \equiv 0$ si ha anche $(Lf, f) = 0$ ed $f = \text{costante}$ è autofunzione. Viceversa, se $f = \text{costante}$ è autofunzione, $(Lf, f) = 0$ che implica $\alpha(x) \equiv 0$ e $q(x) \equiv 0$ necessariamente. ■

L'operatore L dunque possiede autovalori reali ed un insieme completo di autofunzioni ortonormali. Siccome il prodotto scalare con cui abbiamo lavorato è definito in $L_2(\Omega)$, queste autofunzioni potrebbero, a seconda dei casi, non appartenere al dominio $D(T)$ ma al suo complemento $L^2(\Omega) \setminus D(T)$.

Nel caso unidimensionale, il problema agli autovalori (1.24) per l'operatore L viene detto *problema di Sturm-Liouville*:

$$-\frac{d}{dx} \left(p \frac{du}{dx} \right) + qu = \lambda u \quad (1.26)$$

$$\alpha_1 u(a) - \beta_1 \frac{du}{dx}(a) = 0, \quad (1.27)$$

$$\alpha_2 u(b) + \beta_2 \frac{du}{dx}(b) = 0 \quad (1.28)$$

dove $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ sono costanti reali non negative con $\alpha_1 + \beta_1 > 0$ e $\alpha_2 + \beta_2 > 0$. Le autofunzioni di un problema di Sturm-Liouville formano un insieme ortonormale completo nello spazio di Hilbert $L^2(a, b)$ e qualunque funzione $f \in L^2(a, b)$ può essere sviluppata in serie di tali autofunzioni. Se indichiamo, in generale, con $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ le autofunzioni, abbiamo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x) \quad (1.29)$$

con $c_n = (f, \phi_n)$. Risolveremo ora alcuni casi particolari del problema di Sturm-Liouville, determinandone autovalori ed autofunzioni che saranno poi usati nelle tecniche risolutive delle equazioni differenziali alle derivate parziali.

1.3.2 Esempi

Esempio 1.3.1 (Condizioni di Dirichlet) Esaminiamo il problema

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \lambda u = 0 \quad (1.30)$$

con le condizioni al contorno (di Dirichlet) $u(0) = u(L) = 0$. Questo problema si ottiene dalle equazioni generali ponendo

- $p(x) \equiv 1, q(x) \equiv 0$;
- $a = 0, b = L$;
- $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$;
- $\beta_1 = \beta_2 = 0$.

Posto $\lambda = k^2$, la soluzione generale è

$$u(x) = A \sin kx + B \cos kx.$$

La condizione al contorno in $x = 0$ dà immediatamente $B = 0$, e quindi $u(x) = A \sin kx$. La condizione al contorno in $x = L$ impone invece $\sin kL = 0$, ovvero $kL = n\pi$. Il parametro k può dunque assumere soltanto un insieme discreto di valori,

$$k = k_n = \frac{n\pi}{L} \quad (1.31)$$

per $n = 1, 2, \dots$. In corrispondenza a ciascun valore di n si ha dunque l'autofunzione

$$\phi_n(x) = A_n \sin k_n x = A_n \sin n\pi \frac{x}{L}. \quad (1.32)$$

È facile constatare che autofunzioni appartenenti ad autovalori diversi sono ortogonali, in quanto

$$(\phi_n, \phi_m) = \int_0^L \phi_n(x) \phi_m(x) dx = A_n A_m^* \int_0^L \sin n\pi \frac{x}{L} \sin m\pi \frac{x}{L} dx = 0$$

La costante A_n dovrebbe venir determinata dalla condizione di normalizzazione $\|\phi_n\| = 1$. Tuttavia, come vedremo nelle applicazioni successive, nulla osta a prendere $A_n = 1$ per comodità, rinunciando alla normalizzazione. Da notare che per $n = 0$ si avrebbe solo la soluzione banale $u(x) \equiv 0$ e quindi $\lambda = 0$ non è un autovalore. Questo fatto può essere visto anche dalla Proposizione 1.3.1, dato che $\alpha(x) \neq 0$ per $x \in \partial\Omega$.

Esempio 1.3.2 (Condizioni di Neumann) Consideriamo ancora l'equazione agli autovalori

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \lambda u = 0 \quad (1.33)$$

questa volta con le condizioni al contorno (di Neumann) $du/dx(0) = du/dx(L) = 0$, che corrisponde alla scelta $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e $\beta_1 = \beta_2 = 1$. Dalla Proposizione 1.3.1, si vede subito che in questo caso $\lambda = 0$ è un autovalore, con autofunzione $u_0(x) = B_0$, dove B_0 è una costante reale non nulla. Posto $\lambda = k^2$, la soluzione generale è

$$u(x) = A \sin kx + B \cos kx$$

come nell'esempio precedente. Abbiamo inoltre

$$\frac{du}{dx} = A \cos kx - B \sin kx,$$

per cui la condizione al contorno in $x = 0$ dà $A = 0$, e quindi $u(x) = B \cos kx$. La condizione al contorno in $x = L$ impone nuovamente $\sin kL = 0$, ovvero $kL = n\pi$. Abbiamo dunque

$$k = k_n = \frac{n\pi}{L}$$

per $n = 0, 1, 2, \dots$ ed in corrispondenza a ciascun valore di n si ha l'autofunzione

$$\phi_n(x) = \cos k_n x = \cos n\pi \frac{x}{L}. \quad (1.34)$$

Esempio 1.3.3 (Condizioni miste - I) Consideriamo ora un ulteriore esempio con condizioni al contorno miste:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \lambda u = 0 \quad (1.35)$$

con $u(0) = 0$ e $\alpha u(L) + \beta du/dx(L) = 0$ con α e β costanti reali positive. Posto nuovamente $\lambda = k^2$, la soluzione generale è la stessa degli esempi precedenti ed assieme alla condizione in $x = 0$ dà come soluzione $u(x) = A \sin kx$. La condizione al contorno in $x = L$ diventa invece $\alpha \sin kL + \beta k \cos kL = 0$, ovvero

$$\tan kL = -kL \frac{\beta}{\alpha L} \quad (1.36)$$

che è un'equazione trascendente nell'incognita $\xi = kL$. Tale equazione va risolta numericamente o graficamente. Nella figura (1.4) riportiamo il grafico

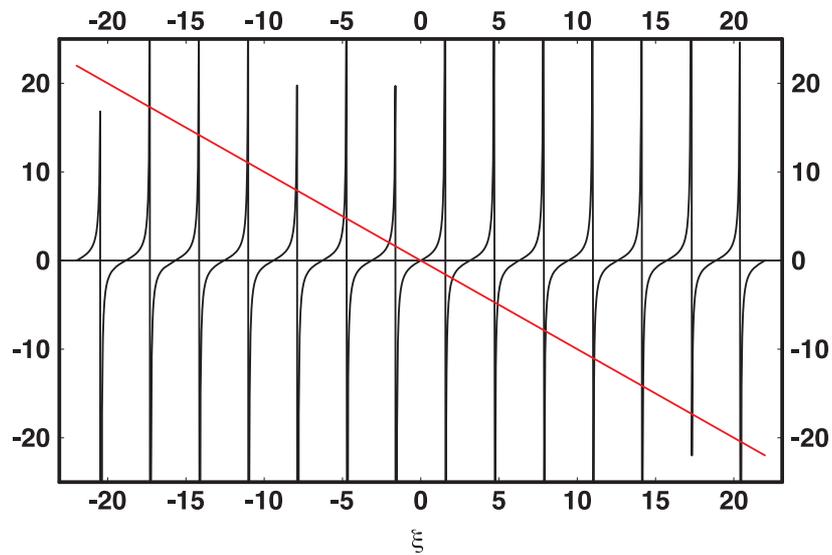


Figura 1.4: Soluzione grafica dell'equazione (1.36) con $\beta/(\alpha L) = 1$ per gli autovalori ξ_n .

dei due membri dell'equazione nel caso $\beta/(\alpha L) = 1$ e nella successiva tabella riportiamo i primi dieci autovalori ξ_n . Da notare che $\xi_n = 0$ non è autovalore.

Autovalore	Valore numerico
ξ_1	2.02876
ξ_2	4.91318
ξ_3	7.97867
ξ_4	11.0855
ξ_5	14.2074
ξ_6	17.3364
ξ_7	20.4692
ξ_8	23.6043
ξ_9	26.7409
ξ_{10}	29.8786

Esempio 1.3.4 (Condizioni miste - II) Sia ora

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \lambda u = 0 \quad (1.37)$$

con $du/dx(0) = u(L) = 0$ il problema agli autovalori. La soluzione generale è la stessa degli esempi precedenti ed assieme alla condizione in $x = 0$ dà come soluzione $u(x) = B \cos kx$. La condizione al contorno in $x = L$ impone $\cos kL = 0$, ovvero $kL = (2n + 1)\pi/2$. Abbiamo dunque

$$k = k_n = \frac{(2n + 1)\pi}{2L} \quad (1.38)$$

per $n = 0, 1, 2, \dots$ ed in corrispondenza a ciascun valore di n si ha l'autofunzione

$$\phi_n(x) = \cos k_n x = \cos(2n + 1)\pi \frac{x}{2L}. \quad (1.39)$$

1.4 Trasformate di Fourier

La trasformata di Fourier (FT) fornisce uno dei metodi più potenti ed efficaci di risoluzione delle equazioni differenziali lineari. In questa sezione introduciamo le definizioni e le proprietà fondamentali delle FT. Ci limiteremo a definire le FT in una dimensione, cioè di funzioni definite su \mathbb{R} . La generalizzazione multidimensionale, per funzioni definite su \mathbb{R}^n , è semplice e comporta solo qualche modifica nella notazione.

1.4.1 Introduzione

Sia $f(x)$ una funzione periodica di periodo T definita in \mathbb{R} . Consideriamo l'intervallo $[-T/2, T/2]$ come l'intervallo fondamentale. Abbiamo visto nell'esempio (1.2.13) che tale funzione è sviluppabile nella serie di Fourier

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \phi_n(x).$$

dove

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{in2\pi x/T}$$

e

$$c_n = (f, \phi_n) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in2\pi x/T} dx.$$

Viene naturale di chiedersi cosa succede se la funzione f non è periodica. Ovviamente, essa non sarà più rappresentabile con la serie di Fourier scritta

sopra, che avrà bisogno di essere modificata. Il modo più naturale di procedere è quello di spingere il periodo T all'infinito, cioè di considerare il limite $T \rightarrow \infty$.

Per iniziare, riscriviamo l'espressione per i coefficienti c_n al modo seguente:

$$c(k_n) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-ik_n x} dx$$

dove abbiamo introdotto la variabile, per ora discreta,

$$k_n = \frac{2\pi}{T} n \equiv n \Delta k$$

con $\Delta k = 2\pi/T$. Al limite per $T \rightarrow \infty$ abbiamo $\Delta k \rightarrow 0$ così che la variabile k_n diventa una variabile continua k (vedi figura 1.5). Con questa notazione scriviamo ora:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(k_n) \frac{1}{\sqrt{T}} e^{ik_n x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^{T/2} f(y) e^{-ik_n y} dy \right] e^{ik_n x} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} f(y) e^{-ik_n y} dy \right] e^{ik_n x} \frac{\Delta k}{2\pi} \end{aligned}$$

Al limite per $T \rightarrow \infty$, o $\Delta k \rightarrow 0$, l'ultima sommatoria diventa un integrale ed abbiamo

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iky} dy \right] e^{ikx} dk.$$

Si definisce allora la *trasformata di Fourier* della funzione f

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx, \quad (1.40)$$

assieme alla sua *trasformata inversa* o *antitrasformata di Fourier*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk, \quad (1.41)$$

che discuteremo in maggior dettaglio nella sezione (1.4.3).

1.4.2 La delta di Dirac

Per introdurre la delta di Dirac in modo rigoroso si deve far ricorso alla teoria delle distribuzioni, che esula però dagli scopi di questo corso. Introduciamo pertanto la delta di Dirac in modo euristico, come limite di successioni e tramite le sue proprietà. Le applicazioni della delta di Dirac sono moltissime e fanno uso soltanto di alcune delle sue proprietà fondamentali. Riteniamo pertanto

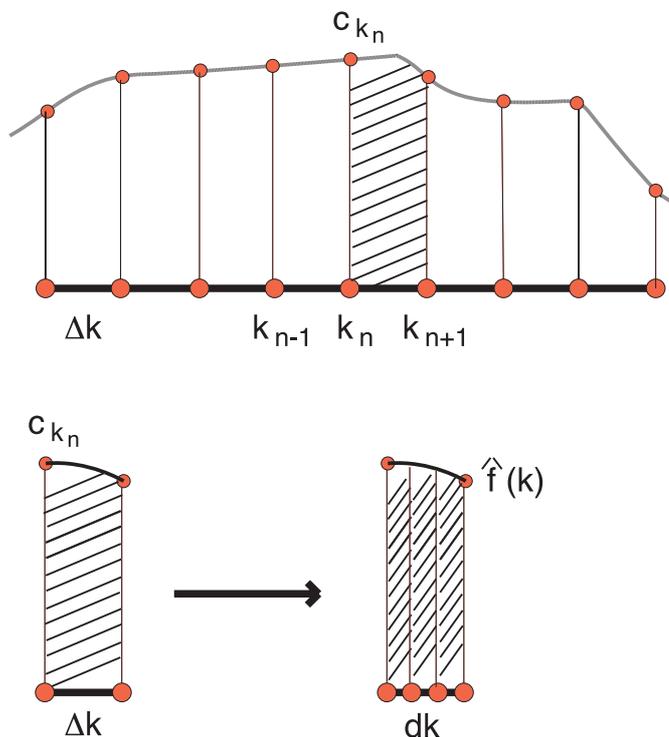


Figura 1.5: Passaggio al limite dalla serie alla trasformata di Fourier.

giustificato impiegare la delta di Dirac con le sue proprietà senza darne la derivazione rigorosa in termini di distribuzioni.

Indichiamo con $C_0(\mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni continue ed aventi supporto compatto $K \subset \mathbb{R}$. Nel seguito, supporremo sempre che il supporto delle funzioni che consideriamo contenga il punto $x = 0$. Consideriamo una successione di funzioni continue $\{\delta_n\}_{n=0}^{\infty}$, con $\delta_n(x) \in C(\mathbb{R})$ oppure $\delta_n(x) \in C_0(\mathbb{R})$, ed una funzione qualsiasi $f \in C_0(\mathbb{R})$ tali che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) dx = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x) = 0, \text{ per } x \neq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta_n(x) dx = f(0)$$

ed indichiamo con $\delta(x)$ il limite di tale successione. Ovviamente, questo oggetto non appartiene allo spazio $C(\mathbb{R})$, né a qualunque degli spazi L^p introdotti in precedenza. La funzione $\delta(x)$ viene chiamata *delta di Dirac*. Simbolicamente, essa viene pure definita dalle sue proprietà fondamentali:

$$\delta(x) = 0, \text{ per } x \neq 0 \tag{1.42}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0) \quad (1.43)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1, \quad (1.44)$$

dove adesso è sufficiente che $f \in C(\mathbb{R})$. La scelta $f \in C_0(\mathbb{R})$ fatta nel definire la funzione delta tramite le successioni era per garantire la convergenza degli integrali, mentre gli elementi δ_n della successione possono essere scelti a supporto compatto oppure no.

Esempi di successioni che soddisfano a queste proprietà e che definiscono la delta di Dirac sono molti. Ne citiamo i più noti:

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 0, & x < -1/2n \\ n, & -1/2n < x < 1/2n \\ 0, & x > 1/2n \end{cases} \quad (1.45)$$

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2} \quad (1.46)$$

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi} \frac{1}{1 + n^2 x^2} \quad (1.47)$$

$$\delta_n(x) = \frac{\sin nx}{\pi x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n e^{ixt} dt \quad (1.48)$$

Le funzioni della prima di queste successioni hanno supporto compatto, le altre no. Invitiamo lo studente a verificare per esteso che queste successioni soddisfano le richieste poste in precedenza. Le successioni (1.45), (1.46) e (1.48) sono mostrate in figura 1.6, per (A) $n = 1, 2, 3, 4$, (B,C) $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

La delta di Dirac ammette una importante rappresentazione integrale:

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk \quad (1.49)$$

che si può ricavare semplicemente dalla successione (1.48) al limite per $n \rightarrow \infty$.

Anche le derivate della delta di Dirac hanno un significato, sempre sotto integrazione previo moltiplicazione per funzioni continue e derivabili. Dimostriamo che

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)dx = -f'(0)$$

e, più in generale,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta^m(x)dx = (-1)^m f^{(m)}(0)$$

dove si suppone $f \in C^m(\mathbb{R})$. Infatti, integrando per parti, si trova

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)dx = [f(x)\delta(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x)dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x)dx$$

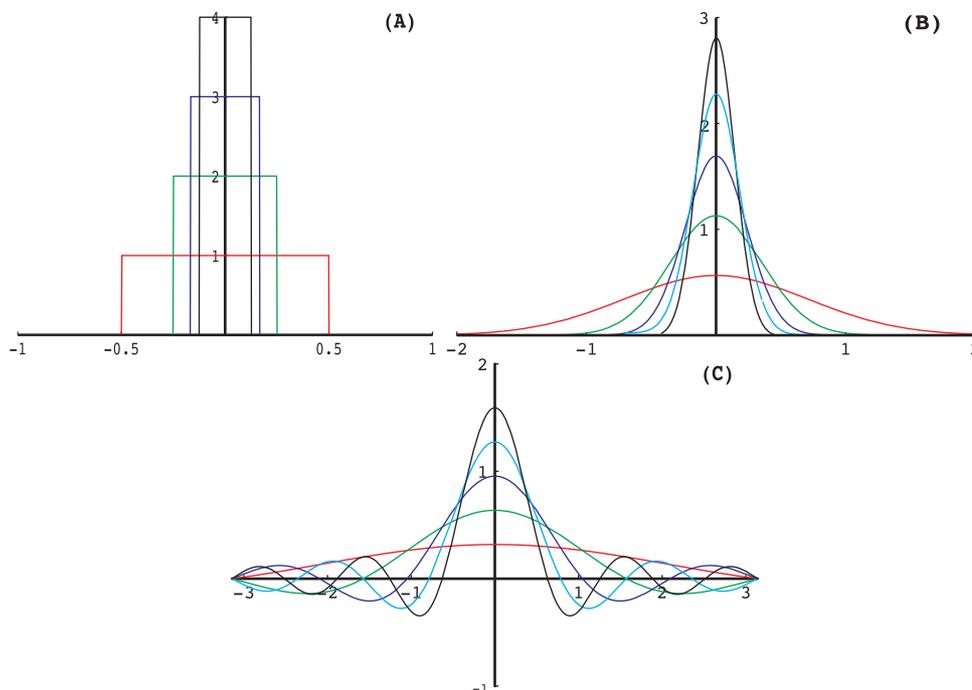


Figura 1.6: Le successioni (A) (1.45), (B) (1.46) e (C) (1.48) che definiscono la delta di Dirac.

che dà la relazione per la derivata prima. Abbiamo supposto che il prodotto $f(x)\delta(x)$ si annulli all'infinito. Integrando per parti m volte si ottiene la relazioni per la derivata di ordine m . L'integrazione per parti di un oggetto come la $\delta(x)$, a rigore, non si potrebbe fare. Per rendere la cosa rigorosa, andrebbe considerato il limite degli integrali sulle derivate delle successioni definite sopra, oppure usare la teoria delle distribuzioni.

Le proprietà (1.42)-(1.44) si generalizzano anche al caso in cui la δ sia centrata in $x = x_0$, dove $x_0 \in \mathbb{R}$, invece che in $x = 0$:

$$\begin{aligned} \delta(x) &= 0, \text{ per } x \neq x_0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx &= f(x_0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)dx &= 1. \end{aligned}$$

Noi useremo spesso la delta di Dirac come se fosse una normale funzione. Va comunque tenuto presente che essa ha significato solo quando la si integra previo moltiplicazione per una funzione continua.

Un altro modo di definire la delta di Dirac è di pensarla come un operatore, che agisce sullo spazio $C(\mathbb{R})$ ed assegna ad una funzione il valore nel punto x_0 :

$\mathcal{L}_{x_0} : C(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\mathcal{L}_{x_0} f \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0).$$

1.4.3 Trasformate di Fourier negli spazi L^1 ed L^2

Nella sezione (1.4.1) abbiamo definito la trasformata di Fourier della funzione f come l'integrale

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

e la sua antitrasformata come

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx} dx.$$

Ci dobbiamo chiedere sotto quali condizioni questi integrali esistono. Vediamo innanzitutto che, se $f \in L^1(\mathbb{R})$

$$|\widehat{f}(k)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

e quindi $|\widehat{f}(k)| \leq \|f\|_1$. L'integrale (1.40) definisce in realtà un operatore F tale che $(Ff)(k) = \widehat{f}(k)$. Con $f \in L^1(\mathbb{R})$ si può dimostrare che \widehat{f} è una funzione continua per $k \in \mathbb{R}$ e che $\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{f}(k) = 0$.

Definiamo la *convoluzione* o *prodotto convolutivo* $f * g$ di due funzioni $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ come

$$(f * g)(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x - y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y) g(y) dy. \quad (1.50)$$

È facile verificare che

$$\begin{aligned} (f * g) &= (g * f) \\ (f * g) * h &= f * (g * h). \end{aligned}$$

Operando con la trasformata di Fourier sulla convoluzione, si perviene al seguente

Teorema 1.4.1 *Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Si ha allora che $F(f * g) = \sqrt{2\pi} F(f) F(g)$.*

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} F(f * g)(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy \right] e^{-ikx} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(z)dy \right] e^{-ik(y+z)} dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iky} dy \int_{-\infty}^{\infty} g(z)e^{-ikz} dz = \sqrt{2\pi} F(f)F(g)(k). \end{aligned}$$

■

Finora abbiamo considerato la trasformata di Fourier di funzioni definite in $L^1(\mathbb{R})$. È importante estendere il dominio anche alle funzioni nello spazio $L^2(\mathbb{R})$. Vale il seguente *teorema di Plancherel*:

Teorema 1.4.2 *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Abbiamo*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 dk$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f^*(x)dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx} dk \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}^*(k')e^{-ik'x} dk' \right] dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\widehat{f}^*(k') \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x} dx \right] dk dk' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\widehat{f}^*(k')\delta(k-k')dk dk' = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 dk \end{aligned}$$

■

Il teorema di Plancherel mostra che se $f \in L^2(\mathbb{R})$ allora anche $Ff \in L^2(\mathbb{R})$, cioè l'operatore F mappa lo spazio $L^2(\mathbb{R})$ in se stesso. In realtà, il teorema mostra qualcosa in più: mostra che la trasformata di Fourier \widehat{f} di una funzione in $L^2(\mathbb{R})$ ha la stessa norma della funzione f .

1.4.4 Trasformate di Fourier nello spazio di Schwartz

Nella sezione precedente abbiamo definito la trasformata di Fourier negli spazi $L^1(\mathbb{R})$ ed $L^2(\mathbb{R})$. In questi spazi, tuttavia, l'operazione di trasformazione non induce una corrispondenza biunivoca. Esiste invece uno spazio, chiamato *spazio di Schwartz*, nel quale l'operatore F definito dalla trasformata di Fourier

induce una corrispondenza biunivoca. Studiamo ora le proprietà dello spazio di Schwartz e quindi della trasformata di Fourier in tale spazio. Come abbiamo fatto nelle sezioni precedenti, lavoriamo con le funzioni definite su \mathbb{R} , lasciando al lettore la non difficile generalizzazione multidimensionale alle funzioni definite su \mathbb{R}^n .

Lo spazio di Schwartz $S(\mathbb{R})$ è definito come lo spazio vettoriale delle funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, derivabili con continuità infinite volte, per le quali, dati due interi non negativi arbitrari n e p , esiste una costante reale $c_{np} \geq 0$ tale che

$$|x|^p \left| \frac{d^n f}{dx^n} \right| \leq c_{np}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1.51)$$

Si può dimostrare che $S(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R}) \forall p$. Riscrivendo la (1.51) come

$$\left| \frac{d^n f}{dx^n} \right| \leq c_{np} |x|^{-p}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

si capisce che le funzioni dello spazio $S(\mathbb{R})$ e tutte le loro derivate hanno la proprietà di decrescere, in modulo, più rapidamente di qualsiasi potenza di x per $|x| \rightarrow \infty$. Per questo, sono spesso dette *funzioni rapidamente decrescenti*.

Nello spazio $S(\mathbb{R})$ definiamo la trasformata di Fourier F come nell'equazione (1.40)

$$(Ff)(k) = \widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Teorema 1.4.3 *Sia $f \in S(\mathbb{R})$ e sia $\widehat{f} = Ff$. Allora anche $\widehat{f} \in S(\mathbb{R})$. Inoltre, dato un intero non negativo n qualsiasi, si ha che*

$$F(x^n f) = \frac{1}{i^n} \frac{d^n \widehat{f}}{dk^n} \quad (1.52)$$

$$F\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right) = \frac{1}{i^n} k^n \widehat{f}(k) \quad (1.53)$$

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che, se $f \in S(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f}(k) = (Ff)(k)$ è una funzione limitata. Infatti

$$|\widehat{f}(k)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1.$$

per dimostrare che $(Ff) \in S(\mathbb{R})$, dobbiamo dimostrare che $\widehat{f}(k) = (Ff)(k)$ è derivabile infinite volte e che soddisfa la condizione (1.51). Per quanto riguarda la derivabilità abbiamo che

$$\frac{d^n \widehat{f}}{dk^n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (-ix)^n e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) e^{-ikx} dx$$

che esiste per qualunque ordine n poichè $f \in S(\mathbb{R})$. Per dimostrare la (1.51) consideriamo la funzione

$$g(k) \equiv k^q \frac{d^n \widehat{f}}{dk^n}.$$

Dopo banali passaggi, si trova che

$$\begin{aligned} g(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-1)^n (i)^{n+q} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^q}{dx^q} (x^n f(x)) e^{-ikx} dx = \\ &= (-1)^n (i)^{n+q} \left(F \left(\frac{d^q x^n f}{dx^q} \right) \right) (k) \end{aligned}$$

che dimostra che g è una funzione limitata. Questo completa la dimostrazione che $(Ff) \in S(\mathbb{R})$. Per dimostrare (1.52) e (1.53) basta notare che

$$\begin{aligned} \frac{d^n \widehat{f}}{dk^n} &= \frac{d^n}{dk^n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (-ix)^n e^{-ikx} dx = (-i)^n (F(x^n f))(k) \end{aligned}$$

e che

$$\begin{aligned} k^n \widehat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) k^n e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (i)^n \frac{d^n}{dx^n} (e^{-ikx}) dx = \\ &= (i)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{d^n f}{dx^n} e^{-ikx} dx = (-i)^n \left(F \left(\frac{d^n f}{dx^n} \right) \right) (k). \end{aligned}$$

■

Teorema 1.4.4 *La funzione*

$$m(x) = e^{-x^2/2}$$

è nello spazio $S(\mathbb{R})$ e si ha $Fm = m$.

La dimostrazione è semplice e viene lasciata per esercizio.

Teorema 1.4.5 *L'operatore F definito dalla trasformata di Fourier è un'applicazione biunivoca di $S(\mathbb{R})$ in se. Abbiamo*

$$\begin{aligned} (F^{-1} \widehat{f})(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx} dk \\ (Ff)(k) &= (F^{-1} f)(-k) \end{aligned}$$

Dimostrazione. Data una qualsiasi $f \in S(\mathbb{R})$ la sua trasformata appartiene ancora ad $S(\mathbb{R})$, come visto in precedenza. Viceversa, per una qualunque $g \in S(\mathbb{R})$, l'operatore

$$f(k) = (F^{-1}g)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{ikx} dx$$

definisce la funzione f di cui g è la trasformata. È evidente che $(F^{-1}g)(k) = (Fg)(-k)$ ■

1.4.5 Proprietà ed esempi notevoli

In questa sezione presentiamo alcune trasformate di Fourier importanti. Non ci preoccupiamo di stabilire gli spazi da cui le funzioni dei vari esempi provengono.

Esempio 1.4.1 (Derivate) Vedi il teorema (1.4.3).

Esempio 1.4.2 (Trasformata di una funzione reale) Sia $f(x)$ una funzione reale. Si ha allora $\widehat{f}(-k) = \widehat{f}^*(k)$. Inoltre, se la f è reale e simmetrica (antisimmetrica), cioè se $f(x) = f(-x)$ ($f(x) = -f(-x)$), allora \widehat{f} è reale (immaginaria). Queste affermazioni seguono direttamente dalla definizione di \widehat{f} :

$$\widehat{f}(-k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx} dx = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx \right]^* = \widehat{f}^*(k).$$

Le altre dimostrazioni si lasciano per esercizio.

Esempio 1.4.3 (Trasformata di una traslazione) Sia $\widehat{f}(k) = (Ff(x))(k)$. Allora

$$(Ff(x-x_0))(k) = e^{-ikx_0} \widehat{f}(k).$$

Infatti

$$(Ff(x-x_0))(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-x_0)e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ik(x+x_0)} dx = e^{-ikx_0} (Ff(x))(k)$$

È banale verificare che vale anche l'inversa,

$$\widehat{f}(k+k_0) = (F(e^{ik_0x} f(x)))(k).$$

Esempio 1.4.4 (Trasformata di similitudine) Sia $\widehat{f}(k) = (Ff(x))(k)$. Allora

$$(Ff(cx))(k) = \frac{1}{|c|} \widehat{f}\left(\frac{k}{c}\right).$$

Infatti

$$(Ff(cx))(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(cx)e^{-ikx} dx = \frac{1}{|c|} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iky/c} dy$$

Esempio 1.4.5 (Trasformata della funzione gradino) Sia

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } |x| < L/2 \\ 0 & \text{per } |x| > L/2 \end{cases}$$

La trasformata è:

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L/2}^{L/2} e^{-ikx} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin kL/2}{k}$$

Esempio 1.4.6 (Trasformata dell'esponenziale complesso) Sia

$$f(x) = e^{iKx}$$

con $K \in \mathbb{R}$. La trasformata è

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iKx} e^{-ikx} dx = \sqrt{2\pi} \delta(k - K).$$

Esempio 1.4.7 (Funzioni trigonometriche) Sia $f(x) = \sin Kx$ e $g(x) = \cos Kx$ con $K \in \mathbb{R}$. Ricordando le formule di Eulero

$$\begin{aligned} \sin \phi &= \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} \\ \cos \phi &= \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} \end{aligned}$$

e la linearità della trasformata di Fourier abbiamo

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2i} [\delta(k + K) - \delta(k - K)] \\ \widehat{g}(k) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2} [\delta(k + K) + \delta(k - K)]. \end{aligned}$$

Esempio 1.4.8 (Trasformata della delta di Dirac) Sia $f(x) = \delta(x - x_0)$. La trasformata è

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx_0}$$

1.5 Operatori differenziali in coordinate curvilinee ortogonali

1.5.1 Sistemi di coordinate curvilinee ortogonali

Supponiamo di aver introdotto un sistema di coordinate curvilinee ortogonali $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ in \mathbb{R}^3 . Ciascun punto P dello spazio è individuato in modo univoco da una terna di valori (q_1, q_2, q_3) , quindi $P = P(\mathbf{q})$. Se $\mathbf{r} = (x, y, z)$ sono le coordinate cartesiane, abbiamo anche $P = P(\mathbf{r})$. Siano

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3) \\ y = y(q_1, q_2, q_3) \\ z = z(q_1, q_2, q_3) \end{cases}$$

le equazioni di trasformazione tra le coordinate cartesiane e le coordinate curvilinee. In forma compatta, queste si possono scrivere $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{q})$. Sia ora

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s) \end{cases}$$

la rappresentazione parametrica di una curva Γ nello spazio, già parametrizzata con l'ascissa curvilinea. La stessa curva Γ ammette anche la parametrizzazione

$$\begin{cases} q_1 = q_1(s) \\ q_2 = q_2(s) \\ q_3 = q_3(s) \end{cases}$$

Abbiamo inoltre, per il versore tangente \hat{T} alla curva Γ ,

$$\hat{T} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \frac{dq_1}{ds} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \frac{dq_2}{ds} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} \frac{dq_3}{ds} \quad (1.54)$$

Siano $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$ i versori degli assi cartesiani e siano \hat{e}_1, \hat{e}_2 ed \hat{e}_3 i versori delle coordinate curvilinee. Tali versori sono ortogonali, rispettivamente, alle superfici coordinate a q_1 costante, q_2 costante e q_3 costante, e quindi sono proporzionali ai gradienti di tali superfici. Siccome l'equazione di una superficie a q_1 costante, ad esempio, è data da $q_1 - c_1 = 0$, ed analogamente $q_2 - c_2 = 0$ e $q_3 - c_3 = 0$ per le altre due coordinate, avremo

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 &= \frac{\nabla q_1}{|\nabla q_1|} \\ \hat{e}_2 &= \frac{\nabla q_2}{|\nabla q_2|} \\ \hat{e}_3 &= \frac{\nabla q_3}{|\nabla q_3|}. \end{aligned}$$

Questi versori si possono esprimere anche in altro modo. Sia γ_1 la curva coordinata relativa a q_1 , vale a dire, la curva che si ottiene facendo variare la coordinata q_1 e mantenendo le altre due coordinate costanti (nel caso delle coordinate cartesiane, le curve coordinate sono rette parallele agli assi cartesiani). Sia

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s) \end{cases}$$

la rappresentazione parametrica di tale curva. Il versore \hat{e}_1 è il versore tangente alla curva punto per punto, ed è quindi dato da $\hat{e}_1 = d\mathbf{r}/ds$. Utilizzando la (1.54), abbiamo che

$$\hat{e}_1 = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \frac{dq_1}{ds} \equiv \frac{1}{h_1(\mathbf{q})} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1},$$

in quanto, lungo la curva coordinata γ_1 , abbiamo $dq_2/ds = dq_3/ds = 0$. Espressioni analoghe valgono per \hat{e}_2 ed \hat{e}_3 e scriveremo dunque

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 &= \frac{1}{h_1(\mathbf{q})} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \\ \hat{e}_2 &= \frac{1}{h_2(\mathbf{q})} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \\ \hat{e}_3 &= \frac{1}{h_3(\mathbf{q})} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3}. \end{aligned}$$

Le funzioni $h_1(\mathbf{q})$, $h_2(\mathbf{q})$ ed $h_3(\mathbf{q})$ sono dette *fattori di scala* del sistema di coordinate (q_1, q_2, q_3) e lo caratterizzano completamente.

Da ultimo, introduciamo il concetto di *cella coordinata*, illustrato nella figura 1.7. Sia $P = P(\mathbf{q})$ un punto dello spazio, che possiamo anche identificare con le sue coordinate cartesiane \mathbf{r} . Consideriamo una variazione infinitesima delle coordinate, $d\mathbf{q}$, e sia $dP = P(\mathbf{q} + d\mathbf{q}) - P(\mathbf{q})$ il corrispondente spostamento (infinitesimo) del punto P , con $d\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{q} + d\mathbf{q}) - \mathbf{r}(\mathbf{q})$ la corrispondente variazione delle coordinate cartesiane. Abbiamo

$$dP = d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} dq_3 = h_1(\mathbf{q})\hat{e}_1 dq_1 + h_2(\mathbf{q})\hat{e}_2 dq_2 + h_3(\mathbf{q})\hat{e}_3 dq_3.$$

Il volume infinitesimo che ha come facce le tre superfici coordinate passanti per $P(\mathbf{q})$ e le tre passanti per $P(\mathbf{q} + d\mathbf{q})$ si chiama cella coordinata. Il suo volume è, a meno di infinitesimi di ordine superiore, $dV = h_1(\mathbf{q})h_2(\mathbf{q})h_3(\mathbf{q})dq_1dq_2dq_3$. Analogamente, l'area delle facce (a due a due uguali, a meno di infinitesimi di ordine superiore) è $h_1h_2dq_1dq_2$, $h_1h_3dq_1dq_3$ e $h_2h_3dq_2dq_3$.

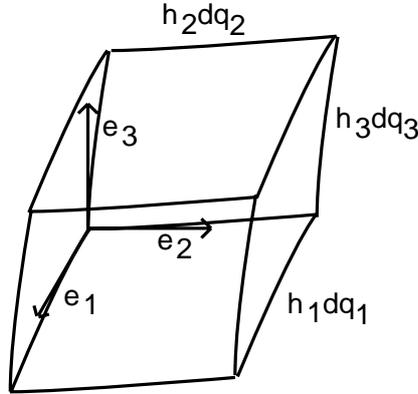


Figura 1.7: Cella coordinata in coordinate curvilinee.

1.5.2 L'operatore gradiente in coordinate curvilinee

Ricordiamo che, in coordinate cartesiane, l'operatore gradiente di una funzione $f(\mathbf{r})$ è definito come

$$\nabla f(\mathbf{r}) = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{k}}.$$

Nel sistema di coordinate curvilinee (q_1, q_2, q_3) esso diventa

$$\nabla f(\mathbf{q}) = F_1(\mathbf{q}) \hat{\mathbf{e}}_1 + F_2(\mathbf{q}) \hat{\mathbf{e}}_2 + F_3(\mathbf{q}) \hat{\mathbf{e}}_3$$

e noi vogliamo determinare le componenti F_1 , F_2 ed F_3 .

Sia ora $f(P) \in C^1(\mathbb{R}^3)$ e sia ∇f il suo gradiente. In seguito alla variazione delle coordinate \mathbf{q} , tale funzione subisce pure una variazione df data da

$$df = \frac{\partial f}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial f}{\partial q_3} dq_3.$$

Questa variazione può però anche essere espressa da

$$df = \nabla f \cdot dP = h_1(\mathbf{q}) F_1(\mathbf{q}) dq_1 + h_2(\mathbf{q}) F_2(\mathbf{q}) dq_2 + h_3(\mathbf{q}) F_3(\mathbf{q}) dq_3.$$

Uguagliando i coefficienti dei differenziali dq_1 , dq_2 e dq_3 otteniamo

$$\nabla f = \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \hat{\mathbf{e}}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \hat{\mathbf{e}}_3, \quad (1.55)$$

che è la risposta cercata.

1.5.3 L'operatore divergenza in coordinate curvilinee

Sia ora $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = V_x(\mathbf{r})\hat{\mathbf{i}} + V_y(\mathbf{r})\hat{\mathbf{j}} + V_z(\mathbf{r})\hat{\mathbf{k}}$ un campo vettoriale definito in \mathbb{R}^3 e le funzioni V_x , V_y e V_z siano ivi di classe C^1 . Ricordiamo che, in coordinate cartesiane, l'operatore divergenza è dato da

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}.$$

Vogliamo determinarne l'espressione in coordinate curvilinee. A tale scopo sfruttiamo il teorema della divergenza,

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{V} dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS, \quad (1.56)$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ è un dominio chiuso e regolare e $\partial\Omega$ è la sua frontiera. Inoltre, $\hat{\mathbf{n}}$ è la normale esterna alla frontiera $\partial\Omega$ in ogni suo punto. Applichiamo il teorema della divergenza ad un cella coordinata, che però questa volta pensiamo centrata nel punto \mathbf{q} . Consideriamo dapprima le due facce coordinate a q_1 costante. Il contributo di queste due facce al flusso totale (il membro di destra della (1.56)) è, a meno di infinitesimi di ordine superiore,

$$\begin{aligned} & V_1(q_1 + dq_1/2, q_2, q_3)h_2(q_1 + dq_1/2, q_2, q_3)h_3(q_1 + dq_1/2, q_2, q_3)dq_2dq_3 \\ & - V_1(q_1 - dq_1/2, q_2, q_3)h_2(q_1 - dq_1/2, q_2, q_3)h_3(q_1 - dq_1/2, q_2, q_3)dq_2dq_3 \\ & = [V_1(q_1 + dq_1/2, q_2, q_3)h_2(q_1 + dq_1/2, q_2, q_3)h_3(q_1 + dq_1/2, q_2, q_3) \\ & - V_1(q_1 - dq_1/2, q_2, q_3)h_2(q_1 - dq_1/2, q_2, q_3)h_3(q_1 - dq_1/2, q_2, q_3)] dq_2dq_3 \\ & = \frac{\partial(h_2h_3V_1)}{\partial q_1} dq_1dq_2dq_3 \end{aligned}$$

Il contributo delle altre due coppie di facce è ovviamente analogo, con gli opportuni scambi di coordinate, per cui abbiamo, sempre a meno di infinitesimi di ordine superiore,

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{\partial(h_2h_3V_1)}{\partial q_1} dq_1dq_2dq_3 + \frac{\partial(h_1h_3V_2)}{\partial q_2} dq_1dq_2dq_3 + \frac{\partial(h_1h_2V_3)}{\partial q_3} dq_1dq_2dq_3.$$

Il membro di sinistra della (1.56) è semplicemente (a meno di infinitesimi di ordine superiore)

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{V} dV = (\nabla \cdot \mathbf{V}) h_1(\mathbf{q})h_2(\mathbf{q})h_3(\mathbf{q}) dq_1dq_2dq_3$$

da cui, uguagliando le due espressioni, otteniamo

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{h_1h_2h_3} \left[\frac{\partial(h_2h_3V_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(h_1h_3V_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(h_1h_2V_3)}{\partial q_3} \right]. \quad (1.57)$$

1.5.4 Il rotore in coordinate curvilinee

Sia $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = V_x(\mathbf{r})\hat{\mathbf{i}} + V_y(\mathbf{r})\hat{\mathbf{j}} + V_z(\mathbf{r})\hat{\mathbf{k}}$ un campo vettoriale definito come nella sezione precedente. Ricordiamo che, in coordinate cartesiane, il rotore di questo campo è dato da

$$\nabla \times \mathbf{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}}.$$

Vogliamo determinarne l'espressione in coordinate curvilinee,

$$\nabla \times \mathbf{V} = R_1(\mathbf{q})\hat{\mathbf{e}}_1 + R_2(\mathbf{q})\hat{\mathbf{e}}_2 + R_3(\mathbf{q})\hat{\mathbf{e}}_3.$$

A tale scopo sfruttiamo il teorema di Stokes nel piano,

$$\int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{\partial\Omega} \mathbf{V} \cdot dP, \quad (1.58)$$

dove Ω è un dominio chiuso e limitato nel piano, $\hat{\mathbf{n}}$ la normale ad Ω e $\partial\Omega$ la sua frontiera (che è una curva chiusa). L'orientazione di $\hat{\mathbf{n}}$ e di $\partial\Omega$ è tale che un osservatore disposto lungo $\hat{\mathbf{n}}$ e ad esso concorde¹ vede la curva percorsa in senso antiorario.

Consideriamo dapprima una superficie elementare appartenente alla superficie coordinata a q_3 costante, centrata nel punto di coordinate $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ e delimitata dalle curve coordinate a q_1 costante ed a q_2 costante, ottenute incrementando rispettivamente q_1 e q_2 di $\pm dq_1/2$ e $\pm dq_2/2$. Sia inoltre l'orientazione tale che $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{e}}_3$. Il contributo di questa faccia al membro di destra è, a meno di infinitesimi di ordine superiore,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \mathbf{V} \cdot dP &= [V_1(q_1, q_2 - dq_2/2, q_3)h_1(q_1, q_2 - dq_2/2, q_3) \\ &\quad - V_1(q_1, q_2 + dq_2/2, q_3)h_1(q_1, q_2 + dq_2/2, q_3)] dq_1 \\ &\quad + [V_2(q_1 + dq_1/2, q_2, q_3)h_2(q_1 + dq_1/2, q_2, q_3) \\ &\quad - V_2(q_1 - dq_1/2, q_2, q_3)h_2(q_1 - dq_1/2, q_2, q_3)] dq_2 \\ &= \left[\frac{\partial(h_2 V_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(h_1 V_1)}{\partial q_2} \right] dq_1 dq_2, \end{aligned}$$

mentre il contributo al membro di sinistra, a meno di infinitesimi di ordine superiore, è dato da

$$(\nabla \times \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{e}}_3) h_1 h_2 dq_1 dq_2 = R_3 h_1 h_2 dq_1 dq_2.$$

¹Cioè con il verso dai piedi alla testa concorde col verso di $\hat{\mathbf{n}}$

Uguagliando e dividendo per $h_1 h_2 dq_1 dq_2$ otteniamo

$$R_3 = \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial(h_2 V_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(h_1 V_1)}{\partial q_2} \right).$$

Procedendo in modo analogo per le altre componenti, otteniamo per il rotore in coordinate curvilinee

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{V} = & \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \times \\ & \left\{ h_1 \left[\frac{\partial(h_3 V_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(h_2 V_2)}{\partial q_3} \right] \widehat{e}_1 + h_2 \left[\frac{\partial(h_1 V_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(h_3 V_3)}{\partial q_1} \right] \widehat{e}_2 \right. \\ & \left. + h_3 \left[\frac{\partial(h_2 V_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(h_1 V_1)}{\partial q_2} \right] \widehat{e}_3 \right\}. \end{aligned} \quad (1.59)$$

1.5.5 Il Laplaciano in coordinate curvilinee

Da ultimo, determiniamo l'espressione del laplaciano di una funzione $f(P) \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Ricordiamo la definizione di Laplaciano

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f$$

che, in coordinate cartesiane, diventa

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Usando le espressioni (1.57) e (1.55) per la divergenza ed il gradiente in coordinate curvilinee, otteniamo

$$\Delta f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \right) \right]. \quad (1.60)$$

1.5.6 Coordinate ortogonali notevoli

Vogliamo ora applicare le espressioni generali degli operatori differenziali in coordinate curvilinee ortogonali ai casi particolari delle coordinate cartesiane, polari sferiche e cilindriche. Per ciascuno di questi insiemi di coordinate ricaveremo le funzioni h_1 , h_2 ed h_3 dall'elemento di volume.

Esempio 1.5.1 (Coordinate Cartesiane) Siano $q_1 = x$, $q_2 = y$ e $q_3 = z$ le solite coordinate cartesiane nello spazio. La cella coordinata è un cubo di lati dx , dy e dz , per cui $h_1 = h_2 = h_3 = 1$ e le espressioni usuali di gradiente, rotore, divergenza e Laplaciano in coordinate cartesiane seguono banalmente.

Esempio 1.5.2 (Coordinate polari sferiche) In questo caso abbiamo $q_1 = r$, $q_2 = \theta$ e $q_3 = \varphi$. Le equazioni di trasformazione con le coordinate cartesiane sono

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

L'asse z è detto asse polare. La figura 1.8 mostra le superfici e le curve

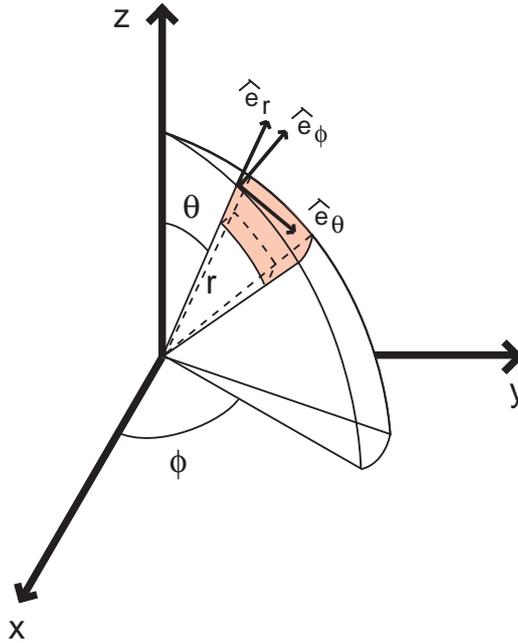


Figura 1.8: Il sistema di coordinate polari sferiche.

coordinate, i versori \hat{e}_r , \hat{e}_θ e \hat{e}_φ e l'elemento di volume. Le superfici ad r costante sono superfici sferiche con centro l'origine, le superfici a θ costante sono superfici coniche con vertice nell'origine, le superfici a φ costante sono piani passanti per l'asse polare. Le curve coordinate sono: semirette uscenti dall'origine (r), circonferenze con centro l'origine (θ), e circonferenze con centro un punto dell'asse polare (φ). L'elemento di volume ha per lati dr , $r d\theta$ e $r \sin \theta d\varphi$, da cui ricaviamo $h_r = 1$, $h_\theta = r$ ed $h_\varphi = r \sin \theta$. Gli operatori differenziali in coordinate polari sferiche sono pertanto

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi \quad (1.61)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \quad (1.62)$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (V_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} \right] \hat{e}_r$$

$$+ \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r V_\varphi) \right] \hat{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] \hat{e}_\varphi \quad (1.63)$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad (1.64)$$

Esempio 1.5.3 (Coordinate cilindriche) In questo caso abbiamo $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$ e $q_3 = z$. Le equazioni di trasformazione con le coordinate cartesiane sono

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

La figura 1.9 mostra le superfici e le curve coordinate, i vettori \hat{e}_r , \hat{e}_φ e \hat{e}_z e

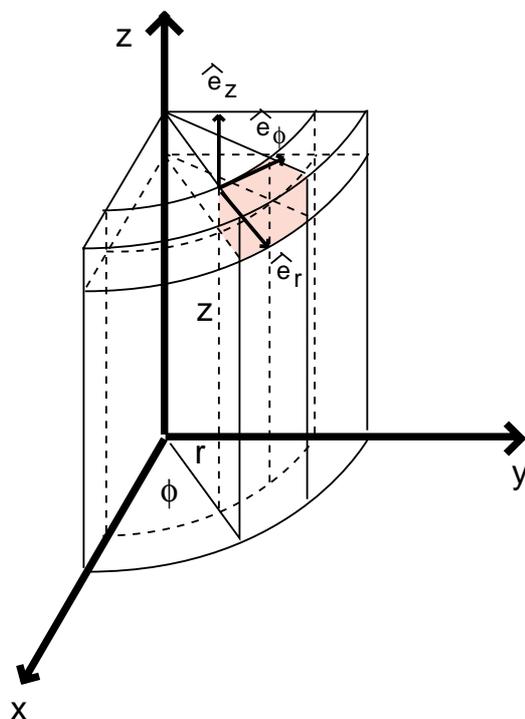


Figura 1.9: Il sistema di coordinate cilindriche.

l'elemento di volume. Le superfici ad r costante sono superfici cilindriche con l'asse z come asse di simmetria, le superfici a φ costante sono piani passanti per l'asse z , le superfici a z costante sono piani ortogonali all'asse z . Le curve coordinate sono: semirette con l'origine sull'asse z e ad esso perpendicolari (r), circonferenze con centro sull'asse z (φ), e rette parallele all'asse z (z). L'elemento di volume ha per lati dr , $r d\varphi$ e dz , da cui ricaviamo $h_r = 1$, $h_\varphi = r$

ed $h_z = 1$. Gli operatori differenziali in coordinate cilindriche sono pertanto

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z \quad (1.65)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (1.66)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{V} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial(rV_\varphi)}{\partial z} \right] \hat{e}_r + \left[\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right] \hat{e}_\varphi \\ + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rV_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \right] \hat{e}_z \end{aligned} \quad (1.67)$$

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (1.68)$$

1.6 Esercizi

Esercizio 1.6.1 Calcolare le trasformate di Fourier $\hat{f}(k)$ delle seguenti funzioni:

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1/a \\ 0, & |x| > 1/a \end{cases}$$

$$(b) \quad f(x) = \begin{cases} e^{\alpha x}, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$(c) \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

$$(d) \quad f(x) = \begin{cases} x^n, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

$$(e) \quad f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

$$(f) \quad f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

dove a ed α sono numeri reali positivi ed n è un intero positivo.

Esercizio 1.6.2 Calcolare le trasformate di Fourier $\hat{f}(k)$ delle seguenti funzioni: $f(x) = \sin^2 x$, $f(x) = \cos^2 x$, $f(x) = \sin^n x$, $f(x) = \cos^n x$, $f(x) = 2 \sin x \cos x$, $f(x) = |\sin x|$, $f(x) = |\cos x|$, dove n è un intero positivo.

Esercizio 1.6.3 Calcolare il gradiente ed il laplaciano della funzione $f(x) = x^2 + y^2 + z^2$ in coordinate polari sferiche.

Esercizio 1.6.4 Calcolare il gradiente ed il laplaciano della funzione $f(x) = x^2 + y^2$ in coordinate cilindriche.

Esercizio 1.6.5 Calcolare la divergenza ed il rotore del campo vettoriale

$$\mathbf{V} = \frac{x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

in coordinate polari sferiche.

Esercizio 1.6.6 Calcolare la divergenza ed il rotore del campo vettoriale

$$\mathbf{V} = \frac{x\hat{\mathbf{j}} - y\hat{\mathbf{i}}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

in coordinate cilindriche.

Capitolo 2

Equazioni differenziali alle derivate parziali

2.1 Introduzione

Un'equazione differenziale è, in generale, un'equazione nella quale l'incognita è una funzione e che lega tra di loro la funzione stessa e le sue derivate. Se la funzione incognita è una funzione di una sola variabile l'equazione differenziale si dice *ordinaria*, se invece la funzione incognita è una funzione di più variabili, l'equazione differenziale si dice *alle derivate parziali* (da qui in poi indicata con EDP). Un'equazione differenziale alle derivate parziali per una funzione incognita $u(x, y, \dots)$ si può dunque scrivere nella forma

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots\right) = 0, \quad (2.1)$$

dove F è una funzione data delle variabili indipendenti x, y, \dots , della funzione incognita $u(x, y, \dots)$ e di un numero finito delle sue derivate parziali. Una data funzione $u(x, y, \dots)$ si dice *soluzione* dell'equazione differenziale (2.1) se, sostituita nella (2.1) assieme alle sue derivate parziali, la soddisfa in modo identico in una regione Ω dello spazio delle variabili indipendenti.

Si dice *ordine* di un'equazione differenziale l'ordine della derivata di ordine più alto che ivi compare.

L'equazione differenziale (2.1) può essere scritta come

$$Lu = 0,$$

dove L è l'operatore differenziale definito dalla funzione F , analogo a quello introdotto all'inizio della sezione 1.3. Possiamo pertanto usare gli strumenti

dell'analisi funzionale per studiare le equazioni differenziali, limitatamente però alle equazioni lineari.

In generale, un'equazione differenziale, da sola, è soddisfatta da una famiglia di funzioni, piuttosto che da una sola funzione, cioè la soluzione di un'equazione differenziale non è unica. Per avere l'unicità della soluzione, l'equazione differenziale deve essere accompagnata da ulteriori condizioni, dette *condizioni ausiliarie*, che selezionano una soluzione particolare nella famiglia di tutte le soluzioni. Le condizioni ausiliarie possono coinvolgere i valori della funzione stessa e/o delle sue derivate lungo una curva (chiusa o aperta) nello spazio delle variabili indipendenti x, y, \dots . La situazione è analoga, anche se un po' più complessa, a quella che si presenta nel contesto delle equazioni differenziali ordinarie:

- quando le condizioni ausiliarie che accompagnano un'equazione differenziale di ordine n coinvolgono i valori della funzione e delle derivate fino all'ordine $n - 1$ nel medesimo punto del dominio, esse vengono dette *condizioni iniziali* ed il problema dell'esistenza ed unicità della soluzione viene detto *problema di Cauchy*;
- quando le condizioni ausiliarie che accompagnano un'equazione differenziale di ordine n coinvolgono i valori della funzione e/o delle sue derivate sulla frontiera del dominio, esse vengono dette *condizioni al contorno*, che possono poi essere di Dirichlet o di Neumann, come abbiamo già visto nella sezione 1.3.1, dove abbiamo già introdotto i problemi al contorno.

Si dice *soluzione particolare* dell'equazione differenziale (2.1) una qualunque funzione $u(x, y, z, \dots)$ che, sostituita nell'equazione assieme alle sue derivate, la soddisfa in modo identico. Si dice *soluzione generale* di un'equazione differenziale una famiglia di funzioni tali che:

- ciascun elemento della famiglia è una soluzione particolare dell'equazione differenziale;
- qualunque soluzione particolare della (2.1) appartiene alla famiglia.

Si può anche dire che la soluzione generale è l'insieme di tutte le soluzioni particolari.

La soluzione generale di un'equazione differenziale ordinaria di ordine n può essere rappresentata da una funzione della variabile indipendente contenente n parametri. Si ottiene così una famiglia di funzioni descritta dagli n parametri, famiglia che può essere rappresentata geometricamente da un insieme di curve nel piano, dette *curve integrali*. A ciascun valore dei parametri corrisponde una soluzione particolare, che soddisfa ad un dato insieme di condizioni iniziali o

al contorno. Si consideri, ad esempio, l'equazione dell'oscillatore armonico semplice

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \omega^2 f = 0 \quad (2.2)$$

per la funzione incognita $f(t)$, con $t \geq 0$. La soluzione generale di questa equazione è la famiglia di funzioni

$$f(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

che dipende dai due parametri liberi A e B . Assegnando le condizioni iniziali, si determinano i valori particolari delle costanti A e B , e quindi si determina una soluzione particolare. Si invita lo studente a determinare i valori di A e B che corrispondono alle condizioni iniziali generiche $f(0) = x_0$ e $df/dt(0) = v_0$.

Nel caso delle EDP, la soluzione generale è ancora data da una famiglia di funzioni, ma invece di costanti arbitrarie da assegnare abbiamo funzioni arbitrarie. La soluzione generale è rappresentata da superfici, in due o più dimensioni a seconda del numero di variabili da cui dipende la funzione incognita. Ad esempio, l'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

da risolvere per la funzione incognita $u(x, y) \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, ha come soluzione generale la famiglia di funzioni

$$u(x, y) = \phi(x),$$

che contiene la funzione arbitraria $\phi(x)$. Un altro esempio è dato dall'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

da risolvere, come nell'esempio precedente, per $u(x, y)$ in \mathbb{R}^2 . In questo caso, come si può facilmente verificare (e lo studente è invitato a farlo), la soluzione generale contiene due funzioni arbitrarie:

$$u(x, y) = \phi(x) + \psi(y).$$

Le funzioni arbitrarie che compaiono nella soluzione generale vanno determinate dalle condizioni iniziali o dalle condizioni al contorno, esattamente come per le equazioni differenziali ordinarie. Nel caso delle EDP le condizioni iniziali o al contorno sono imposte su un'intera regione dello spazio, solitamente la frontiera della regione nella quale la funzione incognita deve soddisfare l'equazione differenziale.

L'equazione differenziale (2.1) si dice *lineare* se F è una funzione lineare in u e nelle sue derivate. Una EDP di ordine m si dice *quasi-lineare* se è lineare nelle derivate parziali di ordine m .

Un *sistema* di equazioni differenziali è un insieme di equazioni differenziali che coinvolgono più funzioni incognite.

2.2 Esempi

Riportiamo qui di seguito alcuni esempi tratti dalla fisica. In molti casi, una delle variabili indipendenti è il tempo e viene indicata con t , mentre le altre variabili, di solito indicate con x, y, z, \dots rappresentano coordinate spaziali. Vediamo innanzitutto alcuni esempi di equazioni lineari.

1. L'*equazione di Laplace* in n dimensioni per la funzione incognita $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è l'equazione lineare del second'ordine

$$\Delta u = 0,$$

dove l'operatore Δ è l'operatore di Laplace introdotto in (1.17). Le sue soluzioni sono chiamate *potenziali* o *funzioni armoniche*. La parte reale $u(x, y)$ e la parte immaginaria $v(x, y)$ di una funzione analitica della variabile complessa $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sono funzioni armoniche (in questo caso dette "coniugate") ed obbediscono all'equazione di Laplace con $n = 2$.

2. L'*equazione delle onde* in n dimensioni per la funzione incognita $u(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ è

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0,$$

con c costante positiva. Per $n = 1$ l'equazione rappresenta le vibrazioni di una corda o la propagazione del suono in un tubo, per $n = 2$ la propagazione di onde sulla superficie di fondali bassi e per $n = 3$ la propagazione di onde acustiche od onde ottiche.

3. Le *equazioni di Maxwell* nel vuoto per il vettore campo elettrico $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ e per il vettore campo magnetico $\mathbf{H}(x, y, z, t)$,

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \nabla \times \mathbf{H} \\ \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= -\nabla \times \mathbf{E} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0, \end{aligned}$$

dove ϵ e μ sono la costante dielettrica e la permittività, $\nabla \times$ è il rotore e $\nabla \cdot$ la divergenza, costituiscono un sistema lineare di sei equazioni del primo ordine.

4. L'*equazione del calore* per la funzione incognita $u(x, y, z)$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \Delta u,$$

dove Δ è l'operatore di Laplace per $n = 3$, è soddisfatta dalla temperatura u di un corpo quando densità e calore specifico sono costanti. $K > 0$, costante, è la conducibilità termica.

5. L'*equazione di Schrödinger* è l'equazione fondamentale del moto in meccanica quantistica e governa l'evoluzione temporale della funzione d'onda $\Psi(x, y, z, t)$ di una particella di massa m sottoposta ad un potenziale $V(x, y, z)$ nello spazio fisico:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V \Psi$$

dove \hbar è la costante di Planck divisa per 2π .

Vediamo ora qualche esempio di equazioni non lineari.

1. L'*equazione di Navier-Stokes* descrive l'evoluzione temporale della velocità di flusso $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ e della pressione $p(x, y, z, t)$ di un elemento di fluido

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{R} \Delta \mathbf{u}$$

assieme alla condizione di incompressibilità

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

per un fluido viscoso. Con R si indica il numero di Reynolds. In questo caso abbiamo un sistema di quattro equazioni nelle quattro incognite u_x, u_y, u_z, p .

2. Nello studio delle onde d'acqua si incontra un esempio di equazione del terzo ordine non lineare, l'*equazione di Korteweg-de Vries*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + cu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

per la funzione incognita $u(x, t)$.

Capitolo 3

Equazioni del prim'ordine

La forma generale di un'equazione differenziale del primo ordine per una funzione incognita $u(x, y, z, \dots)$ è del tipo

$$F\left(x, y, z, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \dots\right) = 0. \quad (3.1)$$

La soluzione generale di un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine può essere rappresentata geometricamente da un insieme di curve nel piano, dette *curve integrali*. Nel caso delle EDP del primo ordine, invece, la soluzione generale è rappresentata da superfici, in due o più dimensioni a seconda del numero di variabili da cui dipende la funzione incognita. Per le equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, è sufficiente assegnare una sola condizione per ottenere una soluzione particolare dalla soluzione generale. Si consideri ad esempio l'equazione lineare del primo ordine

$$\frac{du}{dx} = 1$$

per la funzione incognita $u(x)$ con $x \in \mathbb{R}$. La soluzione generale è $u(x) = x + c$ e dipende da un solo parametro libero, la costante c . Imponendo, ad esempio, la condizione $u(0) = 1$ si ottiene la soluzione particolare $u(x) = x + 1$. Nel caso delle EDP, la soluzione generale dipende non soltanto da una costante arbitraria, ma da una *funzione arbitraria* e, per ottenere una soluzione particolare dalla soluzione generale, dobbiamo assegnare il valore della funzione incognita u in una regione dello spazio (una curva se u è una funzione di due variabili, una regione del piano se u dipende da tre variabili, etc.).

In questa sezione ci limiteremo a studiare una classe di EDP del primo ordine, le equazioni quasi-lineari, affrontando il *problema di Cauchy* e fornendo alcuni esempi. La trattazione sarà fatta nel caso di EDP con due variabili indipendenti.

3.1 Equazioni quasi-lineari

La forma più generale di un'equazione quasi-lineare del prim'ordine per una funzione $u(x, y)$ di due variabili è

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u). \quad (3.2)$$

Le funzioni $a(x, y, z)$, $b(x, y, z)$ e $c(x, y, z)$ siano note e, per ora, arbitrarie. Se rappresentiamo la funzione $u(x, y)$ tramite una superficie $z = u(x, y)$ nello spazio delle coordinate (x, y, z) , allora le superfici che corrispondono alle soluzioni della EDP (3.2) si dicono *superfici integrali*. Le funzioni a , b e c definiscono un campo vettoriale in un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ¹ e la direzione di tale campo vettoriale, che varia da punto a punto, si chiama *direzione caratteristica*.

L'equazione (3.2) stabilisce che le superfici integrali sono tangenti, in ciascun punto del dominio Ω , alle direzioni caratteristiche. Per dimostrarlo, ricordiamo che, data una superficie

$$F(x, y, z) = 0$$

nello spazio, il vettore

$$\nabla F \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

è disposto lungo la normale alla superficie e diretto verso l'esterno. Ricordiamo anche che una curva γ nello spazio può essere espressa in rappresentazione parametrica dalle equazioni

$$\begin{cases} x = x(\tau) \\ y = y(\tau) \\ z = z(\tau), \end{cases}$$

con $x(\tau)$, $y(\tau)$ e $z(\tau)$ funzioni regolari, e dove abbiamo introdotto il parametro indipendente $\tau \in \mathbb{R}$, e che il vettore

$$\mathbf{T} \equiv \left(\frac{\partial x}{\partial \tau}, \frac{\partial y}{\partial \tau}, \frac{\partial z}{\partial \tau} \right)$$

è diretto lungo la tangente alla curva γ nel punto $(x(\tau), y(\tau), z(\tau))$.

Sia ora $z = u(x, y)$, ovvero $F(x, y, z) \equiv u(x, y) - z = 0$, una superficie integrale. In ciascun punto del dominio Ω , il vettore $\nabla F = (\partial u / \partial x, \partial u / \partial y, -1)$ è disposto lungo la normale alla superficie. Per la (3.2), esso è ortogonale al vettore (a, b, c) e quindi alla direzione caratteristica in quel punto.

¹Le funzioni a , b e c definiscono un campo vettoriale in un dominio Ω se sono di classe C^1 in tale dominio

Le curve che, punto per punto, sono tangenti alle direzioni caratteristiche, sono dette *curve caratteristiche*. In ciascun punto di una curva caratteristica, il vettore tangente è quindi disposto lungo la direzione caratteristica, quindi soddisfa il sistema

$$\begin{cases} dx/d\tau = a(x, y, z) \\ dy/d\tau = b(x, y, z) \\ dz/d\tau = c(x, y, z), \end{cases} \quad (3.3)$$

che è detto *sistema caratteristico*. Eliminando il parametro τ dal sistema (3.3) otteniamo l'equazione delle curve caratteristiche in rappresentazione non parametrica

$$\frac{dx}{a(x, y, z)} = \frac{dy}{b(x, y, z)} = \frac{dz}{c(x, y, z)}. \quad (3.4)$$

Se le funzioni a , b e c sono di classe C^1 in un dominio Ω , allora sappiamo dalla teoria delle equazioni differenziali ordinarie che per ogni punto di Ω passa una ed una sola caratteristica.

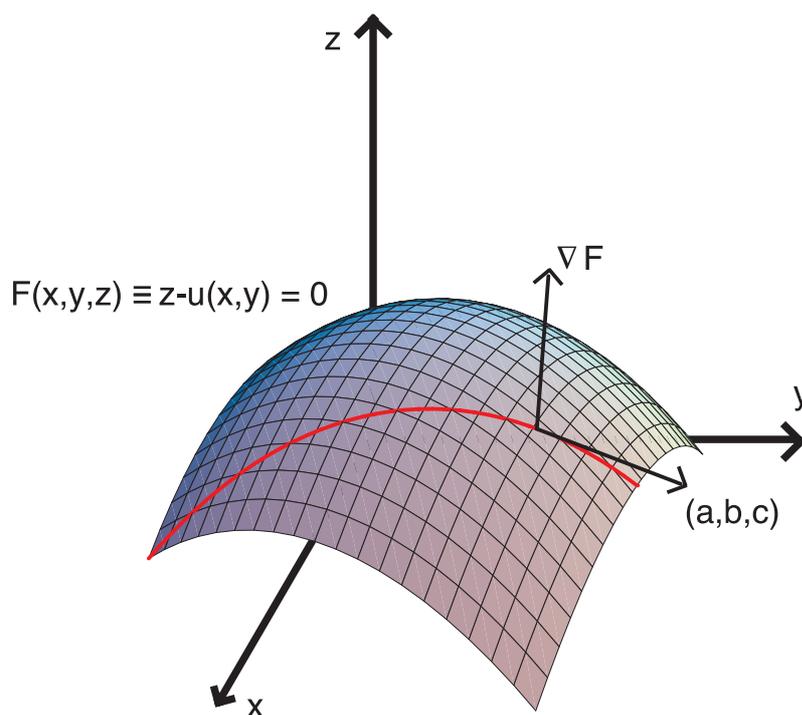


Figura 3.1: Superficie integrale e curva caratteristica.

Dimostriamo ora il seguente

Lemma 3.1.1 *Sia S una superficie integrale e sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un suo punto. Sia inoltre γ la curva caratteristica passante per P_0 . Allora γ giace interamente su S .*

Dimostrazione. Sia $P(\tau) \equiv (x(\tau), y(\tau), z(\tau))$ la rappresentazione parametrica di γ corrispondente alle condizioni iniziali $P(\tau = 0) = P_0$. In corrispondenza a ciascun valore di τ , il punto $P(\tau) = (x(\tau), y(\tau), z(\tau))$ sta sulla curva γ mentre il punto $P_1(\tau) = (x(\tau), y(\tau), u(x(\tau), y(\tau)))$ sta sulla superficie S ed è in effetti la proiezione ortogonale di $P(\tau)$ su S . Il teorema è dimostrato se la differenza $e(\tau) = z(\tau) - u(x(\tau), y(\tau))$ è identicamente nulla. Notiamo innanzitutto che $e(0) = 0$. Inoltre

$$\begin{aligned} \frac{de}{d\tau} &= \frac{dz}{d\tau} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{d\tau} \\ &= c(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) - a(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \frac{\partial u}{\partial x} - b(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \end{aligned}$$

che è un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine per $e(\tau)$, la cui unica soluzione è $e(\tau) \equiv 0$, essendo $e(0) = 0$. Quindi γ giace interamente su S . ■

Usiamo ora il lemma precedente per dimostrare il seguente importante

Teorema 3.1.1 *Una superficie S , data da $z = u(x, y)$, è una superficie integrale se e solo se S è un'unione di curve caratteristiche.*

Dimostrazione. Sia S l'unione di curve caratteristiche. Sia γ una di tali curve caratteristiche e sia $P \in \gamma \subset S$ un suo punto. La tangente a γ in P coincide con la direzione caratteristica, quindi la normale ad S in P è perpendicolare alla caratteristica; ne segue che S è una superficie integrale. Se S è una superficie integrale, per il lemma precedente essa è l'unione di curve caratteristiche. ■

3.2 Il problema di Cauchy per l'equazione quasi-lineare

Nella sezione precedente, abbiamo fornito una descrizione della soluzione generale dell'equazione quasi-lineare (3.2). Vogliamo ora affrontare il *problema di Cauchy*, cioè la determinazione di una soluzione particolare $u(x, y)$ a partire da un dato assegnato.

Supponiamo di assegnare il valore della funzione $u(x, y)$ lungo una curva Γ dello spazio (x, y, z) . Sia

$$\begin{cases} x = f(s) \\ y = g(s) \\ z = h(s) \end{cases} \quad (3.5)$$

la rappresentazione parametrica della curva Γ . E' ovvio che, dovendo la funzione u soddisfare l'equazione differenziale, la curva Γ deve appartenere ad una superficie integrale. Allora il problema di Cauchy consiste nel trovare la soluzione $u(x, y)$ della (3.2) tale che la condizione

$$u(f(s), g(s)) = h(s)$$

valga identicamente in s .

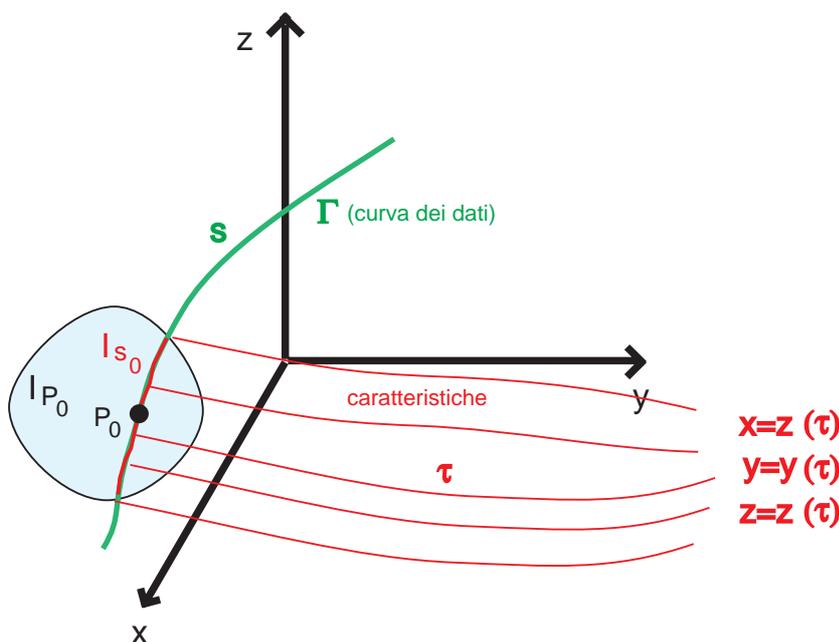


Figura 3.2: Il problema di Cauchy per l'equazione quasilineare.

Sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto di Γ , con $x_0 = f(s_0)$, $y_0 = g(s_0)$, $z_0 = h(s_0)$ (vedi figura 3.2). Supponiamo inoltre che le funzioni $f(s)$, $g(s)$ ed $h(s)$ che definiscono la curva Γ siano di classe C^1 in un opportuno intorno I_{s_0} di s_0 e che le funzioni $a(x, y, z)$, $b(x, y, z)$, $c(x, y, z)$ siano di classe C^1 in un opportuno intorno I_{P_0} di P_0 . Per $s \in I_{s_0}$, consideriamo allora la soluzione del sistema caratteristico (3.3) con condizione iniziale sulla curva Γ , cioè

$$\begin{cases} x = \xi(s, \tau) \\ y = \eta(s, \tau) \\ z = \zeta(s, \tau), \end{cases} \quad (3.6)$$

con condizione iniziale $\xi(s, 0) = f(s)$, $\eta(s, 0) = g(s)$ e $\zeta(s, 0) = h(s)$. Per noti teoremi sui sistemi di equazioni differenziali ordinarie, le funzioni ξ , η e ζ sono uniche. Esse forniscono una rappresentazione parametrica, secondo i

parametri s e τ , di una superficie $\Sigma : z = u(x, y)$ se possiamo invertire le prime due delle (3.6), ottenendo s e τ in funzione di x ed y , ad esempio come $s = S(x, y)$ e $\tau = T(x, y)$. Allora avremo che

$$z = Z(S(x, y), T(x, y)) = u(x, y) \quad (3.7)$$

definisce una funzione $u(x, y)$ che dà una rappresentazione esplicita della superficie Σ . Abbiamo anche che $\xi(s_0, 0) = f(s_0) = x_0$ ed $\eta(s_0, 0) = g(s_0) = y_0$. La condizione di invertibilità di $x = \xi(s, \tau)$, $y = \eta(s, \tau)$ in un intorno di $(s_0, 0)$ deriva dal teorema della funzione implicita, il quale afferma che possiamo trovare soluzioni $s = S(x, y)$ e $\tau = T(x, y)$ di classe C^1 in un intorno di (x_0, y_0) se lo Jacobiano

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial s}(s_0, 0) & \frac{\partial \xi}{\partial \tau}(s_0, 0) \\ \frac{\partial \eta}{\partial s}(s_0, 0) & \frac{\partial \eta}{\partial \tau}(s_0, 0) \end{vmatrix} \quad (3.8)$$

è diverso da zero. Ma $\partial \xi / \partial s(s_0, 0) = f'(s_0)$, $\partial \eta / \partial s(s_0, 0) = g'(s_0)$, $\partial \xi / \partial \tau(s_0, 0) = a(x_0, y_0, z_0)$ e $\partial \eta / \partial \tau(s_0, 0) = b(x_0, y_0, z_0)$, quindi la condizione sullo Jacobiano (3.8) diventa

$$J = \begin{vmatrix} f'(s_0) & g'(s_0) \\ a(x_0, y_0, z_0) & b(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3.9)$$

Questa è la condizione che garantisce che le (3.6) rappresentano una superficie $\Sigma : z = u(x, y)$ nello spazio (x, y, z) . Che Σ sia una superficie integrale lo si vede dal fatto che, in ciascun punto $P \in \Sigma$, il piano tangente a Σ contiene la direzione caratteristica; infatti, il vettore $(\partial \xi / \partial \tau, \partial \eta / \partial \tau, \partial \zeta / \partial \tau)$ è un vettore tangente alla superficie in P , e quindi appartiene al piano tangente, e per le (3.3) esso giace lungo la direzione caratteristica. La verifica che Σ è una superficie integrale si può fare anche per via analitica, utilizzando la rappresentazione (3.7) per la funzione u e verificando esplicitamente che essa soddisfa l'equazione differenziale (3.2). L'unicità della soluzione segue dal fatto che, se ci fosse una seconda superficie integrale passante per la curva Γ , per il teorema visto in precedenza essa dovrebbe contenere le curve integrali passanti per Γ e quindi dovrebbe coincidere con la superficie Σ sopra definita.

Abbiamo dunque dimostrato che, sotto la condizione (3.9), *esiste una ed una sola soluzione* di classe C^1 dell'equazione differenziale (3.2). La condizione (3.9) ha una semplice interpretazione geometrica. I vettori $(a, b, 0)$ ed $(f', g', 0)$ sono diretti lungo le tangenti alle proiezioni delle caratteristiche e, rispettivamente, della curva Γ sul piano (x, y) . La condizione (3.9) dice che tali vettori non devono essere paralleli, cioè che, nel punto P_0 , la proiezione della curva Γ non deve essere tangente alla proiezione della caratteristica passante per P_0 . Se fosse $J = 0$, si può dimostrare che tale condizione è compatibile con l'esistenza di una soluzione solo se Γ è una curva caratteristica. In questo caso,

l'equazione (3.2), con il dato assegnato su una curva caratteristica, avrebbe non una ma infinite soluzioni.

Un caso particolare è quello di un problema evolutivo,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} = c(x, t, u) \quad (3.10)$$

nel quale si assegna una condizione iniziale per la funzione incognita $u(x, t)$. In questo caso, x rappresenta la coordinata spaziale e t la variabile temporale e la condizione iniziale è del tipo

$$u(x, 0) = h(x). \quad (3.11)$$

La curva Γ ammette allora la rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = s \\ t = 0 \\ z = h(s). \end{cases} \quad (3.12)$$

Un altro caso particolare è quello di un'equazione lineare, che si ricava dalla (3.2) con a , b e c nella forma

$$a = a(x, y), \quad b = b(x, y), \quad c(x, y, u) = c_1(x, y)u + d(x, y)$$

Il sistema caratteristico (3.3) si riduce allora al sistema di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} dx/d\tau = a(x, y) \\ dy/d\tau = b(x, y) \end{cases} \quad (3.13)$$

equivalente alla singola equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}. \quad (3.14)$$

Il sistema (3.13), o l'equazione (3.14), determinano una famiglia di curve sul piano (x, y) , dette *proiezioni caratteristiche* e che sono le proiezioni sul piano (x, y) delle curve caratteristiche nello spazio (x, y, z) . Le caratteristiche si ottengono allora dalle loro proiezioni risolvendo l'equazione differenziale

$$\frac{dz}{dt} = c(x(t), y(t))z + d(x(t), y(t)).$$

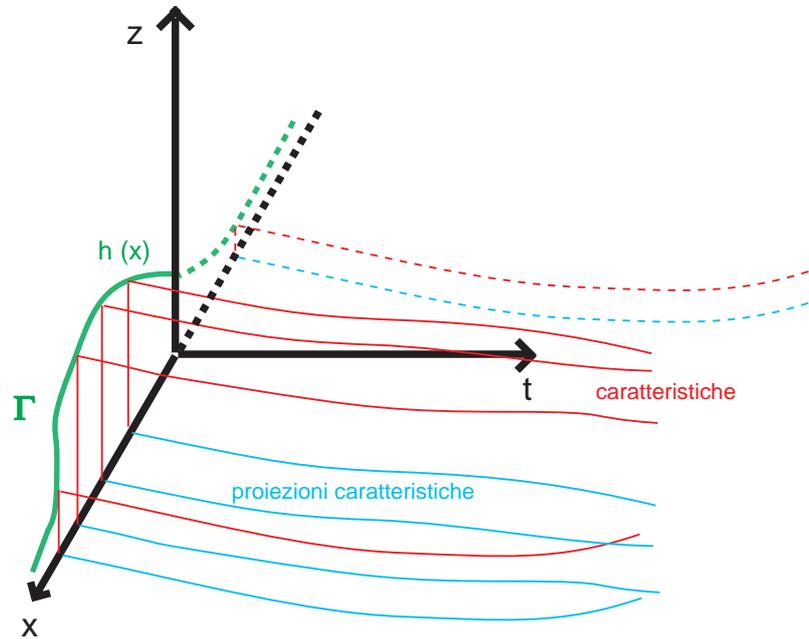


Figura 3.3: Caratteristiche e proiezioni caratteristiche per un problema evolutivo.

3.3 Equazioni lineari

Consideriamo ora in maggior dettaglio il caso di un'equazione lineare del primo ordine per una funzione $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$$A_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} + A_2(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + A_n(x) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \quad (3.15)$$

dove abbiamo usato la notazione $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ed A_1, A_2, \dots, A_n sono funzioni note di classe C^1 in una regione $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Per un'equazione lineare del prim'ordine, si possono generare soluzioni particolari a partire da un insieme di soluzioni particolari note. Si ha infatti il

Teorema 3.3.1 *Se u_1, u_2, \dots, u_k sono soluzioni della (3.15) ed $F : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di classe $C^1(D)$, allora, se $(u_1, u_2, \dots, u_k) \in D$, la funzione*

$$u(x) = F(u_1(x), u_2(x), \dots, u_k(x))$$

è soluzione della (3.2).

Dimostrazione.

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^k \frac{\partial F}{\partial u_l} \frac{\partial u_l}{\partial x_i}$$

e quindi, sostituendo nell'equazione (3.15),

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n A_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} &= \sum_{i=1}^n A_i(x) \sum_{l=1}^k \frac{\partial F}{\partial u_l} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \\ &= \sum_{l=1}^k \frac{\partial F}{\partial u_l} \sum_{i=1}^n A_i(x) \frac{\partial u_l}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^k \frac{\partial F}{\partial u_l} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Questo dimostra che la funzione u soddisfa l'equazione (3.15). ■

Il sistema caratteristico associato all'equazione lineare (3.15) è

$$\begin{cases} dx_1/d\tau &= A_1(x) \\ dx_2/d\tau &= A_2(x) \\ &\dots \dots \\ dx_n/d\tau &= A_n(x) \\ du/d\tau &= 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Le caratteristiche giacciono pertanto sugli iperpiani ad $u = \text{costante}$. Se u è una funzione di due variabili, ad esempio $u = u(x, y)$, le caratteristiche giacciono sui piani paralleli al piano (x, y) . In questo caso, è sufficiente considerare le proiezioni caratteristiche.

Una qualunque funzione $f(x)$ che sia costante lungo una linea caratteristica, soluzione del sistema (3.16), si chiama *integrale primo*. È facile vedere che, se $u = f(x)$, con f un integrale primo, allora u è soluzione della (3.15). Infatti

$$0 = \frac{df}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{d\tau} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\tau} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{d\tau} = A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + A_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

e cioè $u = f(x)$ soddisfa la (3.15). Gli integrali primi consentono di arrivare alla soluzione generale della (3.2):

Teorema 3.3.2 *Se sono noti $n - 1$ integrali primo tra loro linearmente indipendenti, $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{n-1}(x)$ allora la funzione*

$$u(x) = F(f_1(x), f_2(x), \dots, f_{n-1}(x))$$

è la soluzione generale della (3.2).

3.4 Esempi

In questa sezione determineremo le caratteristiche e le superfici integrali di alcune equazioni differenziali quasi-lineari e lineari del prim'ordine. Risolveremo alcune equazioni del primo ordine con il metodo delle caratteristiche nella Parte II.

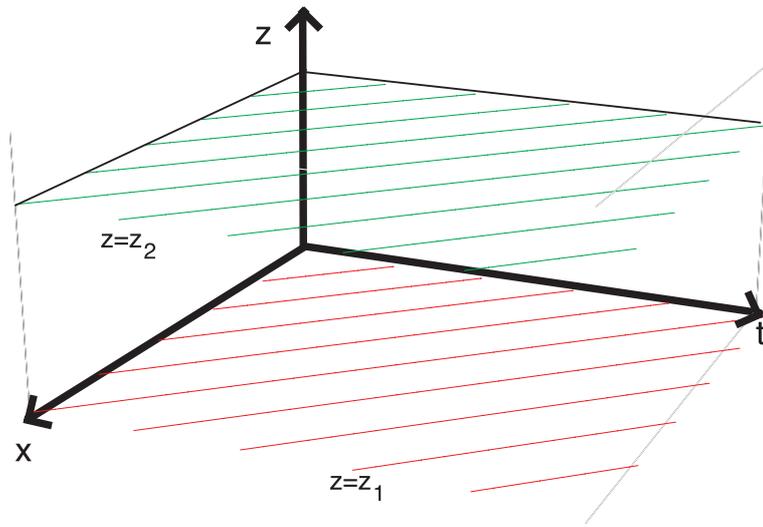


Figura 3.4: Caratteristiche per l'equazione di free-streaming.

Esempio 3.4.1 (Equazione del trasporto libero) Consideriamo l'equazione lineare del prim'ordine

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.17)$$

per la funzione incognita $u(x, t)$, nel dominio

$$\Omega = \{(t, x) : t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$$

e dove v è una costante reale. Questa equazione descrive la traslazione rigida nel tempo, a velocità costante, di un dato profilo iniziale, che può rappresentare, ad esempio, la concentrazione di una sostanza nello spazio. Le curve caratteristiche sono date dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} dt/d\tau = 1 \\ dx/d\tau = v \\ dz/d\tau = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione generale è

$$\begin{cases} t = \tau \\ x = v\tau + x_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$

dove abbiamo scelto $t = 0$ per $\tau = 0$. Le curve caratteristiche sono pertanto rette parallele di pendenza v giacenti sui piani paralleli al piano (t, x) (vedi figura 3.4). L'equazione (3.17) viene solitamente risolta sotto le condizioni iniziali $u(x, 0) = u_0(x)$. Avremmo in questo caso la situazione delle equazioni (3.10)-(3.12).

Esempio 3.4.2 Consideriamo l'equazione lineare

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = u, \quad (3.18)$$

ancora con v costante reale, per la funzione incognita $u(x, t)$, nel dominio

$$\Omega = \{(t, x) : t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}.$$

Le curve caratteristiche sono date dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} dt/d\tau = 1 \\ dx/d\tau = v \\ dz/d\tau = z \end{cases}$$

la cui soluzione generale è

$$\begin{cases} t = \tau \\ x = v\tau + x_0 \\ z = z_0 e^\tau \end{cases}$$

dove abbiamo scelto $t = 0$ per $\tau = 0$. Le curve caratteristiche sono pertanto esponenziali giacenti sui piani paralleli al piano $x = vt$.

Esempio 3.4.3 Consideriamo l'equazione lineare

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = x \quad (3.19)$$

per la funzione incognita $u(x, t)$, nel dominio

$$\Omega = \{(t, x) : t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}.$$

Le curve caratteristiche sono date dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} dt/d\tau = 1 \\ dx/d\tau = v \\ dz/d\tau = x \end{cases}$$

la cui soluzione generale è

$$\begin{cases} t = \tau \\ x = v\tau + x_0 \\ z = v\tau^2/2 + x_0\tau + z_0 \end{cases}$$

dove abbiamo scelto $t = 0$ per $\tau = 0$. Le curve caratteristiche sono pertanto parabole giacenti sui piani paralleli al piano $x = vt$.

Esempio 3.4.4 Consideriamo l'equazione quasi-lineare

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + 2y \frac{\partial u}{\partial y} = u^2.$$

Il sistema caratteristico è

$$\begin{cases} dx/d\tau = x \\ dy/d\tau = 2y \\ dz/d\tau = z^2 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} x = x_0 e^\tau \\ y = y_0 e^{2\tau} \\ z = z_0 / (1 - z_0 \tau) \end{cases}$$

Le proiezioni caratteristiche sono date dalle soluzioni dell'equazione

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{2y}$$

il cui integrale generale è

$$\frac{x^2}{y} = C$$

con C costante reale. Le proiezioni caratteristiche sono una famiglia di parabole simmetriche rispetto all'asse y .

Esempio 3.4.5 Consideriamo l'equazione lineare

$$y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = u.$$

Il sistema caratteristico è

$$\begin{cases} dx/d\tau = y \\ dy/d\tau = x \\ dz/d\tau = z \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} x = Ae^\tau + Be^{-\tau} \\ y = Ae^\tau - Be^{-\tau} \\ z = z_0 e^\tau \end{cases}$$

Le costanti A e B vanno determinate dalle condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} A + B &= x_0 \\ A - B &= y_0 \end{aligned}$$

Le proiezioni caratteristiche sono date dalle soluzioni dell'equazione

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{x}$$

il cui integrale generale è

$$x^2 - y^2 = C$$

con C costante reale. Le proiezioni caratteristiche sono dunque iperboli equilateri.

Esempio 3.4.6 (Equazione di Burgers) Consideriamo l'equazione quasi-lineare di tipo evolutivo

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.20)$$

per la funzione incognita $u(x, t)$ nel dominio

$$\Omega = \{(t, x) : t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}.$$

Quest'equazione è detta *equazione di Burgers*, e ne studieremo le soluzioni nei prossimi capitoli. Il sistema caratteristico è dato da

$$\begin{cases} dt/d\tau = 1 \\ dx/d\tau = z \\ dz/d\tau = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} t = \tau \\ x = z_0\tau + x_0 \\ z = z_0. \end{cases}$$

Le caratteristiche sono rette parallele giacenti sui piani $z = z_0$, con pendenza che varia da un piano all'altro.

3.5 Esercizi

Esercizio 3.5.1 Determinare, in rappresentazione parametrica, le caratteristiche delle seguenti equazioni differenziali del prim'ordine:

$$(a) \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + 2y \frac{\partial u}{\partial y} = -u$$

$$(b) \quad 2y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = u$$

$$(c) \quad y \frac{\partial u}{\partial x} - 2x \frac{\partial u}{\partial y} = u^2$$

$$(d) \quad 4y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = u$$

$$(e) \quad y \frac{\partial u}{\partial x} + 4x \frac{\partial u}{\partial y} = u$$

Capitolo 4

Equazioni del second'ordine

La forma generale di un'equazione differenziale del second'ordine per una funzione incognita $u(x, y, z, \dots)$ è del tipo

$$F\left(x, y, z, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots\right) = 0. \quad (4.1)$$

Ricordando quanto detto nella sezione (2.1), la soluzione generale di un'equazione differenziale ordinaria del second'ordine è una famiglia di funzioni dipendente da due parametri che può essere rappresentata geometricamente da un insieme di curve nel piano, dette *curve integrali*. Nel caso delle EDP del second'ordine, la soluzione generale è sempre data da una famiglia di funzioni, ma è rappresentata da superfici, in due o più dimensioni a seconda del numero di variabili da cui dipende la funzione incognita. Per ottenere una soluzione particolare dalla soluzione generale, la situazione che si presenta è più complessa rispetto alle equazioni del prim'ordine, e la affronteremo caso per caso. In questa sezione, studieremo le equazioni lineari e quasi-lineari del second'ordine in due variabili indipendenti, introducendo la loro classificazione in equazioni iperboliche, paraboliche ed ellittiche attraverso l'impostazione del problema di Cauchy. Nei capitoli successivi tratteremo anche i problemi al contorno di Dirichlet e di Neumann, che abbiamo già incontrato nella sezione 1.3.1.

4.1 Caratteristiche e classificazione

La forma più generale dell'equazione quasi-lineare del second'ordine per una funzione incognita $u(x, y)$ è del tipo

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = d \quad (4.2)$$

dove $a = a(x, y, u, \partial u/\partial x, \partial u/\partial y)$ ed analogamente per b, c e d . Come nel caso delle equazioni del prim'ordine, vediamo di impostare il problema di Cauchy in un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, per ora non specificato. Si tratta di assegnare un dato iniziale su una curva $\gamma \subset \Omega$. In questo caso, però, trattandosi di un problema del second'ordine, non sarà sufficiente assegnare la funzione u , ma dovremo assegnare anche le derivate parziali prime. Il *problema di Cauchy* per l'equazione (4.2) consiste quindi nel determinare la soluzione $u(x, y)$ a partire da valori assegnati per $u, \partial u/\partial x$ e $\partial u/\partial y$ lungo una curva $\gamma \subset \Omega$. Sia allora

$$\begin{aligned} x &= f(s) \\ y &= g(s) \end{aligned} \quad (4.3)$$

la rappresentazione parametrica di γ e siano

$$\begin{aligned} u(f(s), g(s)) &= h(s) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(f(s), g(s)) &= \phi(s) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(f(s), g(s)) &= \psi(s) \end{aligned} \quad (4.4)$$

i valori assegnati su γ . Va notato che le tre funzioni $h(s), \phi(s)$ e $\psi(s)$ non sono tra loro indipendenti, ma se ne possono assegnare arbitrariamente solo due. Infatti, differenziando la prima delle (4.4) rispetto ad s , otteniamo la condizione di compatibilità

$$h'(s) = \frac{\partial u}{\partial x} f'(s) + \frac{\partial u}{\partial y} g'(s) = \phi(s) f'(s) + \psi(s) g'(s). \quad (4.5)$$

In modo analogo, possiamo ottenere altre due condizioni di compatibilità derivando $\partial u/\partial x$ e $\partial u/\partial y$ lungo la curva γ ; queste due nuove condizioni di compatibilità forniscono, assieme all'equazione differenziale (4.2), il seguente sistema lineare di tre equazioni nelle tre incognite $\partial^2 u/\partial x^2, \partial^2 u/\partial x\partial y$ e $\partial^2 u/\partial y^2$ lungo γ :

$$\begin{cases} f'(s)\partial^2 u/\partial x^2 + g'(s)\partial^2 u/\partial x\partial y &= \phi'(s) \\ f'(s)\partial^2 u/\partial x\partial y + g'(s)\partial^2 u/\partial y^2 &= \psi'(s) \\ a\partial^2 u/\partial x^2 + 2b\partial^2 u/\partial x\partial y + c\partial^2 u/\partial y^2 &= d \end{cases} \quad (4.6)$$

Questo sistema ammette una ed una sola soluzione se il determinante della matrice dei coefficienti,

$$\Delta = \begin{vmatrix} f' & g' & 0 \\ 0 & f' & g' \\ a & 2b & c \end{vmatrix} \quad (4.7)$$

è diverso da zero. Tutte le funzioni che compaiono nel determinante si intendono calcolate lungo γ . La curva γ è detta *caratteristica* (rispetto all'equazione

differenziale (4.2) ed al dato di Cauchy (4.4)) se $\Delta = 0$ ed è detta *non caratteristica* se $\Delta \neq 0$. Pertanto, lungo una curva non caratteristica, il dato di Cauchy determina univocamente i valori delle derivate parziali seconde della funzione u . Nel caso in cui γ sia una curva caratteristica, il sistema (3.3) non ammette soluzioni, a meno che non sussistano relazioni addizionali fra i dati del problema. Siccome questa eventualità è del tutto accidentale, diciamo che, in generale, il problema di Cauchy con il dato di Cauchy assegnato lungo una caratteristica non ammette soluzione.

Considerando la definizione (4.7) del determinante, l'equazione di una caratteristica risulta $ag'^2 - 2bg'f' + cf'^2 = 0$. Questa, ricordando le (4.3), può essere scritta nella forma

$$ady^2 - 2bdxdy + cdx^2 = 0$$

che può essere risolta per la derivata dy/dx come

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \quad (4.8)$$

che è un'equazione differenziale ordinaria per la curva γ , una volta note le funzioni a , b e c . Siccome, in generale, a , b e c sono funzioni anche della soluzione u (e delle sue derivate), le curve caratteristiche possono essere definite solo per una fissata soluzione oppure nel caso in cui l'equazione (4.2) sia lineare, cioè quando a , b e c sono funzioni di x ed y soltanto.

Notiamo che l'equazione differenziale delle caratteristiche (4.8) può ammettere due soluzioni reali, una soluzione reale oppure due soluzioni complesse coniugate, a seconda del segno di $b^2 - 4ac$. Questo fatto porta alla seguente importante classificazione delle equazioni quasi-lineari del second'ordine in due variabili:

- l'equazione differenziale (4.2) è detta *ellittica* se $b^2 - ac < 0$ (e quindi non ci sono caratteristiche reali);
- l'equazione differenziale (4.2) è detta *iperbolica* se $b^2 - ac > 0$ (e quindi ci sono due famiglie distinte di caratteristiche reali);
- l'equazione differenziale (4.2) è detta *parabolica* se $b^2 - ac = 0$ (e quindi c'è una sola famiglia di caratteristiche reali).

Osserviamo comunque che, nel caso non lineare, il tipo dell'equazione differenziale (ellittica, iperbolica o parabolica) è determinato non solo dall'equazione stessa, ma anche dalla particolare soluzione che si considera. Anche nel caso lineare, inoltre, il tipo può essere diverso in diverse regioni del dominio Ω .

4.2 Forma canonica

Consideriamo ora il caso particolare in cui i coefficienti a , b e c dell'equazione (4.2) sono costanti. Introduciamo l'operatore differenziale del second'ordine

$$Lu = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

L'equazione (4.2) si può allora scrivere come $Lu + \dots = 0$. All'operatore L si associ il trinomio di secondo grado

$$p_L(\lambda) = a\lambda^2 + 2b\lambda + c$$

e siano λ_1 e λ_2 le sue radici. L'operatore L si può allora fattorizzare nel prodotto

$$Lu = a \left(\frac{\partial}{\partial x} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) u.$$

Notiamo che $-\lambda_1$ e $-\lambda_2$ sono date proprio dal membro di destra dalle equazioni delle caratteristiche (4.8) che, essendo a , b e c costanti, sono immediatamente integrabili:

$$y + \lambda_1 x = C_1 \tag{4.9}$$

$$y + \lambda_2 x = C_2 \tag{4.10}$$

con C_1 e C_2 costanti. Il caso con λ_1 e λ_2 reali e distinte corrisponde all'equazione iperbolica, il caso con λ_1 e λ_2 reali coincidenti all'equazione parabolica ed il caso con λ_1 e λ_2 complesse coniugate corrisponde all'equazione ellittica. Consideriamo ora separatamente i tre casi.

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ reali distinte, caso iperbolico. Introduciamo le variabili

$$\xi = \lambda_1 x + y \tag{4.11}$$

$$\eta = \lambda_2 x + y \tag{4.12}$$

Dalle (4.9)-(4.10) segue che ξ ed η sono costanti sulle caratteristiche. È facile verificare che, nelle nuove variabili, l'operatore L diventa

$$Lu = -a(\lambda_1 + \lambda_2)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}. \tag{4.13}$$

Le variabili ξ ed η coincidono con le caratteristiche, sono cioè costanti lungo le caratteristiche. Dividendo l'equazione differenziale per $-a(\lambda_1 + \lambda_2)^2$ si ottiene l'ulteriore semplificazione dell'operatore L che diviene

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}. \tag{4.14}$$

Questa si chiama *forma canonica* dell'operatore L nel caso iperbolico.

In questo caso esiste anche un'espressione alternativa della forma canonica (4.14), che si ottiene con l'ulteriore trasformazione

$$\begin{aligned} z &= \frac{\xi + \eta}{2} \\ w &= \frac{\xi - \eta}{2}. \end{aligned}$$

L'operatore L diventa allora

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial w^2}. \quad (4.15)$$

2) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ *reali coincidenti, caso parabolico*. In questo caso, una trasformazione analoga alla trasformazione (4.11)-(4.12) adottata nel caso iperbolico è possibile per una sola delle variabili. Introduciamo quindi la trasformazione

$$\xi = \lambda x + y \quad (4.16)$$

$$\eta = y \quad (4.17)$$

Nelle nuove variabili l'operatore L diventa in questo caso

$$Lu = \lambda b \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

e, dividendo l'equazione differenziale ulteriormente per λb , otteniamo la *forma canonica* dell'operatore L nel caso parabolico:

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \quad (4.18)$$

3) $\lambda_1 = \lambda_2^*$ *complessi coniugati, caso ellittico*. Poniamo in questo caso $\lambda_1 = \lambda_r + i\lambda_i$ e $\lambda_2 = \lambda_r - i\lambda_i$. Introducendo nuovamente le variabili

$$\xi = \lambda_1 x + y \quad (4.19)$$

$$\eta = \lambda_2 x + y \quad (4.20)$$

come nel caso iperbolico, l'operatore L assume ancora la forma (4.13), soltanto che ora le variabili ξ ed η sono complesse. Per ritornare al caso reale, introduciamo una seconda trasformazione dalle variabili complesse (ξ, η) alle variabili reali (z, w) data da

$$z = \frac{\xi + \eta}{2} \quad (4.21)$$

$$w = \frac{\xi - \eta}{2i}. \quad (4.22)$$

Si può vedere facilmente che nelle nuove variabili l'operatore L diventa

$$Lu = -a\lambda_r^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial w^2} \right)$$

e, dividendo ulteriormente l'equazione differenziale per $-a\lambda_r^2$, L assume la *forma canonica*

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial w^2}. \quad (4.23)$$

La riduzione dell'operatore L in forma canonica nei tre casi è del tutto generale (cioè non limitata al caso in cui i coefficienti a , b e c sono costanti) quando L è lineare. La sequenza di trasformazioni delle variabili che conduce alla forma canonica parte dalle equazioni delle caratteristiche (4.8). Siano $\phi(x, y)$ e $\psi(x, y)$ gli integrali generali delle due equazioni (4.8) ed usiamo la notazione

$$\chi_{\pm}(x, y) \equiv \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Abbiamo allora

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \chi_+ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} + \chi_- \frac{\partial \psi}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Introduciamo a questo punto la trasformazione

$$\xi = \phi(x, y) \quad (4.24)$$

$$\eta = \psi(x, y). \quad (4.25)$$

Nel caso iperbolico, questa trasformazione riduce direttamente l'operatore L nella forma canonica (4.14) a meno di un fattore. Nel caso parabolico, la (4.25) può essere scelta arbitrariamente (purchè indipendente dalla prima), e l'operatore L viene ridotto nella forma canonica (4.18), sempre a meno di un fattore. Nel caso ellittico, l'ulteriore trasformazione (4.21)-(4.22) riduce l'operatore L nella forma canonica (4.23). I dettagli della riduzione in forma canonica nel caso di coefficienti a , b e c variabili sono tediosi ma sufficientemente semplici e vengono lasciati come esercizio.

Notiamo che, se si considera la forma alternativa (4.15) nel caso iperbolico, la forma canonica dell'operatore differenziale del second'ordine L può essere definita come la forma che l'operatore assume quando, con una trasformazione di variabili, vengono eliminati i termini differenziali misti.

4.3 Esempi

Esempio 4.3.1 (L'equazione di Tricomi) Si consideri l'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Abbiamo $a = -y$, $b = 0$, $c = 1$, $ac - b^2 = -y$ e dunque l'equazione è iperbolica per $y > 0$, ellittica per $y < 0$ e parabolica per $y = 0$. Le caratteristiche nel piano $y > 0$, dove l'equazione è iperbolica sono date da

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{\sqrt{y}}$$

che ha per soluzioni le due famiglie ad un parametro di curve

$$y = \left(C \pm \frac{3}{2}x \right)^{2/3}$$

con C il parametro libero. Per $y = 0$ l'equazione è parabolica con l'unica caratteristica $y = 0$.

Determiniamo la trasformazione che riduce l'equazione in forma canonica nel caso iperbolico. Gli integrali primi sono

$$2y^{3/2} \pm 3x = C_{\pm}$$

e la trasformazione (4.25) diventa pertanto

$$\begin{aligned} \xi &= \phi(x, y) = 2y^{3/2} + 3x \\ \eta &= \psi(x, y) = 2y^{3/2} - 3x, \end{aligned}$$

che riduce l'equazione differenziale nella forma

$$36 \left[\frac{1}{4}(\xi + \eta) \right]^{2/3} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + L_1 u = 0,$$

dove L_1 è un operatore che riassume i termini del primo ordine. Nella figura 4.1 mostriamo le caratteristiche a ξ costante e ad η costante.

Esempio 4.3.2 Determinare le regioni di iperbolicità, ellitticità e parabolicità nel piano (x, y) dell'equazione

$$(\mu + x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

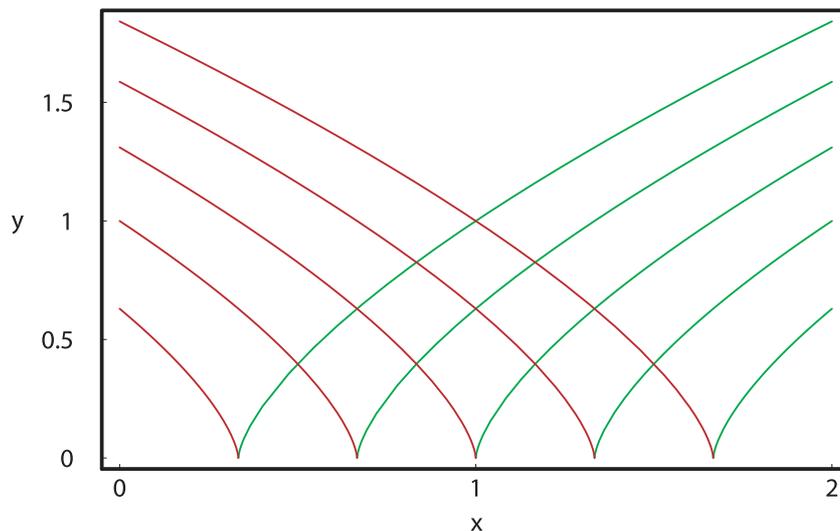


Figura 4.1: Caratteristiche a ξ costante (linee rosse) e ad η costante (linee verdi) nel caso iperbolico ($y > 0$) per l'equazione di Tricomi.

Abbiamo $a = \mu + x$, $b = xy$ e $c = -y^2$. Dunque

$$b^2 - ac = y^2(x^2 + x + \mu).$$

Il primo fattore è sempre non negativo. Il secondo fattore è sempre positivo per $\mu > 1/4$, mentre per $\mu < 1/4$ è negativo per $x_1 < x < x_2$ con

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\mu}}{2}.$$

Per veniamo dunque al seguente risultato sulla classificazione:

- Per $\mu < 1/4$ l'equazione è ellittica nelle regioni $x_1 < x < x_2, y > 0$ e $x_1 < x < x_2, y < 0$, iperbolica nelle regioni $x < x_1, y > 0$, $x > x_2, y > 0$, $x < x_1, y < 0$ e $x > x_2, y < 0$, ed è parabolica sull'asse $y = 0$ e sulle rette $x = x_{1,2}$;
- per $\mu = 1/4$ i risultati sono analoghi, solo che le rette $x = x_{1,2}$ coincidono;
- per $\mu > 1/4$ l'equazione è iperbolica su tutto il piano, tranne che sulla retta $y = 0$ dove è parabolica.

Esempio 4.3.3 Determinare le regioni di iperbolicità, ellitticità e parabolicità dell'equazione

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

e ridurla in forma canonica su tutto il piano (x, y) .

Abbiamo $a = x$, $b = 0$ e $c = y$. Dunque

$$b^2 - ac = -xy.$$

L'equazione è pertanto parabolica sugli assi coordinati $x = 0$ ed $y = 0$ ed è iperbolica nel II ($x < 0$, $y > 0$) e nel IV ($x > 0$, $y < 0$) quadrante, ed ellittica nel I ($x > 0$, $y > 0$) e nel III ($x < 0$, $y < 0$) quadrante. L'equazione delle caratteristiche (4.8) è, in tutte le regioni,

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{-xy}}{x}$$

che, nelle regioni iperboliche, diventa

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{-y}{x}}$$

e, nelle regioni ellittiche

$$\frac{dy}{dx} = \pm i \sqrt{\frac{y}{x}}.$$

Consideriamo la riduzione in forma canonica separatamente nelle varie regioni. *I quadrante*, $x > 0$ e $y > 0$, *regione ellittica*. Gli integrali primi sono dati da

$$\sqrt{y} \pm i\sqrt{x} = C_{\pm}.$$

La trasformazione (4.25) diventa pertanto

$$\begin{aligned} \xi &= \phi(x, y) = \sqrt{y} + i\sqrt{x} \\ \eta &= \psi(x, y) = \sqrt{y} - i\sqrt{x} \end{aligned}$$

e la trasformazione (4.21)-(4.22), che riduce l'operatore in forma canonica reale, è

$$\begin{aligned} z &= \frac{\xi + \eta}{2} = \sqrt{y} \\ w &= \frac{\xi - \eta}{2i} = \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Con quest'ultima trasformazione l'equazione differenziale diventa

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial w^2} \right) + L_1 u = 0.$$

dove L_1 è un operatore che riassume i termini del primo ordine.

II quadrante, $x < 0$ e $y > 0$, regione iperbolica. Gli integrali primi sono dati da

$$\sqrt{y} \pm \sqrt{-x} = C_{\pm}.$$

La trasformazione (4.25) diventa pertanto

$$\begin{aligned}\xi &= \phi(x, y) = \sqrt{y} + \sqrt{-x} \\ \eta &= \psi(x, y) = \sqrt{y} - \sqrt{-x}\end{aligned}$$

e l'equazione differenziale diventa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + L_1 u = 0$$

III quadrante, $x < 0$ e $y < 0$, regione ellittica. Gli integrali primi sono dati da

$$\sqrt{-y} \pm i\sqrt{-x} = C_{\pm}.$$

La trasformazione (4.25) diventa pertanto

$$\begin{aligned}\xi &= \phi(x, y) = \sqrt{-y} + i\sqrt{-x} \\ \eta &= \psi(x, y) = \sqrt{-y} - i\sqrt{-x}\end{aligned}$$

e la trasformazione (4.21)-(4.22), che riduce l'operatore in forma canonica reale, è

$$\begin{aligned}z &= \frac{\xi + \eta}{2} = \sqrt{-y} \\ w &= \frac{\xi - \eta}{2i} = \sqrt{-x}.\end{aligned}$$

Con quest'ultima trasformazione l'equazione differenziale diventa

$$-\frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial w^2} \right) + L_1 u = 0.$$

IV quadrante, $x > 0$ e $y < 0$, regione iperbolica. Gli integrali primi sono dati da

$$\sqrt{-y} \pm \sqrt{x} = C_{\pm}.$$

La trasformazione (4.25) diventa pertanto

$$\begin{aligned}\xi &= \phi(x, y) = \sqrt{-y} + \sqrt{x} \\ \eta &= \psi(x, y) = \sqrt{-y} - \sqrt{x}\end{aligned}$$

e l'equazione differenziale diventa

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + L_1 u = 0.$$

Regioni paraboliche per $x = 0$ ed $y = 0$. In questo caso l'equazione stessa assume direttamente le forme canoniche

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

rispettivamente per $y = 0$ e per $x = 0$.

4.4 Esercizi

Esercizio 4.4.1 Determinare le regioni di iperbolicità, ellitticità e parabolicità delle seguenti equazioni del second'ordine e ridurle in forma canonica su tutto il piano (x, y) :

- (a) $y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
- (b) $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (\mu + y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
- (c) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xy \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
- (d) $y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
- (e) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5 \frac{\partial^2 u}{\partial xy} = 0$
- (f) $4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 12 \frac{\partial^2 u}{\partial xy} + 9 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
- (g) $4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6 \frac{\partial^2 u}{\partial xy} + 9 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
- (h) $y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial xy} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
- (i) $(1 + x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial xy} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

Capitolo 5

Equazioni notevoli

In questo capitolo studieremo alcune tra le più importanti equazioni della fisica-matematica: l'equazione delle onde, l'equazione di Laplace e l'equazione del calore (o della diffusione), che sono i più importanti esempi, rispettivamente, di equazioni iperboliche, equazioni ellittiche ed equazioni paraboliche. In apertura di ciascuna sezione discuteremo, in modo euristico, la derivazione o la giustificazione fisica di ciascuna equazione.

5.1 L'equazione delle onde

5.1.1 Derivazione euristica

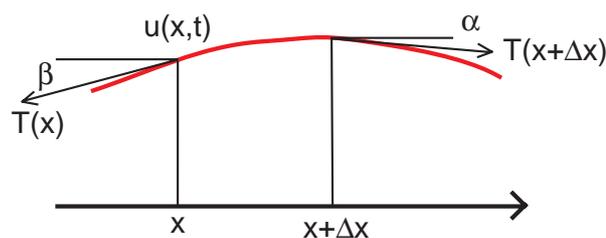


Figura 5.1: Derivazione euristica dell'equazione della corda vibrante.

Si consideri una corda di densità costante ρ libera di vibrare in un piano verticale (x, y) . Sia $u(x, t)$ lo spostamento verticale di un elemento di corda, di lunghezza orizzontale Δx attorno alla posizione di coordinata x , mentre t indica il tempo. Su questo elemento di corda agisce la tensione della corda

stessa, il cui modulo indichiamo con $T(x)$. L'equazione del moto per l'elemento Δx è l'equazione di Newton; se supponiamo che ciascun elemento di corda si possa muovere soltanto nella direzione verticale, la risultante delle forze lungo x si deve annullare. Avremo pertanto (vedi figura 5.1)

$$T(x) \cos \beta = T(x + \Delta x) \cos \alpha \equiv T_0.$$

Siccome il ragionamento si può fare per qualsiasi elemento della corda, T_0 deve essere costante lungo la corda. Nella direzione verticale, invece, abbiamo l'equazione del moto

$$\Delta m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -T(x) \sin \beta + T(x + \Delta x) \sin \alpha$$

dove $\Delta m = \rho \Delta x$ è la massa dell'elemento di corda e $\partial^2 u / \partial t^2$ la sua accelerazione. Dalla prima equazione ricaviamo $T(x) = T_0 / \cos \beta$ e $T(x + \Delta x) = T_0 / \cos \alpha$ e, sostituendo nella legge del moto,

$$\Delta m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -T_0 \tan \beta + T_0 \tan \alpha.$$

Ma, per il ben noto significato geometrico della derivata, abbiamo

$$\begin{aligned} \tan \beta &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \\ \tan \alpha &= \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t). \end{aligned}$$

Sostituendo nuovamente:

$$\Delta m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right].$$

Dividendo per Δx e passando al limite per $\Delta x \rightarrow 0$, e posto $v^2 = T_0 / \rho$, otteniamo infine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (5.1)$$

che è appunto l'equazione della corda vibrante. In questa derivazione, abbiamo trascurato l'effetto della forza di gravità, che modifica l'equazione delle onde (5.1) con la presenza di un termine costante. In molte applicazioni, come ad esempio nello studio delle vibrazioni di una corda di pianoforte o di violino, la gravità effettivamente gioca un ruolo del tutto trascurabile. In altre applicazioni, invece, è più importante, come ad esempio nello studio di sistemi di cavi a sospensione.

5.1.2 Proprietà fondamentali e formula di D'Alembert

L'equazione delle onde (5.1) è l'esempio più semplice di equazione differenziale di tipo iperbolico. Le caratteristiche dell'equazione nel piano (t, x) sono $x \pm vt = \text{costante}$, come si vede banalmente dalla (4.8). La trasformazione (4.25) che riduce l'equazione in forma normale è in questo caso

$$\xi = x + vt \quad (5.2)$$

$$\eta = x - vt \quad (5.3)$$

e l'equazione (5.1) diventa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad (5.4)$$

la cui soluzione generale è della forma

$$u = F(\xi) + G(\eta) = F(x + vt) + G(x - vt). \quad (5.5)$$

Dunque, la soluzione generale della (5.1) può essere espressa come una combinazione lineare della soluzione generale $u_1(t, x) = F(x + vt)$ dell'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} - v \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

che rappresenta onde viaggianti nella direzione $-x$, e della soluzione generale $u_2(t, x) = G(x - vt)$ dell'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

che rappresenta onde viaggianti nella direzione $+x$. Questo corrisponde al fatto che l'operatore differenziale

$$Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

può essere fattorizzato, secondo quanto illustrato in 4.2, in

$$Lu = \left(\frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) u,$$

gli autovalori λ_1 e λ_2 introdotti in 4.2 essendo in questo caso $\pm v$.

Va notato che le funzioni F e G sono *funzioni di una variabile*, mentre la u è funzione di due variabili. Le variabili indipendenti t ed x entrano nella F e nella G soltanto attraverso le combinazioni $x + vt$ ed $x - vt$.

Assegniamo ora le condizioni di Cauchy nella forma delle condizioni iniziali

$$u(x, 0) = h(x) \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \phi(x). \quad (5.7)$$

Questo significa che la curva γ del dato di Cauchy coincide, nel piano (t, x) , con l'asse x ed è data dalla rappresentazione parametrica $x = g(s) = s$, $t = f(s) = 0$. Queste condizioni iniziali sono sufficienti per ottenere una ed una sola soluzione (ricordiamo anche la condizione di compatibilità (4.5)). Ovviamente, avremmo potuto anche assegnare u e $\partial u/\partial x$ oppure $\partial u/\partial x$ e $\partial u/\partial t$, senza cambiare la sostanza della trattazione. Utilizzando la forma (5.5) della soluzione, abbiamo che

$$\begin{aligned} u(0, x) &= F(x) + G(x) = h(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) &= vF'(x) - vG'(x) = \phi(x) \end{aligned} \quad (5.8)$$

da cui otteniamo che

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{vh'(x) + \phi(x)}{2v} \\ G'(x) &= \frac{vh'(x) - \phi(x)}{2v} \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{h(x)}{2} + \frac{\int_0^x \phi(\lambda)d\lambda}{2v} + \delta \\ G(x) &= \frac{h(x)}{2} - \frac{\int_0^x \phi(\lambda)d\lambda}{2v} + \epsilon \end{aligned}$$

dove δ ed ϵ sono due costanti opportune tali che $\delta + \epsilon = 0$ (per la (5.8)). In

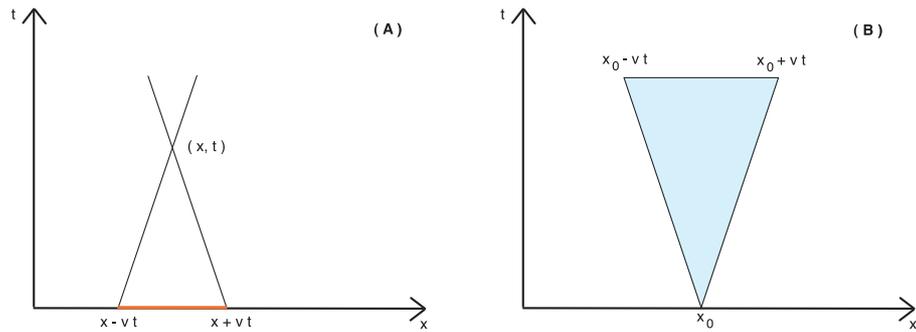


Figura 5.2: Dominio di dipendenza per l'equazione delle onde: (A) intervallo di dipendenza e (B) cono di influenza.

conclusione, la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione delle onde con le condizioni iniziali (5.6)-(5.7) si può scrivere nella forma, detta *forma di d'Alembert*,

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(h(x + vt) + h(x - vt)) + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \phi(\lambda)d\lambda. \quad (5.9)$$

Se $h \in C^2$ e $\phi \in C^1$, allora $u \in C^2$. Dall'equazione (5.9) notiamo che la soluzione $u(t, x)$ nel punto x all'istante t è determinata dai valori delle due funzioni note $h(x)$ e $\phi(x)$ nell'intervallo $[x - vt, x + vt]$ dell'asse x . Chiameremo tale intervallo *dominio di dipendenza* (vedi figura 5.2 (A)). Se consideriamo le due caratteristiche passanti per il punto (t, x) del piano, vediamo che queste intersecano l'asse x esattamente negli estremi del dominio di dipendenza. Viceversa, i valori iniziali nel punto $(0, x_0)$ dell'asse x influenzano i valori della soluzione negli istanti di tempo successivi nei punti (t, x) interni alla regione delimitata dalle caratteristiche passanti per $(0, x_0)$, cioè i punti per i quali $x_0 - vt < x < x_0 + vt$ (*cono di influenza*, vedi figura 5.2 (B)). È come dire che i segnali la cui evoluzione è governata dall'equazione delle onde (5.1) viaggiano con velocità v .

Concludiamo questa sezione enunciando alcune *proprietà di invarianza* dell'equazione delle onde, lasciando la facile dimostrazione per esercizio (vedi l'esercizio 5.4.1).

Teorema 5.1.1 (Invarianza per traslazione) *Sia $u(x, t)$ una qualunque soluzione dell'equazione delle onde (5.1). Allora, qualunque sia $\lambda \in \mathbb{R}$, anche $u(x - \lambda, t)$ è soluzione dell'equazione (5.1).*

Teorema 5.1.2 *Sia $u(x, t)$ una qualunque soluzione dell'equazione delle onde (5.1). Allora qualunque derivata della funzione u , ad esempio $\partial u / \partial t$, $\partial u / \partial x$, $\partial^2 u / \partial x^2$, ..., è pure soluzione dell'equazione (5.1).*

Teorema 5.1.3 (Invarianza per trasformazione di scala) *Sia $u(x, t)$ una qualunque soluzione dell'equazione delle onde (5.1). Allora, qualunque sia $a \in \mathbb{R}$, anche $u(ax, at)$ è soluzione del problema (5.1).*

5.2 L'equazione di Laplace

5.2.1 Giustificazione fisica

L'esempio più importante di equazione differenziale del second'ordine di tipo ellittico è l'equazione di Laplace, che ora studieremo in dettaglio. Una delle applicazioni più importanti dell'equazione di Laplace è il calcolo del potenziale elettrostatico generato da una distribuzione di carica in una regione di spazio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Il campo elettrico $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ obbedisce alla terza delle equazioni di Maxwell (detta anche equazione di Poisson)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$$

dove $\rho(\mathbf{x})$ è la densità di carica. Se indichiamo con $\phi(\mathbf{x})$ il potenziale elettrostatico, tale che $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, allora ϕ obbedisce all'equazione

$$\Delta\phi = -4\pi\rho.$$

Nel caso in cui non ci siano cariche presenti nella regione di spazio considerata, l'equazione diventa

$$\Delta\phi = 0,$$

che è l'equazione di Laplace. Il più delle volte succede che, in elettrostatica come in altre applicazioni, l'equazione di Laplace vada risolta con una condizione ausiliaria sul bordo della regione Ω . Questa condizione può riguardare il valore del potenziale oppure il valore del campo elettrico. Si parla allora di *problema al contorno di Dirichlet* e, rispettivamente, di *Neumann*, che definiremo meglio nella prossima sezione.

5.2.2 Proprietà e teoremi fondamentali

Ricordiamo che nella sezione 1.3.1 abbiamo definito l'operatore di Laplace (1.17) e l'operatore differenziale lineare del second'ordine L dato dalla (1.18). L'operatore di Laplace si ottiene dall'operatore L ponendo $p(x) \equiv -1$ e $q(x) \equiv 0$, quindi possiamo riscrivere le identità di Green (1.20)-(1.21) per l'operatore di Laplace al modo seguente:

$$\int_{\Omega} v \Delta u dV = - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u + \int_{\partial\Omega} v \frac{du}{dn} dS \quad (5.10)$$

$$\int_{\Omega} v \Delta u dV = \int_{\Omega} u \Delta v dV + \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{du}{dn} - u \frac{dv}{dn} \right) dS \quad (5.11)$$

dove ∇ è il gradiente in n dimensioni, $\partial\Omega$ indica la frontiera del dominio Ω , d/dn è la derivata direzionale lungo la normale alla superficie $\partial\Omega$ (diretta verso l'esterno) e dV è l'elemento di volume. Inoltre, $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$. Nel caso particolare di $v \equiv 1$, si ottiene

$$\int_{\Omega} \Delta u dV = \int_{\partial\Omega} \frac{du}{dn} dS. \quad (5.12)$$

Un altro caso notevole si ha quando $v \equiv u$, che porta all'integrale dell'energia definito per l'operatore L nella sezione 1.3.1:

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dV + \int_{\Omega} u \Delta u = \int_{\partial\Omega} u \frac{du}{dn} dS, \quad (5.13)$$

Da notare che, per $u \in C^2(\bar{\Omega})$, se $\Delta u = 0$ in Ω e $u = 0$ oppure $du/dn = 0$ sulla frontiera $\partial\Omega$, allora abbiamo necessariamente che

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dV = 0.$$

Siccome l'integrando è una funzione continua e non negativa, esso deve annullarsi identicamente in Ω , cioè $u = \text{costante}$ in Ω . Questo fatto porta ai teoremi di esistenza ed unicità per due problemi fondamentali nella teoria delle equazioni ellittiche.

Sia ora data l'equazione

$$\Delta u = \rho \quad (5.14)$$

nel dominio Ω , con ρ una funzione assegnata. Si definiscono allora:

- Il *problema di Dirichlet*: determinare la soluzione u della (5.14) nel dominio Ω , dati i valori di u sulla frontiera $\partial\Omega$;
- Il *problema di Neumann*: determinare la soluzione u della (5.14) nel dominio Ω , dati i valori di du/dn sulla frontiera $\partial\Omega$.

La soluzione $u \in C^2(\bar{\Omega})$ del problema di Dirichlet è determinata univocamente dall'equazione stessa e dalle condizioni al contorno; la soluzione $u \in C^2(\bar{\Omega})$ del problema di Neumann, invece, è determinata a meno di una costante additiva.

L'equazione (5.14) nel caso $\rho \equiv 0$,

$$\Delta u = 0 \quad (5.15)$$

è detta *equazione di Laplace*. Come già anticipato nella sezione 2.2, le soluzioni dell'equazione di Laplace in due variabili sono dette *funzioni armoniche*.

Dimostriamo ora un importante teorema.

Teorema 5.2.1 (Principio di massimo) *Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ e sia $\Delta u \geq 0$ per $x \in \Omega$. Allora u assume il suo massimo sulla frontiera $\partial\Omega$. Se u è tale che $\Delta u = 0$ per $x \in \Omega$, allora anche il minimo di u si trova sulla frontiera $\partial\Omega$.*

Dimostrazione. Sia $M = u(x_0)$ il massimo di u in Ω e sia m il massimo di u in $\partial\Omega$. Supponiamo per assurdo che $M > m$. Sia d il diametro di Ω . Si consideri la funzione ausiliaria

$$v(x) = u(x) + \frac{M - m}{nd^2} \|x - x_0\|^2.$$

Abbiamo $v(x_0) = u(x_0) = M$ ed inoltre, su $\partial\Omega$ si ha

$$v(x) \leq m + \frac{M - m}{n} = \frac{M + m(n - 1)}{n} < \frac{M + M(n - 1)}{n} = M.$$

Dunque, anche $v(x)$ assume il massimo in un punto interno al dominio, e non sulla frontiera. Inoltre, trattandosi di un punto di massimo, si avrà $\Delta v \leq 0$. Ma, calcolando direttamente Δv dalla sua definizione, abbiamo

$$\Delta v = \Delta u + 2 \frac{M - m}{d^2} > 0$$

giungendo così ad una contraddizione. Se $\Delta u = 0$, allora il teorema vale anche per la funzione $-u$, il che è possibile solo se u raggiunge il minimo sulla frontiera. ■

Corollario 5.2.1 *Se u_1 ed u_2 sono soluzioni del problema di Dirichlet con le stesse condizioni al contorno, allora $u_1 = u_2$.*

Dimostrazione. Questo segue dal fatto che la funzione $u = u_1 - u_2$ è soluzione dell'equazione di Laplace con $u(x) = 0$, $x \in \partial\Omega$. Siccome u deve assumere il massimo ed il minimo su $\partial\Omega$, deve essere $u \equiv 0$. ■

Con argomenti analoghi, si può anche dimostrare che la soluzione del problema di Dirichlet dipende in modo continuo dai dati al contorno.

Dimostriamo ora un paio di teoremi sul problema di Neumann.

Teorema 5.2.2 *Sia u una soluzione del problema di Neumann nel dominio Ω con frontiera $\partial\Omega$*

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad x \in \Omega \\ \frac{du}{dn} &= g(x) \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Allora si ha

$$\int_{\partial\Omega} g dS = 0.$$

Dimostrazione. Abbiamo intanto

$$\int_{\partial\Omega} g dS = \int_{\partial\Omega} \frac{du}{dn} dS.$$

In base alla prima identità di Green nella forma (5.12) abbiamo anche

$$\int_{\partial\Omega} \frac{du}{dn} dS = \int_{\Omega} \Delta u = 0$$

essendo u soluzione del problema di Neumann. ■

Teorema 5.2.3 *Siano u_1 e u_2 due soluzioni del problema di Neumann (5.16). Allora $u_1 - u_2 = C$, dove C è una costante.*

Dimostrazione. La funzione $u_1 - u_2$ è soluzione del problema di Neumann (5.16) con $g(x) = 0$ per $x \in \partial\Omega$. Abbiamo allora

$$\int_{\Omega} u \Delta u = 0$$

e

$$\int_{\partial\Omega} u \frac{du}{dn} dS = 0$$

e, per la (5.13), si ha anche

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dV = 0$$

che implica

$$|\nabla u|^2 = 0, \quad \forall x \in \Omega,$$

cioè $\nabla u = 0$ e quindi u è costante. ■

Concludiamo questa sezione con un aggancio all'analisi complessa. Ricordiamo che, se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ è una funzione analitica della variabile complessa $z = x + iy$, le funzioni u e v obbediscono alle equazioni di Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{5.17}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{5.18}$$

e si dicono coniugate. Inoltre, u e v sono funzioni armoniche, in quanto

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

che si ottiene derivando la (5.17) rispetto ad x e la (5.18) rispetto ad y . Una relazione analoga vale per v . È opportuno notare che, data una funzione armonica u , la sua coniugata non è unica. Sussiste allora il seguente

Teorema 5.2.4 *Sia u una soluzione del problema di Neumann (5.16). Allora esiste una funzione v , coniugata di u , che è soluzione di un opportuno problema di Dirichlet.*

Dimostrazione. Sia $x = x(s)$, $y = y(s)$ la rappresentazione parametrica della frontiera $\partial\Omega$ (che è una curva nel piano (x, y)) nell'ascissa curvilinea. Ricordiamo che $\hat{t} = (dx/ds, dy/ds)$ è il versore tangente alla curva, mentre $\hat{n} = (dy/ds, -dx/ds)$ è il versore normale. Sia inoltre $G(s) = g(x(s), y(s))$, dove g è la funzione nelle (5.16) e sia $f(s)$ una qualunque primitiva della G , cioè $f'(s) = G(s)$. Sia allora v coniugata di u e soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0 & x \in \Omega \\ v(x, y) &= f(x, y) & x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Essendo u coniugata di v , è anche $\Delta u = 0$ in Ω ed inoltre, in $\partial\Omega$,

$$\begin{aligned} \frac{du}{dn} &= \nabla u \cdot \hat{n} = \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dx}{ds} = \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{df}{ds} = G(s) = g(x, y) \end{aligned}$$

■

5.3 L'equazione del calore e della diffusione

5.3.1 Derivazione euristica

L'equazione del calore è in realtà un'equazione di tipo diffusivo che descrive una famiglia di fenomeni che rientrano nella categoria del trasporto diffusivo. Tra questi, si contano sia la conduzione del calore sia, ad esempio, la diffusione di particelle in un gas. Vediamo la derivazione euristica in entrambi i casi.

Equazione del calore. Consideriamo una sbarra omogenea, cilindrica, sottile, di lunghezza L , come mostrato in figura 5.3. Sia S l'area della sua sezione trasversale e sia ρ la sua densità (costante). Supponiamo che la sbarra sia isolata lateralmente, così che il calore può fluire solo lungo la direzione dell'asse del cilindro, che assumiamo come asse x . Sia $u(x, t)$ la temperatura della sbarra, come funzione della posizione, x , lungo la sbarra e del tempo t . Assumiamo inoltre la validità della legge di Fourier, secondo la quale il flusso di calore Γ_q (definito come la quantità di calore che passa attraverso una superficie di sezione unitaria nell'unità di tempo) è legato alla temperatura dalla relazione

$$\Gamma_q(x, t) = -\kappa \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$$

dove κ è la conducibilità termica. La quantità di calore che passa attraverso

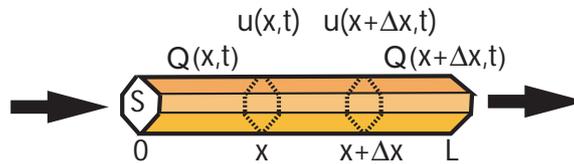


Figura 5.3: Derivazione euristica dell'equazione del calore.

una sezione della sbarretta, di area S , nell'unità di tempo è allora

$$Q(x, t) = -\kappa S \frac{\partial u}{\partial x}(x, t).$$

Dalla termodinamica, sappiamo inoltre che la quantità di calore $q(t)$ contenuta in una sezione trasversale compresa tra le ascisse x ed $x + \Delta x$ della sbarra all'istante t è data da

$$q(t) = \int_x^{x+\Delta x} c\rho S u(s, t) ds,$$

dove c è il calore specifico che supponiamo costante. La variazione di questa quantità nell'unità di tempo è data dalla differenza tra il flusso entrante nel volumetto attraverso sezione in x ed il flusso uscente in $x + \Delta x$, vale a dire

$$\frac{dq}{dt} = Q(x, t) - Q(x + \Delta x, t).$$

Il primo membro può essere scritto come

$$\frac{dq}{dt} = \int_x^{x+\Delta x} c\rho S \frac{\partial u}{\partial t}(s, t) ds = c\rho S \frac{\partial u}{\partial t}(\xi, t) \Delta x,$$

dove abbiamo usato il teorema della media con $x \leq \xi \leq x + \Delta x$. Dividendo entrambi i membri dell'equazione per Δx e passando al limite per $\Delta x \rightarrow 0$ otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} c\rho S \frac{\partial u}{\partial t}(\xi, t) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{Q(x, t) - Q(x + \Delta x, t)}{\Delta x} \\ c\rho S \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \kappa S \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{aligned}$$

ovvero

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5.19)$$

dove $K = \kappa/c\rho$ è una costante detta *coefficiente di conduzione termica*.

Quella che abbiamo appena ottenuto è la versione più semplice dell'equazione del calore: è monodimensionale ed il coefficiente di conduzione termica K è costante. La generalizzazione ai casi bi- e tri-dimensionale, sempre con K costante, è data da

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (5.21)$$

per una funzione $u(x, y, t)$ o $u(x, y, z, t)$ rispettivamente di due o tre variabili.

La forma più generale del coefficiente di conduzione termica K è in realtà un tensore, \mathbf{K} , che descrive le proprietà termiche di un mezzo non isotropo. Le componenti di questo tensore possono inoltre dipendere dalle coordinate

spaziali. L'equazione del calore monodimensionale (nel cui caso K è ancora uno scalare) diventa allora

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (5.22)$$

e le generalizzazioni bi- e tri-dimensionali diventano

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot [\mathbf{K}(x, y, z) \cdot \nabla u]. \quad (5.23)$$

L'equazione (5.19) contiene l'informazione circa la scala di tempo sulla quale avviene la propagazione del calore in un mezzo. Per vederlo, basta riscrivere l'equazione stessa in forma adimensionale. Sia L la dimensione spaziale caratteristica del sistema in esame (ad esempio, la lunghezza della sbarretta). Introducendo la variabile adimensionale $z = x/L$ l'equazione diventa

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{K}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

da cui si vede che il tempo caratteristico della propagazione del calore, su un tratto spaziale di dimensione L , è $\tau = L^2/K$. Introducendo anche la variabile adimensionale temporale $T = t/\tau$, l'equazione del calore si può scrivere

$$\frac{\partial u}{\partial T} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (5.24)$$

che è l'equazione con conducibilità termica unitaria. Va notato che la (5.24) non contiene costanti fisiche o parametri liberi, e si dice che è scritta in *forma universale*.

Equazione della diffusione. Consideriamo un insieme di particelle, come ad esempio un gas. Le particelle collidono fra di loro, ed indichiamo con λ il cammino libero medio, cioè la distanza media percorsa da una particella tra due collisioni successive. Allora $1/\lambda$ è il numero medio di collisioni per unità di lunghezza e la probabilità che una particella abbia una collisione in un intervallo di lunghezza Δr è $\Delta r/\lambda$. Introduciamo a questo punto la funzione $P(r)$, definita come la probabilità che una particella percorra una distanza pari ad r senza subire collisioni. Per determinare la forma dettagliata di $P(r)$ facciamo il seguente ragionamento: la probabilità che una particella non subisca collisioni in un intervallo di lunghezza $r + \Delta r$ è il prodotto della probabilità che non ci siano collisioni fino ad r per la probabilità che non ci siano collisioni tra r ed $r + \Delta r$, quindi

$$P(r + \Delta r) = P(r) \left(1 - \frac{\Delta r}{\lambda} \right).$$

Riarrangiando i termini, dividendo per Δr e passando al limite per $\Delta r \rightarrow 0$, otteniamo l'equazione differenziale per $P(r)$

$$\frac{dP}{dr}(r) = -\frac{P(r)}{\lambda}.$$

Se scegliamo la costante d'integrazione in modo che $P(0) = 1$, la soluzione è

$$P(r) = e^{-r/\lambda},$$

che è detta *distribuzione di Poisson*. Essa permette di calcolare il valor medio delle grandezze che ci interessano; in particolare, il valor medio di r , che rappresenta la distanza media percorsa da una particella tra un urto e l'altro, è data da

$$\langle r \rangle = \int_0^\infty r P(r) dr = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty r e^{-r/\lambda} = \lambda,$$

consistente con il cammino libero medio introdotto in precedenza.

Consideriamo ora un volumetto cilindrico elementare nel gas; supponiamo che la densità $n(x, t)$ vari solo lungo la direzione dell'asse del cilindro, che assumiamo come asse x e sia invece costante nelle altre direzioni (vedi la figura 5.4). Sia S l'area della sezione trasversale del cilindro, il cui dominio lungo

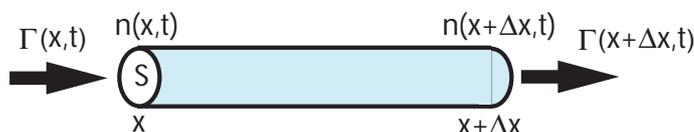


Figura 5.4: Derivazione euristica dell'equazione della diffusione.

l'asse x si estende da x ad $x + \Delta x$. Il numero di particelle contenute nel cilindro all'istante t è $n(x, t)S\Delta x$ e la variazione di questa quantità nell'unità di tempo è ovviamente $(\partial n/\partial t)S\Delta x$. Tale variazione è anche uguale alla differenza tra il flusso di particelle entrante ed il flusso uscente dal volumetto. Se $\Gamma(x, t)$ è il flusso di particelle attraverso la sezione trasversale all'ascissa x , allora

$$(\partial n/\partial t)S\Delta x = S(\Gamma(x, t) - \Gamma(x + \Delta x, t)).$$

Dividendo per Δx e passando al limite per $\Delta x \rightarrow 0$ otteniamo

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial x}. \tag{5.25}$$

Il flusso di particelle in x è, per definizione, il numero di particelle che attraversa la sezione unitaria posta in x nell'unità di tempo. Supponiamo che la velocità direzionale media delle particelle del gas sia nulla, e quindi che esse si muovano

soltanto per agitazione termica, con \bar{v} la velocità termica. Supponiamo inoltre che il moto dovuto all'agitazione termica sia isotropo nello spazio, cioè che tutte le direzioni sono equiprobabili. Per calcolare il flusso di particelle, supponiamo di prendere una sezione unitaria nell'origine, $x = 0$. Siccome i ragionamenti che seguono non dipendono da x , non si perde di generalità. Il numero di particelle $dN_+(x)$ che attraversano l'origine in un tempo $\tau = \lambda/\bar{v}$, provenienti da un volumetto compreso tra x e $x+dx$ e sezione unitaria a sinistra dell'origine (quindi $x < 0$), è dato dal numero di particelle nel volumetto che viaggiano nella direzione positiva dell'asse x e che non subiscono collisioni. Tale numero è pari a

$$dN_+(x) = \frac{1}{6} n(x) P(-x) dx,$$

dove il fattore $1/6$ è dovuto alle 6 possibili direzioni in cui le particelle si possono muovere. Il numero totale di particelle provenienti da sinistra e che attraversano l'origine si ottiene integrando questa espressione lungo x , da $-\infty$ fino all'origine. Con un ragionamento del tutto analogo, il numero di particelle che attraversano l'origine da destra è

$$dN_-(x) = \frac{1}{6} n(x) P(x) dx.$$

Il flusso netto di particelle attraverso l'origine è quindi dato da

$$\Gamma(0) = \left[\int_{-\infty}^0 dN_+(x) - \int_0^{\infty} dN_-(x) \right] \frac{1}{\tau} = \frac{1}{6\tau} \left[\int_{-\infty}^0 n(x) e^{x/\lambda} dx - \int_0^{\infty} n(x) e^{-x/\lambda} dx \right].$$

Siccome il contributo agli integrali viene soltanto dalle regioni di spazio vicino ad $x = 0$, sviluppiamo $n(x)$ in serie di Taylor attorno all'origine,

$$n(x) \approx n(0) + x \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right)_0 + \dots$$

Sostituendo e calcolando gli integrali, otteniamo

$$\Gamma(0) = -D \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right)_0$$

dove

$$D = \frac{1}{3} \lambda \bar{v} = \frac{1}{3} \frac{\lambda^2}{\tau}$$

è detto *coefficiente di diffusione*. Siccome il risultato non dipende dalla scelta dell'origine come punto di riferimento, abbiamo l'espressione del flusso di particelle

$$\Gamma(x) = -D \frac{\partial n}{\partial x}. \quad (5.26)$$

L'equazione di diffusione diventa allora

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}, \quad (5.27)$$

che ha la stessa struttura dell'equazione del calore. Va precisato che, nel ricavare l'equazione della diffusione, si è fatta un'approssimazione importante, sviluppando la densità in serie di Taylor e troncando tale serie al secondo termine. Questa approssimazione è ragionevole se la scala spaziale di variazione della densità è molto più lunga del cammino libero medio λ , in altre parole, se la variazione della densità di particelle su una distanza pari al cammino libero medio λ è piccola. Questa considerazione fornisce il limite di validità dell'equazione della diffusione. Quando si descrive un sistema fisico in cui la densità subisce variazioni microscopiche importanti, cioè variazioni grandi su distanze dell'ordine del cammino libero medio, si deve ricorrere a modelli cinetici più sofisticati, come per esempio l'equazione di Boltzmann.

Anche l'equazione della diffusione ammette le generalizzazioni che abbiamo introdotto a proposito dell'equazione del calore. Ci limitiamo a scrivere la forma più generale, nella quale la densità n dipende da tre coordinate spaziali ed il coefficiente di diffusione è in realtà un tensore, \mathbf{D} , anch'esso dipendente dalle coordinate spaziali:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \nabla \cdot [\mathbf{D}(x, y, z) \cdot \nabla n]. \quad (5.28)$$

In piena analogia con l'equazione del calore, anche l'equazione della diffusione permette di individuare un tempo caratteristico, scrivendo l'equazione in forma adimensionale. Se L è la scala spaziale caratteristica del sistema che si considera, il tempo caratteristico della diffusione è $\tau = L^2/D$; con le variabili $z = x/L$ e $T = t/\tau$, l'equazione della diffusione diventa

$$\frac{\partial n}{\partial T} = \frac{\partial^2 n}{\partial z^2},$$

che è l'equazione della diffusione con coefficiente unitario. Anche questa equazione è scritta in forma universale, senza costanti fisiche o parametri liberi.

Se le particelle del gas hanno una velocità media direzionale non nulla v , allora l'espressione per il flusso (5.26) diventa

$$\Gamma(x) = -D \frac{\partial n}{\partial x} + v n$$

e l'equazione di diffusione si modifica con la comparsa di un termine di deriva, diventando

$$\frac{\partial n}{\partial t} + v \frac{\partial n}{\partial x} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}, \quad (5.29)$$

che viene detta *equazione di "drift-diffusion"*. Quando, nella (5.29), si ha $D = 0$ (cioè in assenza di diffusione), si ottiene l'equazione del trasporto libero (o convettivo), già vista nell'esempio 3.4.1, eq. (3.17).

Proviamo ora a scrivere anche l'equazione di drift diffusion in forma adimensionale, così come abbiamo fatto per l'equazione del calore e per l'equazione della diffusione. Sia, come prima, L la dimensione spaziale caratteristica del sistema. Introducendo la variabile adimensionale $z = x/L$ otteniamo

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{v}{L} \frac{\partial n}{\partial z} = \frac{D}{L^2} \frac{\partial^2 n}{\partial z^2}.$$

Vediamo che ora compaiono due tempi caratteristici, $\tau_D = L^2/D$ e $\tau_v = L/v$, che sono, rispettivamente, il tempo caratteristico della diffusione ed il tempo caratteristico della convezione. Il rapporto tra questi due tempi caratteristici,

$$P = \frac{\tau_D}{\tau_v} = \frac{vL}{D},$$

è detto *numero di Peclet*, che ci dice se uno dei due processi domina sull'altro, o se sono dello stesso ordine. Se $P \gg 1$, ad esempio, il tempo caratteristico della diffusione è molto più grande di quello della convezione, ed il trasporto delle particelle avviene principalmente per convezione. Se invece $P \ll 1$, il tempo caratteristico della diffusione è molto più piccolo di quello della convezione, ed il trasporto avviene principalmente per diffusione. Se, invece, si ha $P \sim 1$, i due processi sono dello stesso ordine ed entrambi contribuiscono al trasporto delle particelle in egual misura. Per introdurre la variabile adimensionale corrispondente al tempo, conviene prima valutare se ci si trova in uno dei due casi limite, $P \gg 1$ oppure $P \ll 1$, e scegliere il tempo caratteristico opportuno per adimensionalizzare il tempo. Supponiamo, ad esempio, che sia $P \ll 1$. Allora conviene porre $T = t/\tau_D$, così che l'equazione diviene

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} + P \frac{\partial n}{\partial z} = \frac{\partial^2 n}{\partial z^2}.$$

Un importante esempio di applicazione dell'equazione di drift-diffusion si ha quando si aggiunge una piccola concentrazione di una sostanza colorante ad un volume di liquido, per esempio acqua, e se ne segue l'evoluzione nel tempo. Se l'acqua è ferma (stato stazionario), il colorante diffonde nell'acqua, e pian piano la traccia si allarga. Se l'acqua è in movimento, ad esempio se si trova dentro una conduttura, la traccia, oltre a diffondere, la segue nel suo movimento. I due processi, quello di diffusione e quello di convezione, sono descritti, rispettivamente, dal membro di destra dell'equazione (5.29) e dal secondo termine del membro di sinistra.

Va infine precisato che la presente derivazione dell'equazione del calore e dell'equazione della diffusione hanno un carattere prettamente euristico. Una derivazione rigorosa, che porterebbe ad un'espressione più dettagliata del coefficiente

di conduzione termica e del coefficiente di diffusione, dovrebbe procedere dai principi e dai metodi della teoria cinetica.

Va anche precisato che, anche se la derivazione è stata ottenuta assumendo un dominio finito, le stesse equazioni valgono in un dominio spaziale infinito, come vedremo nella sezione 5.3.3. La frontiera del dominio, sia in una che in due o in tre dimensioni, entra nel problema soltanto tramite le condizioni al contorno che accompagnano l'equazione differenziale.

5.3.2 Problema di Hadamard

Le condizioni ausiliarie che solitamente accompagnano l'equazione del calore sono di tipo misto, cioè iniziali ed al contorno. Tali condizioni, per una funzione $u(t, x)$ di due variabili, sono

$$\begin{aligned} u(0, x) &= h(x), & x \in [0, L] \\ u(t, 0) &= f_1(t), & t \geq 0 \\ u(t, L) &= f_2(t), & t \geq 0. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Questo equivale a considerare un dominio illimitato $\Omega = \{(t, x), 0 \leq t < \infty, 0 \leq x \leq L\}$, al cui interno la funzione u soddisfa l'equazione (5.19), assieme al contorno $\Gamma = \{(t, x), x = 0, 0 \leq t < \infty\} \cup \{(t, x), x = l, 0 \leq t < \infty\} \cup \{(t, x), 0 \leq x \leq L, t = 0\}$ sul quale valgono le (5.30). La dimostrazione dell'unicità della soluzione, tuttavia, è sviluppata soltanto su un intervallo finito nel tempo, $0 \leq t \leq T$. Considereremo pertanto anche il dominio $\Omega_T = \{(t, x), 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq L\}$, nel quale vale l'equazione (5.19) ed il contorno $\Gamma_T = \{(t, x), x = 0, 0 \leq t \leq T\} \cup \{(t, x), x = l, 0 \leq t \leq T\} \cup \{(t, x), 0 \leq x \leq L, t = 0\}$ sul quale valgono le condizioni ausiliarie (5.30). Il problema dell'esistenza ed unicità della soluzione dell'equazione del calore (5.19) con le condizioni miste (5.30), e dipendente in modo continuo dai dati al contorno, si chiama *problema di Hadamard*. Dimostriamo ora l'unicità della soluzione del problema di Hadamard, supposto che tale soluzione esista. A tale scopo, dimostriamo prima il seguente teorema, in tutto e per tutto simile al principio di massimo dimostrato nel caso dell'equazione di Laplace.

Teorema 5.3.1 (Principio di massimo) *Sia $u(t, x) \in C(\Omega_T)$ una soluzione dell'equazione (5.19) nel dominio Ω_T con le condizioni ausiliarie (5.30) in Γ_T . Tale soluzione assume il suo massimo ed il suo minimo sul contorno Γ_T .*

Dimostrazione. La dimostrazione è simile a quella del Principio di massimo per l'equazione di Laplace. Anche qui, basta dimostrare che il massimo si trova sulla frontiera; l'affermazione per il minimo segue considerando la funzione $-u$, che è pure soluzione dell'equazione del calore. Cominciamo con l'osservare che,

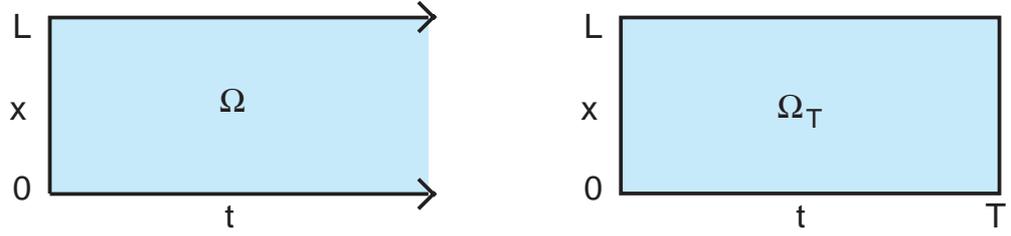


Figura 5.5: I domini Ω ed Ω_T del problema di Hadamard.

essendo Ω_T e Γ_T chiusi e limitati in \mathbb{R}^2 , il massimo M di u in Ω_T ed il massimo m di u in Γ_T esistono e sono finiti. Supponiamo che $M > m$, e sia $(t_0, x_0) \in \Omega_T$ tale che $u(t_0, x_0) = M$. Per le ipotesi fatte, (t_0, x_0) è un punto interno di Ω_T . Consideriamo ora la funzione

$$v(t, x) = u(t, x) + \frac{M - m}{4l^2}(x - x_0)^2.$$

Abbiamo $v(t_0, x_0) = u(t_0, x_0) = M$ ed inoltre, su Γ_T si ha

$$v(t, x) \leq m + \frac{M - m}{4} = \frac{M + 3m}{4} < M.$$

Dunque, anche v assume il suo massimo in un punto interno del dominio Ω_T , e sia (t_1, x_1) tale punto, per il quale supponiamo che sia $t_1 < T$. In tale punto avremo $\partial^2 v / \partial x^2(t_1, x_1) \leq 0$ (essendo (t_1, x_1) un punto di massimo isolato). Inoltre, avremo anche $\partial v / \partial t(t_1, x_1) = 0$. Dunque,

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \geq 0.$$

Ma, con un calcolo diretto si ottiene

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{M - m}{2l^2} = -\frac{M - m}{2l^2} < 0,$$

in contraddizione con l'ipotesi $M > m$. Dunque deve essere $M = m$ ed il massimo si raggiunge in Γ_T . ■

Possiamo ora dimostrare l'unicità della soluzione.

Teorema 5.3.2 *La soluzione di (5.19) con le condizioni (5.30) è unica in Ω_T . Per l'arbitrarietà di T , la soluzione è unica in Ω .*

Dimostrazione. Siano u_1 ed u_2 due soluzioni della (5.19) in Ω_T con le condizioni (5.30) in Γ_T . Allora la funzione $u_1 - u_2$ è pure soluzione della (5.19)

con le condizioni (5.30), ora però con $h(x) = f_1(t) = f_2(t) = 0$. Per il principio del massimo, $u_1 - u_2$ assume il massimo ed il minimo sul contorno Γ_T , dove vale 0. Dunque abbiamo $0 \leq u_1 - u_2 \leq 0$, cioè $u_1 \equiv u_2$ in Ω_T . Siccome T può essere scelto arbitrariamente grande, l'unicità della soluzione può in realtà asserita per $0 \leq t < \infty$. ■

Con argomenti analoghi, si può anche dimostrare che la soluzione di (5.19) con le condizioni (5.30) dipende in modo continuo dai dati al contorno.

Per quanto riguarda l'esistenza della soluzione, questa si può trovare risolvendo l'equazione stessa, ed è un punto che demandiamo alla prossima sezione.

5.3.3 L'equazione del calore in un mezzo infinito

Nella sezioni precedente, abbiamo considerato l'equazione del calore (5.19) e l'equazione della diffusione (5.27) in un dominio finito. Esse si applicano anche a sistemi con una frontiera spaziale molto lontana, tanto da poter considerare un dominio infinito, $-\infty < x < \infty$ o semi-infinito, $0 \leq x < \infty$. In generale, nella descrizione di un sistema fisico, si usa un dominio infinito quando l'influenza delle condizioni al contorno sulla soluzione è trascurabile. L'equazione del calore (o della diffusione) in un dominio infinito si formalizza come:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) &= h(x) \end{aligned} \quad (5.31)$$

per $-\infty < x < \infty$. In questa sezione, ci limitiamo ad enunciare alcune *proprietà di invarianza* del problema, che saranno essenziali per la ricerca delle soluzioni. La dimostrazione di queste proprietà è semplice e la lasciamo per esercizio (vedi l'esercizio 5.4.2).

Teorema 5.3.3 (Invarianza per traslazione) *Sia $u(x, t)$ una qualunque soluzione dell'equazione del calore (5.31) nel dominio $-\infty < x < \infty$. Allora, qualunque sia $\lambda \in \mathbb{R}$, anche $u(x - \lambda, t)$ è soluzione del problema (5.31).*

Teorema 5.3.4 *Sia $u(x, t)$ una qualunque soluzione dell'equazione del calore (5.31) nel dominio $-\infty < x < \infty$. Allora qualunque derivata della funzione u , ad esempio $\partial u / \partial t$, $\partial u / \partial x$, $\partial^2 u / \partial x^2$, ..., è pure soluzione del problema (5.31).*

Teorema 5.3.5 (Principio di sovrapposizione) *Siano $u(x, t)$ e $v(x, t)$ due soluzioni qualunque del problema (5.31). Allora anche la funzione $w(x, t) = \alpha u(x, t) + \beta v(x, t)$ è soluzione del problema (5.31) per qualunque costanti reali o complesse α e β . Il principio di sovrapposizione vale anche nella formulazione seguente, più generale: sia $u_\lambda(x, t)$ una soluzione del problema (5.31),*

dipendente da un parametro λ che varia con continuità in un dominio (limitato od illimitato) D e sia $g(\lambda)$ una funzione reale o complessa della variabile $\lambda \in D$. Allora anche la funzione

$$v(x, t) = \int_D u_\lambda(x, t) g(\lambda) d\lambda \quad (5.32)$$

è soluzione del problema (5.31), purchè siano verificate le condizioni per la convergenza dell'integrale (5.32).

Teorema 5.3.6 (Forma integrale della soluzione) *Sia $u(x, t)$ una qualunque soluzione dell'equazione del calore (5.31) nel dominio $-\infty < x < \infty$. Allora anche la funzione*

$$v(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x - \lambda, t) g(\lambda) d\lambda, \quad (5.33)$$

è soluzione del problema (5.31), purchè la funzione (reale o complessa) $g(\lambda)$ sia tale da verificare le condizioni per la convergenza dell'integrale (5.33).

Teorema 5.3.7 (Invarianza per trasformazione di scala) *Sia $u(x, t)$ una qualunque soluzione dell'equazione del calore (5.31) nel dominio $-\infty < x < \infty$. Allora, qualunque sia $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda > 0$, anche $u_\lambda(x, t) = u(\sqrt{\lambda}x, \lambda t)$ è soluzione del problema (5.31).*

Le proprietà descritte nei teoremi 5.3.3-5.3.7, che abbiamo appena enunciato, sono importanti perchè permettono di scrivere la soluzione del problema (5.31) in forma integrale. Cominciamo col costruire una soluzione particolare dell'equazione del calore, soluzione corrispondente alla condizione iniziale

$$h(x) = h_0(x) \equiv \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (5.34)$$

Notiamo che la funzione $h_0(x)$ è invariante per trasformazioni di scala; si ha infatti $h_0(\lambda x) = h_0(x)$ per qualunque $\lambda > 0$. Questa proprietà suggerisce di cercare la soluzione del problema (5.31) tra le funzioni che rimangono invarianti per trasformazioni di scala, cioè funzioni tali che $u_\lambda(x, t) = u(\sqrt{\lambda}x, \lambda t)$. Si vede subito che queste funzioni sono del tipo $u(x, t) = U(x/\sqrt{t})$; infatti: $u_\lambda(x, t) = u(\sqrt{\lambda}x, \lambda t) = U(\sqrt{\lambda}x/\sqrt{\lambda t}) = U(x/\sqrt{t}) = u(x, t)$. Introduciamo quindi la variabile $z = x/\sqrt{4Kt}$ (il fattore $4K$ è stato introdotto per comodità) e cerchiamo la soluzione nella forma $u(x, t) = U(z)$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \frac{z}{t} \frac{dU}{dz} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{4Kt}} \frac{dU}{dz} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{4Kt} \frac{d^2 U}{dz^2} \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione del calore, otteniamo l'equazione differenziale per $U(z)$:

$$\frac{d^2U}{dz^2} + 2z \frac{dU}{dz} = 0,$$

la cui soluzione generale si ottiene facilmente per quadrature ed è

$$U(z) = A_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{Erf}(z) + A_2,$$

dove $\text{Erf}(z)$ è la funzione degli errori definita da

$$\text{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt.$$

È facile verificare che $\text{Erf}(-z) = -\text{Erf}(z)$, $\text{Erf}(z)' = (2/\sqrt{\pi})e^{-z^2}$, $\lim_{z \rightarrow \infty} \text{Erf}(z) = 1$ ed $\text{Erf}(0) = 0$. Ritornando alle variabili iniziali x e t , possiamo ora scrivere la soluzione generale per la u nella forma

$$u(x, t) = A_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{Erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4Kt}} \right) + A_2.$$

Per come è stata definita la variabile z , è chiaro che questa forma della soluzione vale soltanto per $t > 0$, e per imporre la condizione iniziale dobbiamo ricorrere ad un procedimento di limite. Abbiamo per $x > 0$

$$1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = A_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} + A_2,$$

mentre per $x < 0$ abbiamo

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = -A_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} + A_2,$$

dove abbiamo usato che $\lim_{t \rightarrow 0^+} z = +\infty$ e le proprietà della funzione degli errori. Le costanti A_1 ed A_2 sono dunque date da $A_1 = 1/\sqrt{\pi}$ e $A_2 = 1/2$. La soluzione dell'equazione del calore con la condizione iniziale (5.34), che chiameremo $u_0(x, t)$, si scrive dunque

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2} \left[1 + \text{Erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4Kt}} \right) \right]. \quad (5.35)$$

Abbiamo allora il seguente

Teorema 5.3.8 *La funzione*

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x - \lambda, t) h(\lambda) d\lambda, \quad (5.36)$$

dove $w(x, t) = \partial u_0 / \partial x(x, t)$ ed u_0 è definita dalla (5.35), è l'unica soluzione del problema (5.31).

Dimostrazione. La funzione $u(x, t)$ è soluzione dell'equazione del calore in base ai teoremi (5.3.3)-(5.3.7). Dobbiamo soltanto verificare che soddisfi alla condizione iniziale del problema (5.31), cioè che $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = h(x)$. A tale scopo, riscriviamo la funzione $u(x, t)$ definita in (5.36) nella forma:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int w(x - \lambda, t)h(\lambda)d\lambda = \int \frac{\partial u_0}{\partial x}(x - \lambda, t)h(\lambda)d\lambda = \\ &= - \int \frac{\partial u_0}{\partial \lambda}(x - \lambda, t)h(\lambda)d\lambda = \\ &= - [u_0(x - \lambda, t)h(\lambda)]_{-\infty}^{\infty} + \int u_0(x - \lambda, t)h'(\lambda)d\lambda = \\ &= \int u_0(x - \lambda, t)h'(\lambda)d\lambda \end{aligned}$$

avendo supposto che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_0(x, t)h(x) = 0$. Per quanto riguarda la condizione iniziale abbiamo quindi:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int u_0(x - \lambda, t)h'(\lambda)d\lambda = \\ &= \int h_0(x - \lambda)h'(\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^x h'(\lambda)d\lambda = h(x). \end{aligned}$$

■

La funzione $w(x, t)$ è data esplicitamente da

$$w(x, t) = \frac{\partial u_0}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Kt}} e^{-x^2/(4Kt)}$$

ed è detta *funzione di Green* per il problema (5.31). La soluzione (5.36) si può allora scrivere

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\lambda)^2/(4Kt)} h(\lambda)d\lambda. \quad (5.37)$$

5.3.4 L'equazione del calore in un mezzo semi-infinito

L'equazione del calore (o della diffusione) in un dominio semi-infinito si può formalizzare come:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) &= h(x) \\ u(0, t) &= 0 \end{aligned} \quad (5.38)$$

per $0 \leq x < \infty$. La condizione al contorno $u(0, t) = 0$ non toglie generalità al problema, come vedremo nella Sezione 8.3. Per risolvere questo problema,

lo pensiamo come una restrizione ad $x \geq 0$ del problema (5.31) della sezione precedente, con una condizione iniziale $\tilde{h}(x)$ data da

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x), & x > 0 \\ -h(-x), & x < 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases} \quad (5.39)$$

Indichiamo con $\tilde{u}(x, t)$ la soluzione del problema così modificato. In base alla (5.37), abbiamo

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(x-\lambda)^2/(4Kt)} \tilde{h}(\lambda) d\lambda,$$

che, trasformando opportunamente l'integrale, può essere posta nella forma

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Kt}} \int_0^{\infty} \left[e^{(x-\lambda)^2/(4Kt)} - e^{(x+\lambda)^2/(4Kt)} \right] h(\lambda) d\lambda. \quad (5.40)$$

La soluzione del problema iniziale (5.38) è allora la restrizione di $\tilde{u}(x, t)$ ad $x \geq 0$:

$$u(x, t) = \tilde{u}(x, t), \quad x \geq 0. \quad (5.41)$$

5.3.5 Stati stazionari

Ritorniamo ora alle equazioni (5.19)-(5.21) che descrivono la propagazione del calore quando il coefficiente di conduzione termica è una costante scalare. Queste equazioni governano l'evoluzione temporale della distribuzione spaziale di temperatura e la loro soluzione è una funzione delle coordinate spaziali e del tempo. Come vedremo anche nel capitolo 8, in molti casi si deve determinare la *distribuzione stazionaria* di temperatura in un mezzo, distribuzione compatibile con le condizioni al contorno e la conducibilità termica assegnate. In questo caso, la funzione incognita da determinare è una funzione delle sole coordinate spaziali e che deve soddisfare le equazioni stazionarie corrispondenti alle (5.19)-(5.21). Ricaviamo dunque tali equazioni stazionarie direttamente dalle (5.19)-(5.21), assumendo che la funzione incognita u non dipenda dal tempo; otteniamo

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0 \quad (5.42)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (5.43)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (5.44)$$

per una funzione $u(x)$, $u(x, y)$ o $u(x, y, z)$ rispettivamente di una, due o tre variabili. Giungiamo così ad un importante risultato:

Teorema 5.3.9 *Le soluzioni stazionarie dell'equazione del calore sono soluzioni dell'equazione di Laplace.*

Questo risultato è in realtà un po' più generale, e comprende anche il caso in cui la conducibilità termica sia un tensore, con componenti costanti. In questa situazione, si deve prima operare una opportuna trasformazione di variabili, che coinvolge la conducibilità termica stessa, per poter scrivere il membro di destra della (5.23), con \mathbf{K} costante, nella forma dell'operatore Laplaciano. Nel caso in cui la conducibilità termica dipenda dalle coordinate spaziali, invece, la trasformazione dell'equazione del calore stazionaria nell'equazione di Laplace è possibile solo sotto condizioni particolari. Vedi gli esercizi 5.4.3 e 5.4.4.

5.4 Esercizi

Esercizio 5.4.1 Dimostrare le proprietà di invarianza per l'equazione delle onde enunciate nei teoremi 5.1.1, 5.1.2 e 5.1.3.

Esercizio 5.4.2 Dimostrare le proprietà di invarianza per l'equazione del calore enunciate nei teoremi 5.3.3, 5.3.4, 5.3.5, 5.3.6 e 5.3.7.

Esercizio 5.4.3 Scrivere la forma stazionaria dell'equazione del calore in tre dimensioni nel caso in cui la conducibilità termica sia data da:

- (a) uno scalare $K(x, y, z)$, dipendente dalle coordinate spaziali;
- (b) un tensore diagonale \mathbf{K} con componenti K_1 , K_2 e K_3 , costanti e diverse tra loro;
- (c) un tensore diagonale \mathbf{K} con componenti $K_1(x, y, z)$, $K_2(x, y, z)$ e $K_3(x, y, z)$ dipendenti dalle coordinate;
- (d) un tensore non diagonale, simmetrico, \mathbf{K} con componenti $K_{ij}(x, y, z)$, $i, j = 1, 2, 3$, costanti e diverse tra loro (tranne che per la relazione di simmetria);
- (e) un tensore non diagonale, simmetrico, \mathbf{K} con componenti $K_{ij}(x, y, z)$, $i, j = 1, 2, 3$, dipendenti dalle coordinate.

Esercizio 5.4.4 Verificare, in tutti i casi dell'esercizio precedente, se esiste un'opportuna trasformazione delle variabili x , y e z che permetta di scrivere l'equazione del calore stazionaria in tre dimensioni nella forma dell'equazione di Laplace e, quando esiste, determinare tale trasformazione.

Parte II

Soluzioni analitiche

Capitolo 6

Equazioni del prim'ordine

6.1 Soluzione diretta del problema di Cauchy

La soluzione diretta consiste, quando è possibile, nell'utilizzare la procedura esposta nelle sezioni 3.1 e 3.2, cioè le equazioni (3.3)-(3.7).

Esempio 6.1.1 Consideriamo l'equazione del trasporto libero (3.17) introdotta nell'esempio 3.4.1

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

con la condizione iniziale $u(x, 0) = h(x)$. I coefficienti a , b e c che compaiono nella forma generale (3.2) e (3.3) sono, per questo esempio, $a = 1$, $b = v$ e $c = 0$. Il sistema caratteristico (3.3) è quindi

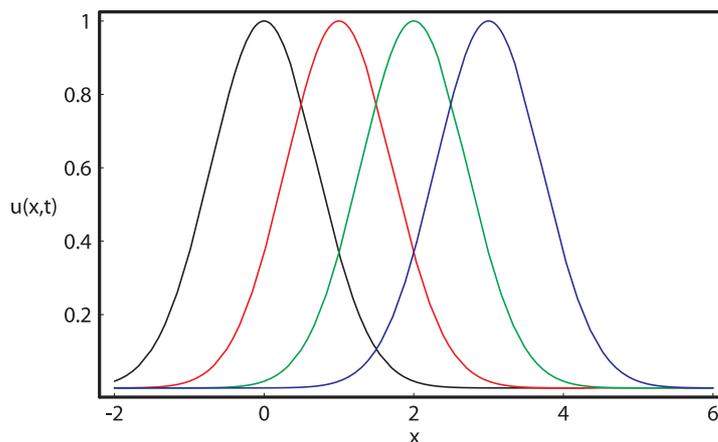


Figura 6.1: Soluzione dell'equazione di trasporto (3.17) con la condizione iniziale (6.2).

$$\begin{cases} dt/d\tau = 1 \\ dx/d\tau = v \\ dz/d\tau = 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

mentre la rappresentazione parametrica (3.5) della curva Γ diventa in questo caso

$$\begin{cases} t = 0 \\ x = s \\ z = h(s). \end{cases}$$

La soluzione del sistema caratteristico (3.6), con condizioni iniziali $t(s, 0) = 0$, $x(s, 0) = s$, $z(s, 0) = h(s)$, è in questo caso

$$\begin{cases} t(s, \tau) = \tau \\ x(s, \tau) = v\tau + s \\ z(s, \tau) = h(s). \end{cases}$$

Eliminando τ ed s dalle equazioni, otteniamo

$$\begin{cases} \tau = t \\ s = x - vt \end{cases}$$

e sostituendo nell'equazione per z , abbiamo la soluzione

$$z = u(x, t) = h(s(x, t)) = h(x - vt),$$

che riportiamo nella figura 6.1 con la condizione iniziale

$$h(x) = e^{-x^2}. \quad (6.2)$$

Eliminando soltanto τ dalle prime due equazioni, otteniamo l'equazione della famiglia delle proiezioni caratteristiche, $x = vt + s$, dove a ciascun valore del parametro s corrisponde una curva della famiglia.

Esempio 6.1.2 Come secondo esempio, consideriamo l'equazione (3.18) dell'esempio 3.4.2

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = u,$$

con la condizione iniziale $u(0, x) = h(x)$. Le curve caratteristiche sono date dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} dt/d\tau = 1 \\ dx/d\tau = v \\ dz/d\tau = z \end{cases}$$

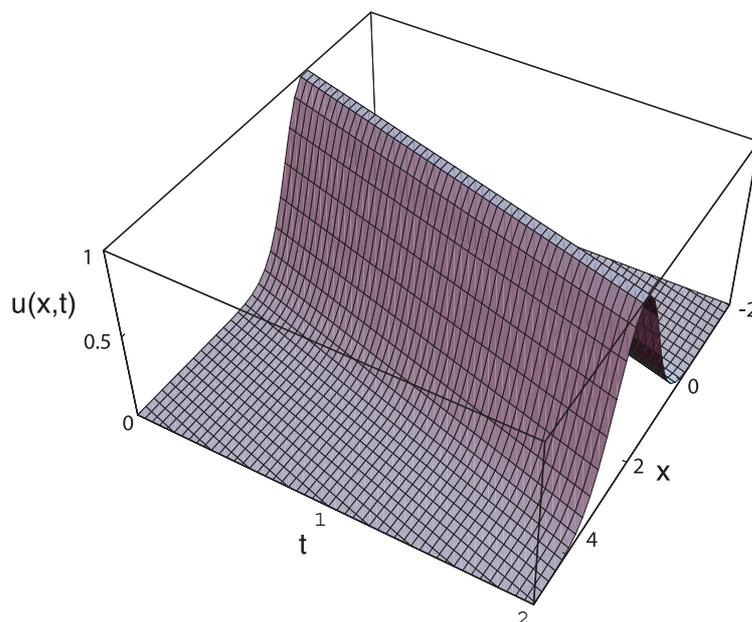


Figura 6.2: Superficie integrale per l'equazione di trasporto (3.17) con la condizione iniziale (6.2).

mentre la rappresentazione parametrica (3.5) della curva Γ diventa in questo caso

$$\begin{cases} t = 0 \\ x = s \\ z = h(s). \end{cases}$$

La soluzione del sistema caratteristico (3.6), con condizioni iniziali $t(s, 0) = 0$, $x(s, 0) = s$, $z(s, 0) = h(s)$, è in questo caso

$$\begin{cases} t(s, \tau) = \tau \\ x(s, \tau) = v\tau + s \\ z(s, \tau) = h(s)e^\tau. \end{cases}$$

Eliminando τ ed s dalle equazioni, otteniamo

$$\begin{cases} \tau = t \\ s = x - vt \end{cases}$$

e sostituendo nell'equazione per z , abbiamo la soluzione

$$z = u(x, t) = h(s(x, t))e^{\tau(x, t)} = h(x - vt)e^t,$$

che riportiamo nella figura 6.3 per la condizione iniziale (6.2). La famiglia delle proiezioni caratteristiche è la stessa dell'esempio precedente.

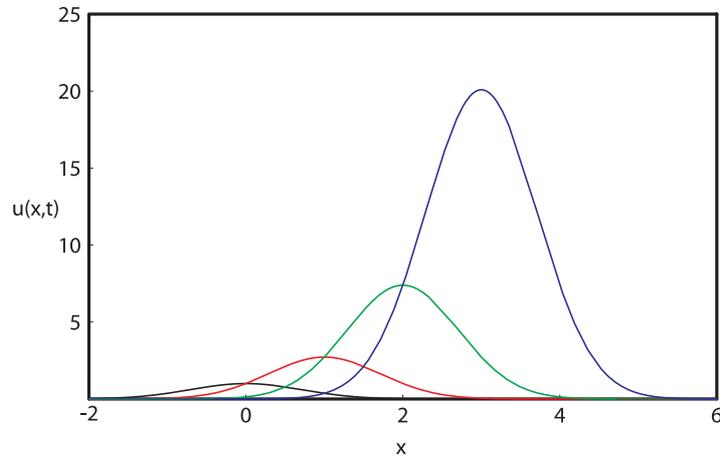


Figura 6.3: Soluzione dell'equazione (3.18) con la condizione iniziale (6.2).

Esempio 6.1.3 Consideriamo ora l'equazione (3.19) dell'esempio 3.4.3,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = x,$$

con la condizione iniziale $u(0, x) = h(x)$. Il sistema caratteristico è dato da

$$\begin{cases} dt/d\tau = 1 \\ dx/d\tau = v \\ dz/d\tau = x \end{cases} \quad (6.3)$$

mentre la rappresentazione parametrica (3.5) della curva Γ diventa in questo caso

$$\begin{cases} t = 0 \\ x = s \\ z = h(s). \end{cases}$$

La soluzione del sistema caratteristico (3.6), con condizioni iniziali $t(s, 0) = 0$, $x(s, 0) = s$, $z(s, 0) = h(s)$, è in questo caso

$$\begin{cases} t(s, \tau) = \tau \\ x(s, \tau) = v\tau + s \\ z(s, \tau) = v\tau^2/2 + s\tau + h(s). \end{cases}$$

Eliminando τ ed s dalle equazioni, otteniamo

$$\begin{cases} \tau = t \\ s = x - vt \end{cases}$$

e sostituendo nell'equazione per z , abbiamo la soluzione

$$z = u(x, t) = v \frac{t^2}{2} + (x - vt)t + h(x - vt).$$

La famiglia delle proiezioni caratteristiche è la stessa degli esempi precedenti.

Esempio 6.1.4 Consideriamo ora il seguente problema di Cauchy per un'equazione differenziale lineare del primo ordine: sia

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + (x^2 + y) \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{y}{x} - x \right) u = 1$$

con la condizione al contorno $u(1, y) = 0$. I coefficienti a , b e c che compaiono nella forma generale (3.2) e (3.3) sono, per questo esempio, $a = a(x, y) = x$, $b = b(x, y) = x^2 + y$ e $c = c(x, y, u) = 1 - (y/x - x)u$. Il sistema caratteristico (3.3) è quindi

$$\begin{cases} dx/d\tau = x \\ dy/d\tau = x^2 + y \\ dz/d\tau = 1 - (y/x - x)z \end{cases}$$

mentre la rappresentazione parametrica (3.5) della curva Γ diventa in questo caso

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = s \\ z = 0 \end{cases}$$

La soluzione del sistema caratteristico (3.6), con condizioni iniziali $x(s, 0) = 1$, $y(s, 0) = s$, $z(s, 0) = 0$, è in questo caso

$$\begin{cases} x(s, \tau) = e^\tau \\ y(s, \tau) = e^{2\tau} + (s - 1)e^\tau \\ z(s, \tau) = [1 - e^{(1-s)\tau}] / (s - 1). \end{cases}$$

Eliminando τ ed s dalle prime due equazioni, otteniamo la soluzione

$$z = u(x, y) = \frac{x}{y - x^2} \left[1 - x^{(x^2 - y)/x} \right].$$

Eliminando invece τ dalle prime due equazioni soltanto, otteniamo l'equazione della famiglia delle proiezioni caratteristiche $y = x^2 + (s - 1)x$.

Esempio 6.1.5 (Equazione di Burgers) Vediamo ora di applicare il metodo di questa sezione ad un esempio non lineare: l'equazione di Burgers (3.20)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

con la condizione iniziale $u(0, x) = h(x)$. Il sistema caratteristico è dato da

$$\begin{cases} dt/d\tau = 1 \\ dx/d\tau = z \\ dz/d\tau = 0 \end{cases} \quad (6.4)$$

mentre la rappresentazione parametrica (3.5) della curva Γ è

$$\begin{cases} t &= 0 \\ x &= s \\ z &= h(s). \end{cases}$$

La soluzione del sistema caratteristico, con condizioni iniziali $t(s, 0) = 0$, $x(s, 0) = s$, $z(s, 0) = h(s)$, è

$$\begin{cases} t(s, \tau) &= \tau \\ x(s, \tau) &= h(s)\tau + s \\ z(s, \tau) &= h(s). \end{cases} \quad (6.5)$$

L'eliminazione di τ ed s dalle equazioni è fattibile solo in modo implicito, a causa della non linearità dell'equazione. Otteniamo

$$\begin{cases} \tau &= t \\ s + th(s) &= x \end{cases} \quad (6.6)$$

e sostituendo nell'equazione per z , abbiamo la soluzione in forma implicita

$$z = z(s(x, t)) = u(x, t) = h(x - tu).$$

Da quest'ultima espressione riusciamo ad estrarre qualche proprietà notevole della soluzione. Derivando rispetto ad x abbiamo infatti

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dh}{ds} + \frac{dh}{ds} \left(-t \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

ovvero

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dh/ds}{1 + tdh/ds} \quad (6.7)$$

dove, nelle due ultime uguaglianze, la variabile s prende il valore $s = x - tu$. Vediamo dunque che, se $dh/dx < 0$ in qualche intervallo del dominio, è possibile che esista un tempo $\bar{t} = -1/h'(s_0)$, per un qualche s_0 , tale che la derivata $\partial u/\partial x$ diventi infinita. In corrispondenza a tale istante di tempo \bar{t} , si dice che la soluzione u subisce un fenomeno di *catastrofe* (nel gradiente). Nell'esempio 6.4.1, illustreremo questo fenomeno per una scelta particolare della funzione h .

6.2 Metodo delle caratteristiche

Il metodo delle caratteristiche consiste nel valutare la variazione della funzione incognita sulle curve caratteristiche ed integrare l'equazione lungo di esse. Il metodo si applica bene quando i coefficienti a e b dell'equazione differenziale

(3.2) non dipendono da u . In caso contrario, il metodo è ancora teoricamente corretto, ma il suo utilizzo per ottenere la soluzione risulta molto più complicato. Il metodo delle caratteristiche è del tutto equivalente al metodo esposto nella sezione precedente, che abbiamo chiamato metodo diretto per la soluzione del problema di Cauchy. Ne descriviamo brevemente i tratti essenziali e lo illustriamo con qualche esempio. Sia

$$a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u) \quad (6.8)$$

l'equazione differenziale da risolvere e sia

$$\begin{cases} x = x(\tau) \\ y = y(\tau) \\ z = z(\tau) \end{cases} \quad (6.9)$$

la rappresentazione parametrica di una curva caratteristica. Se indichiamo con

$$U(\tau) = u(x(\tau), y(\tau)).$$

i valori assunti dalla funzione u lungo la caratteristica, la variazione di U lungo la caratteristica stessa è data da

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\tau} &= a(x(\tau), y(\tau)) \frac{\partial u}{\partial x}(x(\tau), y(\tau)) + b(x(\tau), y(\tau)) \frac{\partial u}{\partial y}(x(\tau), y(\tau)) = \\ &= c(x(\tau), y(\tau), U) = C(\tau, U). \end{aligned}$$

L'equazione differenziale alle derivate parziali (6.8) per la funzione $u(x, y)$ è stata così ridotta ad un'equazione differenziale ordinaria per la funzione $U(\tau)$. Sia $U = U(\tau, \delta)$ l'integrale generale di questa equazione. Per determinare la costante d'integrazione δ , dobbiamo usare il dato di Cauchy (3.5) per la funzione u sulla curva Γ . Ad esempio, se vogliamo trovare la soluzione u nel punto (x, y) del piano, dobbiamo considerare la curva caratteristica passante per (x, y) e percorrerla all'indietro fino ad incontrare la curva Γ . La formalizzazione generale del metodo è, da questo punto in poi, poco significativa, e quindi lo vedremo caso per caso negli esempi. Va comunque menzionato che, siccome ora le variabili x ed y indicano il punto del piano nel quale si cerca la soluzione, e non il punto generico sulla caratteristica, è opportuno indicare il punto generico sulla caratteristica con delle nuove variabili, ξ , η e ζ . In realtà è sufficiente considerare le proiezioni caratteristiche sul piano (x, y) , quindi ometteremo la variabile ζ d'ora in poi. Riscriviamo dunque il sistema caratteristico (3.3), limitatamente alle prime due equazioni, al modo seguente:

$$\begin{cases} d\xi/d\tau = a(\xi, \eta) \\ d\eta/d\tau = b(\xi, \eta). \end{cases} \quad (6.10)$$

Nel seguito, indicheremo con $\xi(\tau, x, y)$ ed $\eta(\tau, x, y)$ la soluzione del sistema

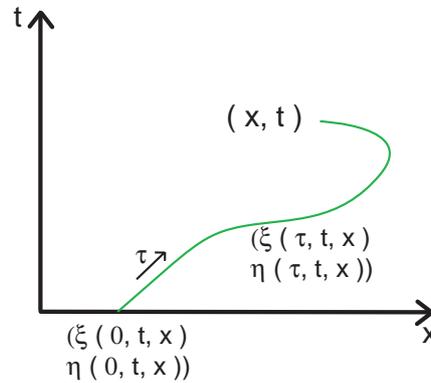


Figura 6.4: Caratteristica per un problema evolutivo.

(6.10) che passa per (x, y) . La condizione di passaggio per (x, y) si traduce in un insieme di condizioni iniziali per il sistema (6.10), che vedremo nei vari esempi. Nel caso dei problemi di evoluzione temporale (3.10)-(3.11), tali condizioni si riducono a $\xi(t, t, x) = x$ con $\tau = t$. Nella figura 6.4 illustriamo la situazione per il problema evolutivo.

Esempio 6.2.1 Consideriamo nuovamente l'equazione (3.17) del trasporto libero

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

con la condizione iniziale $u(x, 0) = h(x)$ e sia $\xi(\tau, t, x)$ la soluzione del sistema caratteristico (6.1) con la condizione iniziale $\xi(t, t, x) = x$: $\xi = x + v(\tau - t)$. L'equazione (3.17), esprime semplicemente la variazione della funzione u lungo la caratteristica, e la possiamo riscrivere nella forma

$$\frac{dU}{d\tau} = 0 \tag{6.11}$$

che è la forma che l'equazione (3.17) prende in un sistema di riferimento viaggiante con velocità v . Il membro di sinistra di questa equazione dá la derivata totale della funzione u lungo la caratteristica e l'equazione stessa esprime il fatto che u rimane costante sulla caratteristica. La soluzione si può allora formalmente scrivere come

$$u(x, t) = u(\xi(x, t, 0), 0)$$

e cioè

$$u(x, t) = u(x - vt, 0).$$

Esempio 6.2.2 Come secondo esempio, consideriamo nuovamente l'equazione (3.18) dell'esempio 3.4.2

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = u,$$

con la condizione iniziale $u(0, x) = h(x)$. Le curve caratteristiche sono date dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} dt/d\tau = 1 \\ dx/d\tau = v \\ dz/d\tau = z \end{cases}$$

e l'equazione differenziale che esprime la variazione di u lungo la caratteristica diventa

$$\frac{dU}{d\tau} = U,$$

la cui soluzione generale è

$$U(\tau) = U(0)e^\tau.$$

La soluzione del sistema caratteristico,

$$\begin{cases} d\eta/d\tau = 1 \\ d\xi/d\tau = v, \end{cases}$$

con la condizione $\eta(t, t, x) = t$ e $\xi(t, t, x) = x$, è $\eta = \tau$ e $\xi = x + v(\tau - t)$. La soluzione è dunque

$$u(t, x) = u(\eta(0, t, x), \xi(0, t, x))e^t = h(x - vt)e^t,$$

consistente con la soluzione dell'esempio 3.4.2.

Esempio 6.2.3 Consideriamo ora l'equazione (3.19) dell'esempio 3.4.3,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = x,$$

con la condizione iniziale $u(0, x) = h(x)$. Il sistema caratteristico, scritto direttamente nelle variabili ξ ed η è

$$\begin{cases} d\eta/d\tau = 1 \\ d\xi/d\tau = v \end{cases}$$

cioè lo stesso dell'esempio precedente. La caratteristica che passa per (t, x) è pertanto ancora $\eta = \tau$ e $\xi = x + v(\tau - t)$. La variazione di u lungo la caratteristica è data ora da

$$\frac{dU}{d\tau} = \xi(\tau, t, x) = x + v(\tau - t),$$

la cui soluzione è

$$U(\tau) = (x - vt)\tau + v\frac{\tau^2}{2} + U(0)$$

ovvero, con $\tau = t$,

$$u(t, x) = (x - vt)t + v\frac{t^2}{2} + h(x - vt),$$

consistente con la soluzione ottenuta nell'esempio 3.4.3.

6.3 Metodo delle trasformate di Fourier

Il metodo delle trasformate di Fourier si applica quasi esclusivamente alle equazioni lineari a coefficienti costanti. In presenza di termini non lineari o di coefficienti variabili, il suo utilizzo può talvolta essere possibile con modifiche od accordamenti particolari, da considerare caso per caso.

Esempio 6.3.1 Consideriamo nuovamente l'equazione del trasporto libero (3.17)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

nel dominio $-\infty < x < +\infty$ e con la condizione iniziale $u(x, 0) = h(x)$. Introduciamo innanzitutto la trasformata di Fourier della funzione incognita u seguendo la definizione usuale

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, t) e^{ikx} dk,$$

con l'inversa

$$\hat{u}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-ikx} dx,$$

sotto l'ipotesi che la funzione u ammetta trasformata di Fourier per ogni t . Operando con la trasformata di Fourier direttamente sull'equazione (3.17) otteniamo un'equazione per \hat{u} ,

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + ikv\hat{u} = 0, \quad (6.12)$$

di facile risoluzione:

$$\hat{u}(k, t) = \hat{u}(k, 0) e^{-ikvt} = \hat{h}(k) e^{-ikvt}, \quad (6.13)$$

dove $\hat{h}(k)$ è la trasformata di Fourier di $h(x)$. Antitrasformando:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, t) e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, 0) e^{ik(x-vt)} dk = u(x - vt, 0) = h(x - vt), \end{aligned}$$

che fornisce nuovamente il risultato dell'esempio 6.1.1.

Esempio 6.3.2 Consideriamo ora l'equazione (3.18) dell'esempio 3.4.2

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = u,$$

con la condizione iniziale $u(x, 0) = h(x)$. Introduciamo innanzitutto la trasformata di Fourier della funzione incognita u ,

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, t) e^{ikx} dk,$$

con l'inversa

$$\hat{u}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-ikx} dx,$$

sotto l'ipotesi che la funzione u ammetta trasformata di Fourier per ogni t . Operando con la trasformata di Fourier direttamente sull'equazione (3.18) otteniamo un'equazione per \hat{u} :

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + ikv \hat{u} = \hat{u},$$

ovvero

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + (ikv - 1)\hat{u} = 0.$$

La soluzione è

$$\hat{u}(k, t) = \hat{u}(k, 0) e^{(1-ikv)t} = \hat{h}(k) e^{(1-ikv)t},$$

dove $\hat{h}(k)$ è la trasformata di Fourier di $h(x)$. Antitrasformando:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, t) e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, 0) e^{ik(x-vt)} e^t = u(x - vt, 0) e^t = h(x - vt) e^t, \end{aligned}$$

che è la stessa soluzione ottenuta con gli altri metodi.

Le equazioni differenziali degli altri esempi svolti nelle sezioni precedenti non si possono affrontare con il metodo delle trasformate di Fourier.

6.4 Ulteriori applicazioni

Esempio 6.4.1 (L'equazione di Burgers) In questo esempio, vogliamo illustrare la soluzione dell'equazione di Burgers (3.20)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

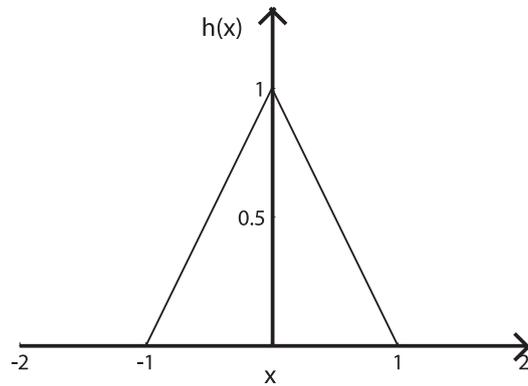


Figura 6.5: Condizione iniziale $h(x)$ per l'equazione di Burgers.

con una condizione iniziale particolare, che permette la risoluzione esplicita del sistema caratteristico (6.4) o (6.5).

Sia dunque

$$h(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases} \quad (6.14)$$

mostrata nella figura 6.5. L'equazione (6.6), che dà la soluzione del sistema caratteristico (6.4) ancora in forma implicita, diventa dunque

$$\begin{cases} \tau & = & t \\ h(s) & = & (x - s)/t \end{cases} \quad (6.15)$$

con $h(s)$ data dalla (6.14).

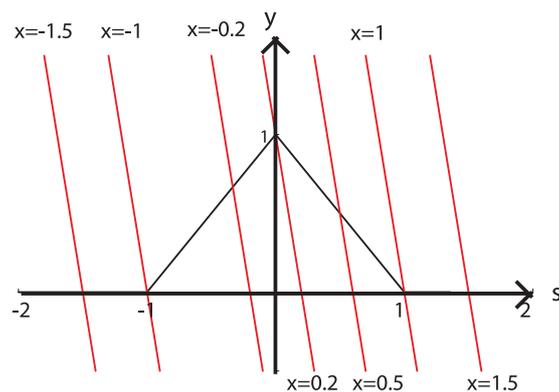


Figura 6.6: Equazione di Burgers: soluzione grafica del sistema caratteristico per $t = 0.2$.

Determiniamo il valore di s aiutandoci con un metodo grafico. La seconda equazione del sistema, che dovrebbe dare s in funzione di x e t , può essere

considerata come l'equazione risolutiva del sistema

$$\begin{cases} y = h(s) \\ y = (x - s)/t \end{cases}$$

che fornisce le intersezioni della curva $y = h(s)$, fissa nel piano (s, y) con la curva $y = (x - s)/t$, che è una retta del piano (s, y) , la cui configurazione dipende da x e da t . Consideriamo dapprima il caso di t piccolo (quantificheremo in seguito "quanto" piccolo). Per questi valori di t , la retta in questione forma un angolo grande e negativo con l'asse s , ed al variare di x otteniamo un fascio di rette parallele, ciascuna delle quali interseca la funzione $h(s)$ in uno ed un solo punto, come mostrato in figura 6.6. Le intersezioni ad $-1 < s < 0$ sono pertanto date dalla soluzione del sistema

$$\begin{cases} y = s + 1 \\ y = (x - s)/t \end{cases}$$

che è

$$s = \frac{x - t}{t + 1}. \quad (6.16)$$

Questa soluzione per s esiste fino a quando $-1 < (x - t)/(t + 1) < 0$, ovvero $-1 < x < t$. Per $x = t$ si ha $s = 0$ e, per valori di x tali che $x > t$ si devono considerare le intersezioni ad $0 < s < 1$, date dalla soluzione del sistema

$$\begin{cases} y = -s + 1 \\ y = (x - s)/t \end{cases}$$

che è

$$s = \frac{t - x}{t - 1}, \quad (6.17)$$

che esiste fino a quando $0 < (x - t)/(1 - t) < 1$, ovvero $t < x < 1$. Le intersezioni con $|s| > 1$ ed $h(s) = 0$ corrispondono ai valori di x tali che $|x| > 1$. In conclusione, per questi valori "piccoli" di t , la soluzione $u(x, t) = z(s(x, t), \tau(x, t)) = h(s(x, t))$ dell'equazione di Burgers data dal sistema (6.5), diventa:

- per $-1 < x < t$, s è negativo ed è dato dalla (6.16), pertanto $h(s) = 1 + s = (x + 1)/(t + 1)$ ed abbiamo

$$u(x, t) = \frac{x + 1}{t + 1}; \quad (6.18)$$

- per $t < x < 1$, s è positivo ed è dato dalla (6.17), pertanto $h(s) = 1 - s = (x - 1)/(t - 1)$ ed abbiamo

$$u(x, t) = \frac{x - 1}{t - 1}; \quad (6.19)$$

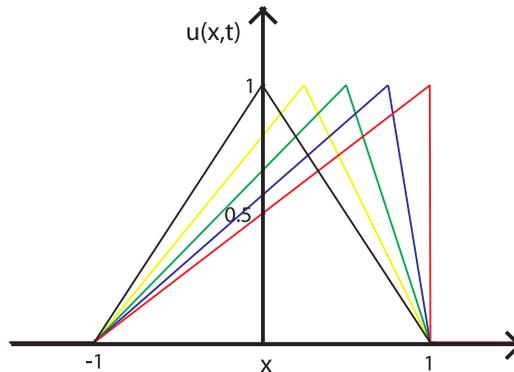


Figura 6.7: Soluzione dell'equazione di Burgers (3.20) per $t = 0, 0.25, 0.5, 0.75$ e 1 .

- per $|x| > 1$ invece abbiamo

$$u(x, t) = 0. \quad (6.20)$$

La soluzione (6.18)-(6.20) è illustrata nella figura 6.7, per diversi valori di t : il punto angoloso nel massimo della funzione si sposta verso destra al crescere di t , la pendenza della retta a sinistra del massimo diminuisce e la pendenza della retta a destra aumenta. Come t si avvicina ad 1 , la pendenza tende all'infinito ed in corrispondenza a $t = 1$ la soluzione subisce un salto per $x = 1$, cioè diventa discontinua. Questo è un esempio di un fenomeno chiamato *catastrofe*. È chiaro, dunque, che la soluzione che abbiamo costruito considerando valori di t "piccoli" vale fintanto che $t < 1$. Per $t > 1$, la pendenza delle rette di equazione $y = (x - s)/t$ è più vicina all'orizzontale e, come si vede dalla figura 6.8, le intersezioni con la funzione $y = h(s)$ possono essere multiple e la soluzione in senso convenzionale non esiste.

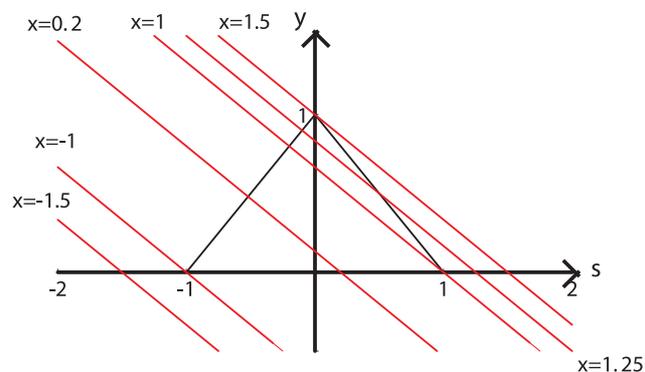


Figura 6.8: Equazione di Burgers: soluzione grafica del sistema caratteristico per $t = 1.5$.

Esempio 6.4.2 (Il Problema del traffico) Le equazioni differenziali alle derivate parziali del prim'ordine stanno alla base di alcuni modelli che descrivono il traffico veicolare su una strada. Consideriamo qui un modello unidimensionale molto elementare e primitivo. Supponiamo di avere un flusso di automobili in una sola direzione lungo un tratto di strada, che supponiamo privo di entrate o uscite; non consideriamo inoltre la possibilità che le automobili eseguano sorpassi. Come si vede, un modello così costruito è molto elementare e poco realistico; esso è tuttavia utile per capire come un modello continuo descriva alcuni fenomeni elementari. Ed è ovviamente utile ed interessante come applicazione delle tecniche risolutive delle equazioni del prim'ordine. Sia x un'ascissa introdotta lungo la strada e sia t il tempo. Le grandezze fondamentali in questo modello sono la densità dei veicoli lungo la strada, $\rho(x, t)$, e la loro velocità $v(x, t)$. Sotto le condizioni enunciate sopra, se consideriamo un tratto di strada compreso tra le ascisse $x - \Delta x/2$ e $x + \Delta x/2$, la variazione del numero di macchine in quel tratto nell'unità di tempo è data dalla differenza tra il flusso entrante ad $x - \Delta x/2$ ed il flusso uscente ad $x + \Delta x/2$. Il numero di macchine nel tratto considerato è $\rho(x, t)\Delta x$, e quindi, indicando con $\Gamma(x, t)$ il flusso, abbiamo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x = \Gamma(x - \Delta x/2, t) - \Gamma(x + \Delta x/2, t)$$

che, al limite per $\Delta x \rightarrow 0$, diventa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial x}. \quad (6.21)$$

Il flusso Γ è puramente convettivo ed è dato da $\Gamma(x, t) = \rho(x, t)v(x, t)$; per ottenere l'equazione di evoluzione per la densità ρ , dobbiamo dunque esprimere la velocità $v(x, t)$ in funzione di $\rho(x, t)$. Il modello più semplice ed intuitivo che possiamo formulare prevede che quando la densità delle macchine è nulla, cioè $\rho = 0$, le (poche !!) macchine presenti viaggiano alla massima velocità consentita v_M , mentre quando la densità raggiunge un valore critico (o massimo) ρ_c le macchine non si muovono, cioè $v = 0$. Se supponiamo che v varii linearmente con ρ tra $\rho = 0$ e $\rho = \rho_c$, perveniamo all'espressione

$$v(x, t) = v_M \left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right). \quad (6.22)$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione del traffico (6.21), otteniamo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_M \left(1 - 2\frac{\rho}{\rho_c}\right) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

Introducendo come incognita la funzione $u(x, t) = \rho(x, t)/\rho_c$, quest'ultima diventa

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_M (1 - 2u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (6.23)$$

che è molto simile all'equazione di Burgers¹. Sia infine $u(x, 0) = h(x)$ la condizione iniziale. Il sistema caratteristico è

$$\begin{cases} dt/d\tau = 1 \\ dx/d\tau = v_M(1 - 2z) \\ dz/d\tau = 0 \end{cases} \quad (6.24)$$

mentre la rappresentazione parametrica (3.5) della curva Γ è

$$\begin{cases} t = 0 \\ x = s \\ z = h(s). \end{cases}$$

La soluzione del sistema caratteristico, con condizioni iniziali $t(s, 0) = 0$, $x(s, 0) = s$, $z(s, 0) = h(s)$, è

$$\begin{cases} t(s, \tau) = \tau \\ x(s, \tau) = v_M(1 - 2h(s))\tau + s \\ z(s, \tau) = h(s). \end{cases} \quad (6.25)$$

L'eliminazione di τ ed s dalle equazioni è fattibile solo in modo implicito, a causa della non linearità dell'equazione. Otteniamo

$$\begin{cases} \tau = t \\ s + tv_M(1 - 2h(s)) = x \end{cases} \quad (6.26)$$

Sostituendo il valore di s così trovato nell'equazione per z , abbiamo la soluzione, ancora in forma implicita,

$$z = h(s(x, t)) = u(x, t).$$

Per determinare il valore di s in funzione di x e t , aiutiamoci nuovamente con un metodo grafico. La seconda equazione del sistema (6.25) può essere scritta come

$$h(s) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x - s}{v_M t} \right) \quad (6.27)$$

che può essere considerata l'equazione risolutiva del sistema

$$\begin{cases} y = h(s) \\ y = y_1(s) \end{cases}$$

con

$$y_1(s) \equiv \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x - s}{v_M t} \right).$$

¹Lo studente è invitato a trasformarla nell'equazione di Burgers con un opportuno cambiamento di variabili.

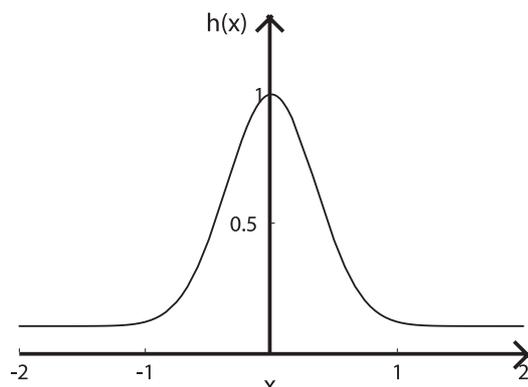


Figura 6.9: Condizione iniziale $h(x)$ per l'equazione del traffico (prima applicazione).

La seconda equazione del sistema rappresenta la retta $y = y_1(s)$ del piano (s, y) , la cui configurazione dipende da x e da t , e le sue intersezioni con la curva $y = h(s)$ danno la soluzione grafica del problema.

Consideriamo ora, come prima applicazione del modello, la condizione iniziale

$$h(x) = \alpha + (\beta - \alpha)e^{-(x/\delta)^2},$$

corrispondente ad un intasamento formatosi sulla strada in corrispondenza al valore $x = 0$. Per $|x|$ grande (lontano dall'intasamento) la densità tende ad un valore asintotico, $\rho = \alpha\rho_c$, mentre essa raggiunge il massimo, $\rho = \beta\rho_c$, nell'origine. Ovviamente, supponiamo che sia $\beta < 1$. Questa condizione iniziale è riportata nella figura 6.9 per $\alpha = 0.1$, $\beta = 1$ e $\delta = 0.5$. Come abbiamo fatto nel caso dell'equazione di Burgers, consideriamo dapprima il caso di t piccolo. Le rette $y = y_1(s)$ hanno pendenza quasi verticale e positiva. La risoluzione grafica del problema, con $v_M = 50$ km/h, è illustrata in figura 6.10, dove si vede che, per ciascun valore di x , si ha una ed una sola intersezione tra la retta $y = y_1(s)$ e la curva $y = h(s)$. Notiamo che il massimo del profilo di densità, che si raggiunge quando l'intersezione avviene per $s = 0$, si sposta a valori negativi di x , sempre più lontani dall'origine al crescere di t .

Al crescere di t , la pendenza delle rette $y = y_1(s)$ diminuisce e ad un tempo $t = T$ esiste una retta della famiglia $y = y_1(s)$ che risulta tangente alla curva $y = h(s)$. Questo succede quando l'equazione $h'(s) = y_1'(s)$ ammette soluzione ovvero, esplicitando i termini,

$$-2\frac{\beta - \alpha}{\delta^2}se^{-(s/\delta)^2} = \frac{1}{2v_M t} \quad (6.28)$$

I due membri di questa equazione sono illustrati graficamente nella figura 6.11. Per t piccolo, la retta che rappresenta il membro di destra non interseca la

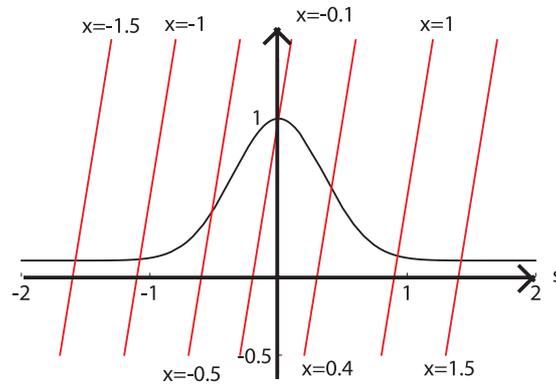


Figura 6.10: Equazione del traffico (prima applicazione): soluzione grafica del sistema caratteristico per $t = 0.002$. Le rette corrispondono ad $x = -1.5, -1, -0.5, -0.1, 0.4, 1$ ed 1.5

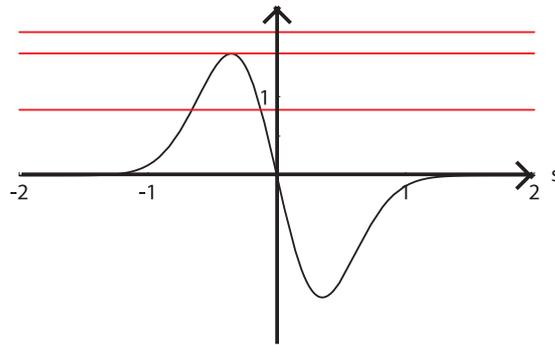


Figura 6.11: Equazione del traffico (prima applicazione): condizione di tangenza. le rette rosse corrispondono a $t = 0.0055, 0.00646$ e 0.012 .

curva; al crescere di t la retta si avvicina all'asse orizzontale e, per $t = T$, si ha la condizione di tangenza. Un semplice studio della funzione $y = h'(s)$ mostra che

$$T = \frac{1}{2v_M} \sqrt{\frac{e}{2}} \frac{\delta}{\beta - \alpha}.$$

Per questo valore di t , il profilo $u(x, T)$ acquisisce una pendenza infinita, si ha cioè,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, T) = \infty,$$

dove $x = x_0$ è il valore di x al quale avviene l'intersezione tangente. Questo è un esempio di catastrofe, del tutto analoga alla catastrofe che abbiamo visto con l'equazione di Burgers, vedi (6.7). Lo possiamo anche dimostrare in modo

analogo, a partire dalla soluzione formale $u(x, t) = h(s(x, t))$; siccome

$$\frac{\partial u}{\partial x} = h'(s(x, t)) \frac{\partial s}{\partial x},$$

dobbiamo valutare $\partial s / \partial x$. Derivando la seconda equazione del sistema (6.26) abbiamo

$$\frac{\partial s}{\partial x} - 2tv_M h'(s) \frac{\partial s}{\partial x} = 1$$

ovvero

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{1 - 2tv_M h'(s)}$$

che ha una singolarità quando $1 - 2tv_M h'(s) = 0$, che è proprio l'equazione (6.28) studiata sopra.

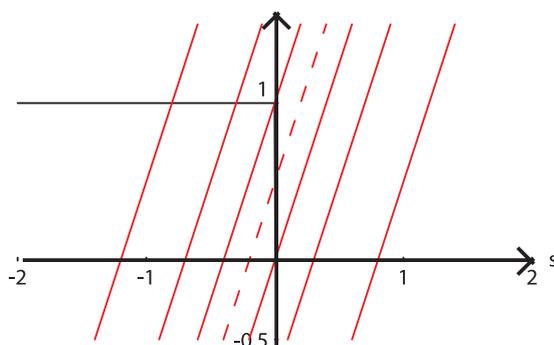


Figura 6.12: Equazione del traffico (seconda applicazione): risoluzione grafica. Le rette rosse corrispondono ad $x = -1, -0.5, -0.2, 0, 0.2, 0.5$ ed 1 .

La comparsa della singolarità non è ovviamente una caratteristica della situazione reale, ma è soltanto una conseguenza del modello, molto approssimato e molto primitivo, che abbiamo adottato. Un modello del traffico più sofisticato e più realistico dovrebbe tener conto di molti altri fattori, tra cui, ad esempio, il tempo di reazione dei conducenti.

Consideriamo ora una seconda applicazione, con una condizione iniziale che corrisponde alla distribuzione veicolare in prossimità di un semaforo rosso, subito prima che questo passi al verde. Sia $x = 0$ la posizione del semaforo. La condizione iniziale, in questo caso, prevede una densità massima ρ_c per $x < 0$ ed una densità nulla, $\rho = 0$, per $x > 0$, quindi

$$h(x) = \Theta(-x), \tag{6.29}$$

con $\Theta(x)$ la funzione di Heavyside. L'equazione risolvente (6.27) diviene ora

$$\Theta(-s) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x-s}{v_M t} \right), \tag{6.30}$$

la cui risoluzione grafica è illustrata in figura 6.12 per $t = 0.004$. Come nel caso precedente, la pendenza delle rette è positiva e diminuisce al crescere di t , mentre il valore di x determina le intercette delle rette con gli assi coordinati: al crescere di x le rette si spostano verso destra nel disegno. Per $x < 0$ e grande in valore assoluto, l'intersezione con la funzione $h(s)$ avviene per $s < 0$ con $h(s) = 1$. Analogamente, per $x > 0$ e grande, abbiamo $s > 0$ con $h(s) = 0$. Il valore massimo di x per cui si ha $h(s) = 1$ è dato dall'equazione (6.30) ponendo $s = 0$ con $\Theta(0) = 1$; si ottiene così $x = -v_M t$. Analogamente, il valore minimo di x per cui si ha $h(s) = 0$ si ottiene dalla stessa (6.30) ponendo $s = 0$ con $\Theta(0) = 0$; si ottiene così $x = v_M t$. Riassumendo, abbiamo

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & x < -v_M t \\ 0, & x > v_M t \end{cases} \quad (6.31)$$

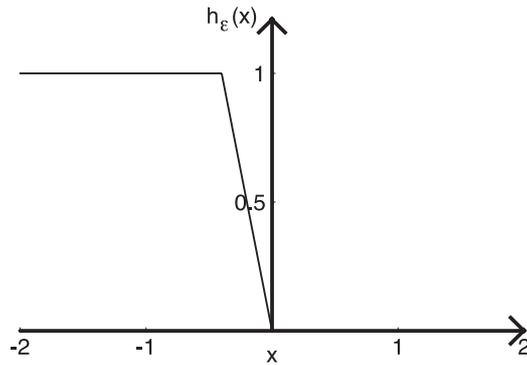


Figura 6.13: Equazione del traffico (seconda applicazione): condizione iniziale modificata $h_\epsilon(x)$

Rimane da determinare la soluzione per $-v_M t < x < v_M t$; per questi valori di x , le soluzioni del sistema risolvente (6.30) corrispondono alle intersezioni di rette quali quella tratteggiata sul disegno con la condizione iniziale e sono quindi indeterminate. Per determinare la soluzione in questo intervallo di valori di x facciamo ricorso ad un artificio, modificando leggermente la condizione iniziale. Invece della funzione $h(x)$ data dalla (6.29), consideriamo la condizione iniziale di figura 6.13 e data da

$$h_\epsilon(x) = \begin{cases} 1, & x < -\epsilon \\ -x/\epsilon, & -\epsilon < x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases} \quad (6.32)$$

e sia $u_\epsilon(x, t)$ la soluzione dell'equazione del traffico con la condizione iniziale (6.32). Siccome $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_\epsilon(x) = h(x)$, se il limite non è singolare avremo anche $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon(x, t) = u(x, t)$ ed avremo così la soluzione del problema originario

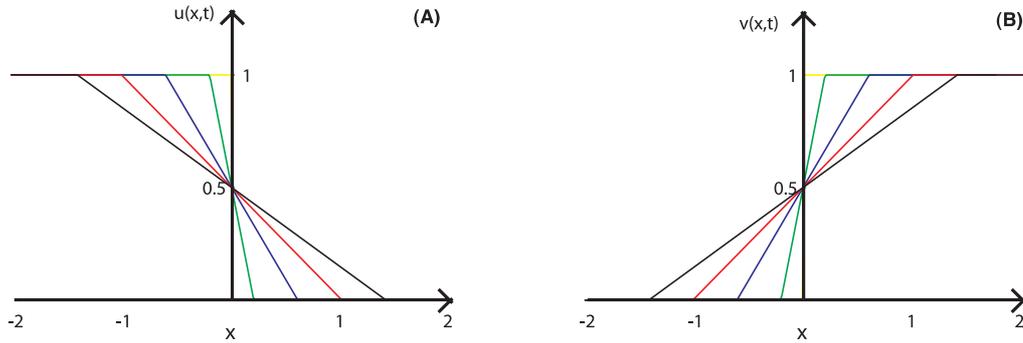


Figura 6.14: Equazione del traffico (seconda applicazione): (A) soluzione $u(x, t)$ e (B) velocità $v(x, t)/v_M$ per $t = 0$ (giallo), 0.001 (verde), 0.003 (blu), 0.005 (rosso), 0.007 (nero) ore

nell'intervallo $-v_M t < x < v_M t$. L'equazione risolvente (6.27) corrispondente alla condizione iniziale h_ϵ è:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x-s}{v_M t} \right), & s < -\epsilon \\ -\frac{s}{\epsilon} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x-s}{v_M t} \right), & -\epsilon < s < 0 \\ 0 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x-s}{v_M t} \right), & s > 0 \end{aligned}$$

la cui soluzione è

$$s = \begin{cases} x + v_M t, & x < -v_M t - \epsilon \\ \epsilon(x - v_M t)/(2v_M t + \epsilon), & -v_M t - \epsilon < x < v_M t \\ x - v_M t, & x > v_M t. \end{cases}$$

La soluzione $u_\epsilon(x, t) = h_\epsilon(s(x, t))$ diventa allora

$$u_\epsilon(x, t) = \begin{cases} 1, & x < -v_M t - \epsilon \\ -(x - v_M t)/(2v_M t + \epsilon), & -v_M t - \epsilon < x < v_M t \\ 0. & x > v_M t \end{cases}$$

Il limite $\epsilon \rightarrow 0$ è chiaramente regolare ed abbiamo (vedi figure 6.14)

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & x < -v_M t \\ -(x - v_M t)/(2v_M t), & -v_M t < x < v_M t \\ 0. & x > v_M t \end{cases} \quad (6.33)$$

L'interpretazione della soluzione è ovvia; come il semaforo passa dal rosso al verde, il blocco di macchine dietro il semaforo si svuota gradualmente e la

densità dopo il semaforo aumenta. L'andamento lineare attorno alla zona del semaforo è conseguenza della linearità e della semplicità del modello adottato; modello che comunque riesce a riprodurre il ritardo, ben noto dall'esperienza, con cui le macchine ripartono dopo lo scattare del verde: più lontano ci si trova dal semaforo, più tempo si rimane fermi prima di ripartire dopo che il semaforo è diventato verde. La velocità subisce un analogo fenomeno di ritardo: una macchina che si trova inizialmente ad una certa distanza dal semaforo rimane ferma per un intervallo di tempo, poi aumenta linearmente la sua velocità fino a raggiungere la velocità massima dopo aver oltrepassato il semaforo.

Esempio 6.4.3 (La rottura di una diga) In questo esempio, consideriamo cosa succede all'acqua di un bacino artificiale quando si verifica l'evento catastrofico della rottura della diga che trattiene l'acqua all'interno del bacino. Questo è un esempio di applicazione di un sistema di equazioni differenziali del prim'ordine alle derivate parziali. In questo corso, non abbiamo trattato organicamente i sistemi di equazioni differenziali, ma sarà sufficiente l'uso attento dei concetti finora acquisiti, unito ad un pò di intuizione fisica, per ottenere la soluzione. Ovviamente, nel formulare il modello, faremo qualche ipotesi semplificativa, che permette di scrivere equazioni differenziali semplificate.

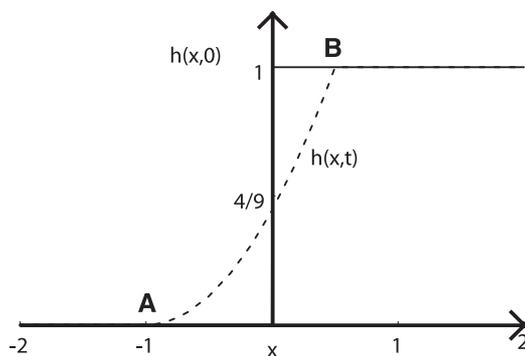


Figura 6.15: Condizione iniziale $h(x,0)/H$ (linea continua) ed andamento qualitativo della soluzione $h(x,t)/H$ (linea tratteggiata) per il problema della diga.

Consideriamo un bacino d'acqua che, all'istante iniziale, occupa la regione di spazio $\Omega = \{(x, y, z) : x > 0, -\infty < y < \infty, 0 \leq z \leq H\}$ e sia $x = 0$ la posizione della diga (vedi figura 6.15). All'istante $t = 0$ la diga si rompe e la massa d'acqua comincia a fluire nella direzione delle x negative, svuotando allo stesso tempo il bacino ad x positive. Saremo interessati a determinare la velocità di avanzamento del fronte d'acqua ad x negative e la velocità di svuotamento del bacino ad x positive. La situazione è raffigurata qualitativamente dalla linea tratteggiata nella figura 6.15, dove abbiamo indicato con A il punto di avanzamento del fronte d'acqua e con B il punto di svuotamento del bacino. Supponiamo che l'unica direzione rilevante sia quella lungo l'asse x e

supponiamo anche che la profondità della massa d'acqua lungo z sia trascurabile rispetto alla sua estensione lungo le altre direzioni. Sotto queste ipotesi, il movimento di un elemento di fluido situato alla posizione x e ad altezza z è governato dalle equazioni di "shallow water" (o dei fondali bassi)

$$\frac{\partial}{\partial t}(u + 2c) + (u + c)\frac{\partial}{\partial x}(u + 2c) = 0 \quad (6.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(u - 2c) + (u - c)\frac{\partial}{\partial x}(u - 2c) = 0, \quad (6.35)$$

dove $u = u(x, t)$ e $c = c(x, t)$ sono le funzioni incognite, con u la velocità di un elemento di fluido e $c = \sqrt{hg}$, con $h(x, t)$ la profondità e g l'accelerazione di gravità. Le condizioni iniziali sono $u(x, 0) = 0$ per ogni x e $c(x, 0) = 0$ per $x < 0$ e $c(x, 0) = \sqrt{gH} \equiv c_0$ per $x > 0$. Introducendo le variabili ausiliarie

$$\begin{aligned} v &= u + 2c \\ w &= u - 2c, \end{aligned}$$

le equazioni (6.34) e (6.35) si possono scrivere nella forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{3v + w}{4} \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{v + 3w}{4} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

cui si associano i sistemi caratteristici

$$\begin{cases} dt/d\tau = 1 \\ dx/d\tau = (3v + w)/4 \\ dv/d\tau = 0 \end{cases} \quad (6.36)$$

e

$$\begin{cases} dt/d\tau = 1 \\ dx/d\tau = (v + 3w)/4 \\ dw/d\tau = 0. \end{cases} \quad (6.37)$$

Le curve Γ delle condizioni iniziali sono date da

$$\begin{cases} t = 0 \\ x = s \\ v = v_0(s) \end{cases} \quad (6.38)$$

e

$$\begin{cases} t = 0 \\ x = s \\ w = w_0(s) \end{cases} \quad (6.39)$$

dove

$$v_0(x) = v(x, 0) = u(x, 0) + 2c(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2c_0, & x > 0 \end{cases}$$

e

$$w_0(x) = w(x, 0) = u(x, 0) - 2c(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -2c_0, & x > 0. \end{cases}$$

Sulle curve caratteristiche descritte dal sistema (6.36) la grandezza $v(x, t)$ è costante, e le chiameremo pertanto v -caratteristiche; analogamente, chiameremo w -caratteristiche le caratteristiche descritte dal sistema (6.37). I sistemi caratteristici sono non lineari, tuttavia riusciamo a risolverli facendo ricorso ad un po' di intuizione fisica. Cominciamo col determinare le curve caratteristiche su cui si muovono i punti A e B della figura, cioè il fronte di avanzamento dell'acqua ed il punto di svuotamento del bacino. Il punto A si trova ad $x < 0$ ed il punto B ad $x > 0$ e si muovono rispettivamente verso sinistra e verso destra. Ovviamente, entrambi percorrono caratteristiche che partono dall'origine. Dimostriamo prima di tutto che il punto A si trova su una w -caratteristica ed il punto B su una v -caratteristica.

Per il punto A abbiamo $c(x, t) = 0$ e pertanto $v(x, t) = w(x, t) = u(x, t)$. Supponiamo, per assurdo, che il punto A si trovi su una v -caratteristica. Ne segue che, essendo v costante su una v -caratteristica, anche w deve essere costante sulla caratteristica cui appartiene il punto A ; il sistema (6.36) si integra quindi facilmente ottenendo il sistema risolutivo

$$\begin{cases} x = vt + s \\ v = v_0(s), \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} v = (x - s)/t \\ v = v_0(s), \end{cases} \quad (6.40)$$

la cui risoluzione grafica è illustrata nella figura 6.16. Siccome cerchiamo so-

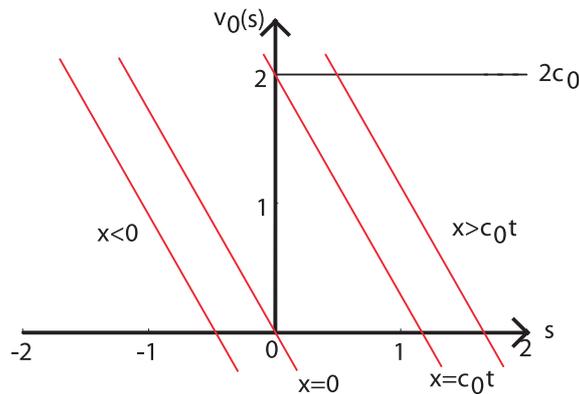


Figura 6.16: Soluzione grafica del sistema (6.40).

luzioni corrispondenti ad x negative, ed x/t è l'intercetta all'origine delle rette

parallele rappresentate dalla prima equazione del sistema risolutivo (6.40), vediamo che le rette con intercetta negativa intersecano $v_0(s)$ per valori $s < 0$, dove si ha $v_0(s) = 0$. Quindi, si dovrebbe avere $u(x, t) = v(x, t) = 0$, che non è il caso del punto A . Dunque il punto A appartiene ad una w -caratteristica. Il sistema risolutivo corrispondente al sistema caratteristico (6.37) è in questo caso

$$\begin{cases} x &= wt + s \\ w &= w_0(s), \end{cases} \quad (6.41)$$

ovvero

$$\begin{cases} w &= (x - s)/t \\ w &= w_0(s), \end{cases} \quad (6.42)$$

la cui risoluzione grafica è illustrata nella figura 6.17. Nuovamente, cerchiamo intersezioni che corrispondono ad x negative e con $w \neq 0$. La retta che cerchiamo è pertanto quella che interseca $w_0(s)$ per $s = 0$ con $w = -2c_0$. Per tale retta si ha, dal sistema risolutivo, $-2c_0 = x/t$ e quindi

$$x = -2c_0t \quad (6.43)$$

è l'equazione della caratteristica cui appartiene il punto A . Il punto A si muove pertanto verso sinistra con velocità costante pari a $-2c_0$.

Consideriamo ora il punto B . Per esso si ha $u(x, t) = 0$ e $c(x, t) = c_0$, e dunque $v(x, t) = -w(x, t) = 2c(x, t)$. Supponiamo, per assurdo, che B si trovi su una w -caratteristica. Il sistema risolutivo per le w -caratteristiche è in questo caso

$$\begin{cases} w &= 2(x - s)/t \\ w &= w_0(s). \end{cases}$$

In questo caso, cerchiamo intersezioni ad $x > 0$; nuovamente, siccome $2x/t$ è l'intercetta all'origine delle rette descritte dalla prima delle equazioni, questo deve avvenire a valori di s tali che $w_0(s) = -2c_0$. La prima di tali rette è quella che dà $s = 0$ come soluzione; sostituendo, si vede che, per tale retta, si ha $x = -c_0t$, in contraddizione col fatto che il punto B ha ascissa positiva. Dunque, B sta su una v -caratteristica. Il sistema risolutivo è in questo caso

$$\begin{cases} v &= 2(x - s)/t \\ v &= v_0(s). \end{cases}$$

e la risoluzione grafica è illustrata nuovamente nella figura 6.16. Nuovamente, cerchiamo intersezioni che corrispondono ad x positive e con $v \neq 0$. La retta che cerchiamo è pertanto quella che interseca $v_0(s)$ per $s = 0$ con $v = 2c_0$. Per tale retta si ha, dal sistema risolutivo, $2c_0 = 2x/t$ e quindi

$$x = c_0t \quad (6.44)$$

è l'equazione della caratteristica cui appartiene il punto B . Il punto B si muove pertanto verso destra con velocità costante pari a c_0 .

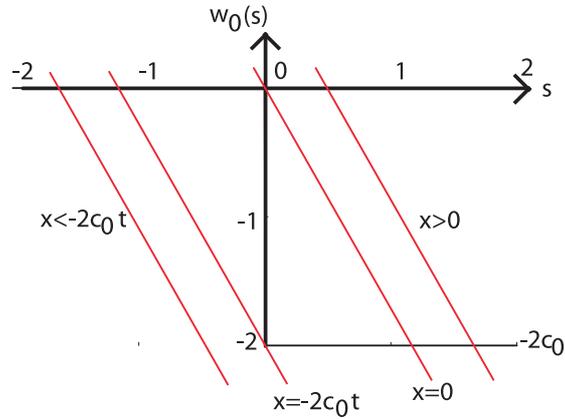


Figura 6.17: Soluzione grafica del sistema (6.42).

Abbiamo così determinato le caratteristiche sulle quali si muovono i punti A e B . Abbiamo anche ottenuto un importante risultato: su entrambe queste due caratteristiche le due grandezze v e w si conservano separatamente. Questo ci permette di affermare che v e w si conservano separatamente su *qualunque* caratteristica e che tutte le caratteristiche sono linee rette. Infatti, sia γ_1 una v -caratteristica sulla quale si conservano separatamente v e w e siano E ed F due punti su di essa (vedi figura 6.18). Siano inoltre γ_2 una seconda v -caratteristica, distinta da γ_1 , e γ_3 e γ_4 due w -caratteristiche distinte. Siano infine G ed H le intersezioni di γ_2 con γ_3 e γ_4 . Indicando con $v_E = v(x_E, t_E)$, etc., i valori di v e w sui punti appena introdotti, abbiamo, per definizione delle v -caratteristiche e delle w -caratteristiche, $v_E = v_F$, $v_G = v_H$, $w_E = w_G$ e $w_F = w_H$. Inoltre, siccome su γ_1 si conserva per ipotesi anche w , si ha pure $w_E = w_F$. Ne segue facilmente che è anche $w_G = w_H$, $v_E = v_G$ e $v_F = v_H$. Siccome γ_2 , γ_3 e γ_4 sono arbitrarie, abbiamo dimostrato la prima parte dell'asserto. La seconda parte segue banalmente dai sistemi caratteristici: se v e w sono costanti, segue che dx/dt è pure costante. Queste considerazioni permettono di ottenere la soluzione del problema su tutto il piano (x, t) . Infatti, per $x < -2c_0t$ e per $x > c_0t$ la soluzione è banale, in quanto questi intervalli rappresentano valori di x esterni all'intervallo (A, B) , dove la soluzione è nota:

$$(u(x, t), c(x, t)) = \begin{cases} (0, 0), & x < -2c_0t \\ (0, c_0) & x > c_0t \end{cases} \quad (6.45)$$

All'interno dell'intervallo (A, B) , cioè per $-2c_0t < x < c_0t$, invece, abbiamo, seguendo le v -caratteristiche e tenendo conto che sono delle rette passanti per l'origine,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3v + w}{4} = \frac{x}{t}.$$

Come si evince dalla figura 6.17, il valore di w corrispondente a tali caratteri-

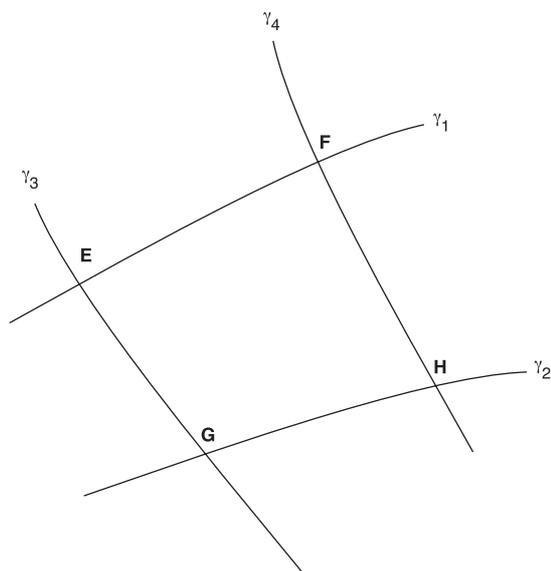


Figura 6.18: Coppie di caratteristiche a v costante (γ_1 e γ_2) ed a w costante (γ_3 e γ_4).

stiche è $w = -2c_0$; sostituendo otteniamo

$$\begin{cases} v &= (4x/t + 2c_0)/3 \\ w &= -2c_0 \end{cases}$$

che dà la soluzione

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{v + w}{2} = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{t} - c_0 \right) \\ c(x, t) &= \frac{v - w}{4} = \frac{1}{3} \left(\frac{x}{t} + 2c_0 \right). \end{aligned}$$

In termini della variabile $h(x, t)$ introdotta all'inizio per rappresentare la profondità dell'acqua in funzione di x e di t , abbiamo

$$h(x, t) = \frac{c^2(x, t)}{g} = \frac{1}{9g} \left(\frac{x}{t} + 2c_0 \right)^2, \quad -2c_0t < x < c_0t.$$

Nel tratto compreso tra i punti A e B , dunque, il profilo dell'acqua è quello di una parabola, col vertice in A ; da notare che il valore dell'altezza ad $x = 0$ rimane costante nel tempo:

$$h(0, t) = \frac{4c_0^2}{9g}.$$

La soluzione per $h(x, t)$ è quella già illustrata in figura 6.15.

6.5 Esercizi

Esercizio 6.5.1 Risolvere i seguenti problemi di Cauchy per le equazioni differenziali del prim'ordine, utilizzando tutti i metodi possibili:

$$(a) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 1$$

$$u(x, 0) = e^x$$

$$(b) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u$$

$$u(x, 2x) = 1 + \cos x$$

$$(c) \quad 2\frac{\partial u}{\partial x} - 5\frac{\partial u}{\partial y} + 4u = x^2$$

$$u(0, y) = \sin y + e^y + 1/8$$

$$(d) \quad x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} + u = x$$

$$u(x, x) = x^2$$

$$(e) \quad y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} + xu = 0$$

$$u(x, y) = y \text{ sulla curva } x^2 + 2y^2 = 4$$

$$(f) \quad y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} + 2xyu = 0$$

$$u(x, y) = e^x \sin(1+x) \text{ sulla curva } y^2 = 2x + 1$$

Capitolo 7

Equazioni iperboliche

7.1 Sviluppo in autofunzioni

Lo *sviluppo in autofunzioni* è un metodo molto generale per risolvere equazioni differenziali, sia ordinarie che alle derivate parziali, e costituisce anche la base di molti metodi numerici. Vediamo brevemente in cosa consiste, e poi ne vedremo i dettagli nelle applicazioni. Consideriamo il caso di funzioni di due variabili, una delle quali è il tempo, e sia $u(x, t)$ la funzione incognita in una EDP di cui cerchiamo la soluzione; introduciamo una base opportuna di funzioni ortogonali, $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ nella quale sviluppare la funzione u istante per istante. Riprendendo la (1.29), con i coefficienti dipendenti dal tempo, scriviamo

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) \phi_n(x). \quad (7.1)$$

Sostituendo tale sviluppo per la funzione incognita u nell'EDP che vogliamo risolvere, e sfruttando l'indipendenza lineare delle funzioni di base ϕ_n , otteniamo un'equazione per i coefficienti c_n dello sviluppo (7.1). Una volta ottenuti i coefficienti c_n , la soluzione è completata.

Illustreremo l'utilizzo di questo metodo alle equazioni iperboliche e, nei capitoli seguenti, a quelle paraboliche ed a quelle ellittiche. Tratteremo esclusivamente il caso di domini finiti; l'estensione a domini infiniti è concettualmente semplice, ma richiede l'introduzione di qualche strumento aggiuntivo, che esce dagli scopi di questo corso.

Il metodo dello sviluppo in autofunzioni è talvolta detto anche *metodo di separazione delle variabili*, che fornisce la stessa espressione per la soluzione, ma impiega una strada alternativa, ancorchè del tutto equivalente, per arrivarci. Lo illustreremo brevemente nell'esempio della corda vibrante ed in qualche altro esempio nel capitolo sulle equazioni ellittiche.

Esempio 7.1.1 (La corda vibrante) Consideriamo l'equazione delle onde (5.1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

con la condizione iniziale (problema di Cauchy) $u(x, 0) = h(x)$ e $\partial u / \partial t(x, 0) = \psi(x)$. Siano inoltre assegnate le condizioni al contorno $u(0, t) = u(L, t) = 0$. Questo è il modello che descrive le vibrazioni di una corda fissata agli estremi, in un intervallo $[0, L]$ della variabile spaziale.

Otteniamo ora la soluzione di questa equazione mediante uno sviluppo in autofunzioni. Sviluppiamo la funzione incognita $u(x, t)$ secondo la (7.1) e scegliamo come insieme di funzioni di base le autofunzioni dell'operatore L definito da

$$L\phi = -\frac{d^2\phi}{dx^2}$$

con le stesse condizioni al contorno del nostro problema, cioè $\phi(0) = \phi(L) = 0$. Abbiamo studiato il problema agli autovalori per questo operatore nell'esempio 1.3.1, equazione (1.30), e ne abbiamo determinato gli autovalori (1.31) e le autofunzioni (1.32),

$$k = k_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$\phi_n(x) = \sin k_n x,$$

$n = 1, 2, \dots$ (ricordiamo che per $n = 0$ non si ha alcun autovalore). Sostituendo lo sviluppo (7.1) nell'equazione delle onde (5.1), con le autofunzioni appena indicate, otteniamo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{c}_n \phi_n - v^2 c_n \phi_n''] = 0$$

che, tenendo conto del fatto che $\phi_n'' = -k_n^2 \phi_n$ in quanto autofunzioni dell'operatore L , abbiamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{c}_n + k_n^2 v^2 c_n] \phi_n = 0.$$

Per l'indipendenza lineare delle autofunzioni, ed introducendo le frequenze $\omega_n = k_n v$, otteniamo le equazioni differenziali cui devono obbedire i coefficienti c_n :

$$\ddot{c}_n + \omega_n^2 c_n = 0,$$

la cui soluzione generale è

$$c_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t.$$

Possiamo allora scrivere la soluzione generale della (5.1) nella forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin k_n x. \quad (7.2)$$

Le costanti A_n e B_n vanno determinate dalle condizioni iniziali, che coinvolgono sia il profilo iniziale della funzione u che della sua derivata temporale. Ci sarà pertanto utile anche l'espressione della derivata parziale

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \sin k_n x (-A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t).$$

Per $t = 0$ abbiamo

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin k_n x = h(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n B_n \sin k_n x = \psi(x).$$

Dalle note formule d'inversione per le serie di Fourier otteniamo

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L h(x) \sin k_n x \, dx$$

$$B_n = \frac{2}{L\omega_n} \int_0^L \psi(x) \sin k_n x \, dx$$

La soluzione $u(x, t)$, ottenuta dall'espressione (7.2) con le condizioni iniziali

$$h(x) = \begin{cases} \sin(2\pi x/L), & x < L/2 \\ 0, & L/2 \leq x \leq L \end{cases}$$

$$\psi(x) = 0 \quad (7.3)$$

e dove abbiamo posto $v = 1$ ed $L = 1$, è mostrata nella figura 7.1 (linea nera continua), assieme alla soluzione dell'equazione di Klein-Gordon (linea rossa tratteggiata) che commenteremo in seguito. Si vede come l'eccitazione iniziale si propaga verso destra per ritrovarsi, capovolta ma non distorta, all'altro estremo.

Vediamo ora come si possa pervenire all'espressione (7.2) della soluzione per una strada alternativa, forse meno elegante ma ampiamente usata, detta *metodo di separazione delle variabili*.

Supponiamo, dapprima, che la funzione incognita sia fattorizzabile nel prodotto di una funzione di x ed una funzione di t ,

$$u(x, t) = X(x)c(t)$$

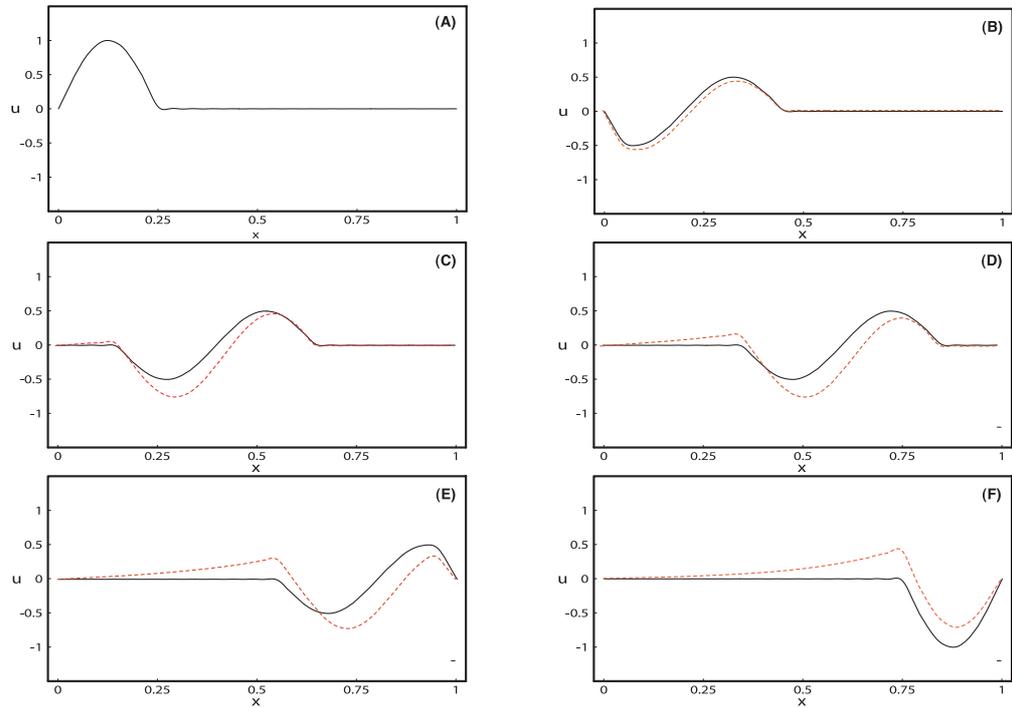


Figura 7.1: Soluzione dell'equazione delle onde (linea nera continua) dall'espressione (7.2) con la condizione iniziale (7.3), e dell'equazione di Klein-Gordon (linea rossa tratteggiata) dall'espressione (7.8) con (A) $t = 0$, (B) $t = 0.2$, (C) $t = 0.4$, (D) $t = 0.6$, (E) $t = 0.8$, (F) $t = 1$. I valori dei parametri sono $L = 1$, $v = 1$ e $\gamma = 20$.

e sostituiamo questa forma nell'equazione differenziale. Siccome, ovviamente,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 X}{dx^2} c(t)$$

ed analogamente

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x) \frac{d^2 c}{dt^2},$$

otteniamo che

$$X(x)c''(t) - v^2 X''(x)c(t) = 0$$

ovvero

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{c''(t)}{v^2 c(t)},$$

per $0 < x < L$, $t > 0$. Nell'ultima equazione, il membro di sinistra è una funzione della sola x , mentre il membro di destra è una funzione della sola t . Questo è possibile solo se il valore comune dei due membri è una costante, che nel nostro caso supporremo negativa ed indichiamo con $-k^2$. Otteniamo così

le due equazioni differenziali ordinarie:

$$X''(x) + k^2 X(x) = 0 \quad (7.4)$$

$$c''(t) + k^2 v^2 c(t) = 0. \quad (7.5)$$

Vediamo come applicare le condizioni al contorno, $u(0, t) = u(L, t) = 0$. Esse diventano

$$X(0)c(t) = 0$$

$$X(L)c(t) = 0$$

che possono essere soddisfatte per ogni $t > 0$ se e solo se

$$X(0) = X(L) = 0.$$

Con queste condizioni al contorno, l'equazione (7.4) diventa il problema di Sturm-Liouville con condizioni di Dirichlet che abbiamo già studiato nell'esempio 1.3.1, e che fornisce gli autovalori (1.31) e le autofunzioni (1.32) che abbiamo visto in precedenza. L'equazione (7.5) si risolve in maniera analoga, soltanto che ora la costante k che vi compare prenderà i valori k_n trovati sopra. Avremo dunque

$$c(t) = c_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t,$$

dove $\omega_n = k_n v$. Ricordando la fattorizzazione $u(x, t) = X(x)c(t)$, avremo le soluzioni particolari

$$u_n(x, t) = \sin k_n x (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t), \quad (7.6)$$

per $n = 0, 1, \dots$. Per qualunque valore delle costanti A_n e B_n , la (7.6) rappresenta una soluzione particolare dell'equazione delle onde (5.1), che è lineare. Pertanto, qualunque sovrapposizione lineare delle u_n pure soddisfa l'equazione differenziale e le condizioni al contorno. Possiamo allora scrivere la soluzione generale della (5.1) nella forma (7.2) che abbiamo già visto col metodo dello sviluppo in autofunzioni.

Esempio 7.1.2 (L'equazione di Klein-Gordon classica) Se all'equazione delle onde aggiungiamo un termine che rappresenta una forza di richiamo proporzionale allo spostamento, l'equazione (5.1) diventa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma u = 0, \quad (7.7)$$

da risolversi sempre con la condizione iniziale $u(x, 0) = h(x)$, $\partial u / \partial t(x, 0) = 0$ e le condizioni al contorno $u(0, t) = u(L, t) = 0$. Qui, $\gamma > 0$ è una costante. Anche in questo caso, cerchiamo una soluzione mediante sviluppo in autofunzioni

nella forma (7.1), ed utilizziamo nuovamente le autofunzioni dell'operatore L introdotto nell'esempio della corda vibrante. Sostituendo nell'equazione, e tenendo conto che le ϕ_n sono le autofunzioni dell'operatore L con autovalori dati dalle (1.31), otteniamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ddot{c}_n + v^2 k_n^2 c_n + \gamma c_n) \phi_n = 0$$

che, tenendo conto dell'indipendenza lineare delle autofunzioni, fornisce nuovamente l'equazione dell'oscillatore armonico per i coefficienti c_n :

$$\ddot{c}_n + \omega_n^2 c_n = 0,$$

dove però adesso $\omega_n = \sqrt{k_n^2 v^2 + \gamma}$. La soluzione generale per i coefficienti c_n è ancora del tipo

$$c_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t$$

e la soluzione generale della (7.7) può essere scritta nella forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n x (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t), \quad (7.8)$$

dove ancora i coefficienti A_n e B_n vanno determinati dalle condizioni iniziali.

Da notare che, mentre nel caso dell'equazione delle onde, la frequenza di ciascun modo non dipendeva dal numero d'onda k_n , nel caso dell'equazione di Klein-Gordon la frequenza dipende esplicitamente dal numero d'onda, presentando dunque dispersione. La soluzione dell'equazione di Klein-Gordon, con la stessa condizione (7.3) usata per l'equazione delle onde e con $\gamma = 20$, è illustrata nella figura 7.1, con la linea rossa tratteggiata, assieme alla soluzione dell'equazione delle onde, eq. (7.2). In questo caso, confrontando direttamente l'evoluzione temporale dei due profili, è evidente la distorsione della forma del profilo iniziale con l'andare del tempo, distorsione dovuta alla dispersione accennata sopra.

7.2 Metodo delle caratteristiche

Il metodo delle caratteristiche per l'equazione delle onde è già stato illustrato nella sezione (5.1), dove abbiamo derivato la forma di d'Alembert (5.9). La applichiamo qui a qualche esempio, inizialmente su domini spaziali illimitati.

Esempio 7.2.1 (Equazione delle onde in un dominio illimitato) Vogliamo risolvere l'equazione delle onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

per $-\infty < x < \infty$ con le condizioni iniziali (5.6)-(5.7), usando la forma di d'Alembert (5.9). Prendiamo in questo caso

$$\begin{aligned} u(0, x) &= h(x) = e^{-x^2} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) &= \phi(x) = 0. \end{aligned}$$

Queste condizioni iniziali corrispondono ad un'eccitazione iniziale gaussiana, con la corda rilasciata all'istante $t = 0$ senza nessuna accelerazione. Il termine integrale della (5.9) è in questo caso nullo, e la soluzione è costituita da due Gaussiane che si muovono verso sinistra e verso destra con ampiezza dimezzata rispetto a quella iniziale:

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \left(e^{-(x+vt)^2} + e^{-(x-vt)^2} \right),$$

come illustrato graficamente nella figura 7.2 per diversi valori del tempo t .

Modificando le condizioni iniziali possiamo ottenere altri tipi di moto notevoli. Prendiamo ora

$$\begin{aligned} u(0, x) &= h(x) = \sin(k_0 x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) &= \phi(x) = 0. \end{aligned} \tag{7.9}$$

L'eccitazione iniziale è ora sinusoidale, con lunghezza d'onda $2\pi/k_0$ e dà luogo alla soluzione

$$u(t, x) = \frac{1}{2} (\sin k_0(x + vt) + \sin k_0(x - vt)) = \sin k_0 x \cos vt,$$

illustrata nella figura 7.3, dove abbiamo preso $v = 2\pi$, $l = 1$ e $k_0 = 2\pi$. Da notare che i nodi della soluzione, che si hanno per $k_0 x = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, rimangono fissi nel tempo. Questo è un esempio di un'onda stazionaria che risulta dalla sovrapposizione di due onde di uguale ampiezza viaggianti con velocità opposte.

Esempio 7.2.2 Consideriamo l'equazione

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

e determiniamone la soluzione generale nella forma di d'Alembert (5.9). Innanzitutto vediamo che $b^2 - ac = 1/4 > 0$, quindi l'equazione è iperbolica ed a coefficienti costanti. Gli autovalori della sezione 4.2 sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3/2$ e quindi possiamo introdurre come nuove variabili

$$\begin{aligned} \xi &= x + y \\ \eta &= 3x + 2y \end{aligned}$$

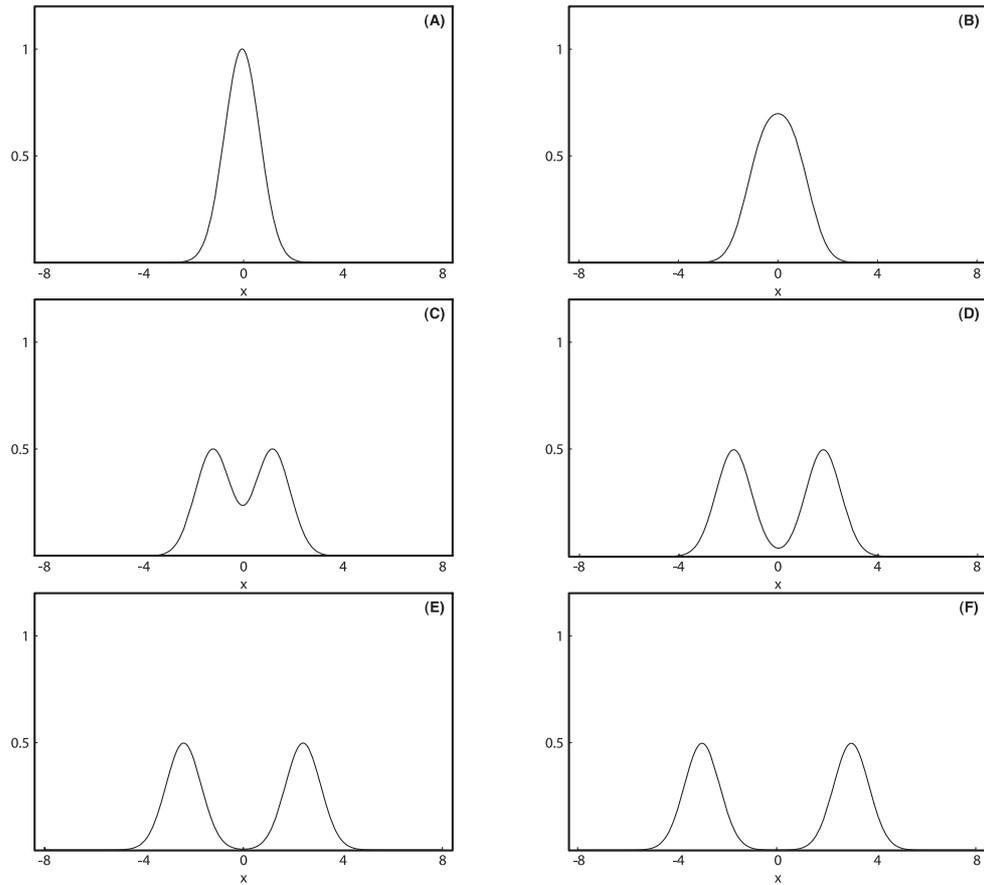


Figura 7.2: Soluzione dell'equazione delle onde in un dominio illimitato con condizione iniziale Gaussiana, $v = 1$ e con (A) $t = 0$, (B) $t = 0.6$, (C) $t = 1.2$, (D) $t = 1.8$, (E) $t = 2.4$, (F) $t = 3$.

nelle quali l'equazione assume la forma canonica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

La soluzione generale, nelle variabili ξ ed η risulta pertanto

$$u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

ovvero

$$u(x, y) = F(x + y) + G(3x + 2y)$$

con F e G due funzioni derivabili due volte in modo continuo.

Esempio 7.2.3 Consideriamo l'equazione

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

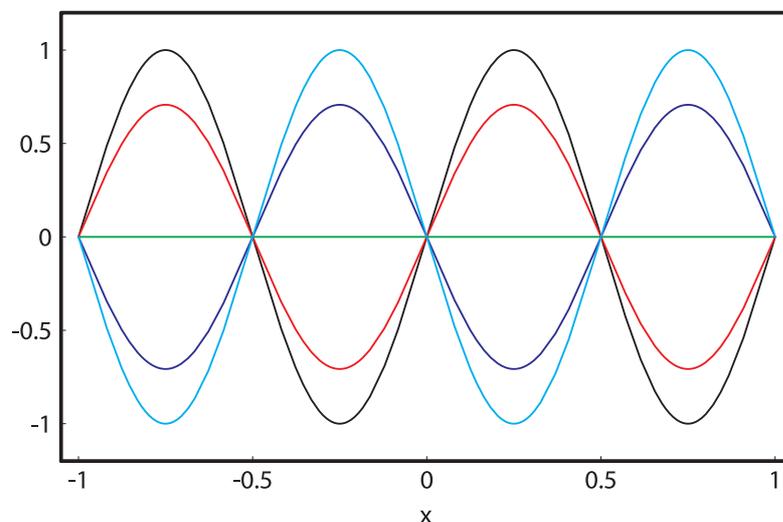


Figura 7.3: Soluzione dell'equazione delle onde in un dominio illimitato con condizione iniziale sinusoidale, $v = 2\pi$ e con $t = 0$ (linea nera), $t = 1/8$ (linea rossa), $t = 1/4$ (linea verde), $t = 3/8$ (linea blu) e $t = 1/2$ (linea celeste).

e determiniamone la soluzione generale nella forma di d'Alembert (5.9). Innanzitutto vediamo che $b^2 - 4ac = 4 > 0$, quindi l'equazione è iperbolica ed a coefficienti costanti. Gli autovalori della sezione 4.2 sono $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -1$ e quindi possiamo introdurre come nuove variabili

$$\begin{aligned}\xi &= 2x - y \\ \eta &= x - y\end{aligned}$$

nelle quali l'equazione assume la forma canonica

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$$

che si può anche scrivere

$$2\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{u}{2} \right) = 2\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} (ue^{-\eta/2}) e^{\eta/2} = 0.$$

La soluzione generale, nelle variabili ξ ed η risulta pertanto

$$u(\xi, \eta)e^{-\eta/2} = F(\xi) + G_1(\eta)$$

ovvero

$$u(\xi, \eta) = F(\xi)e^{\eta/2} + G(\eta).$$

Ritornando alle variabili x ed y , la soluzione generale risulta

$$u(x, y) = F(2x - y)e^{(x-y)/2} + G(x - y)$$

con F e G due funzioni derivabili due volte in modo continuo.

Esempio 7.2.4 Consideriamo l'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 4e^x$$

e determiniamone la soluzione generale nella forma di d'Alembert (5.9). Questa è un'equazione non omogenea, quindi scriviamo la soluzione come la soluzione generale dell'omogenea associata u_0 più una soluzione particolare u_p . È banale verificare che $u_p = 2e^x$ è una soluzione particolare. Per quanto riguarda l'omogenea associata, vediamo che $b^2 - 4ac = 4 > 0$, quindi l'equazione è iperbolica ed a coefficienti costanti. Gli autovalori della sezione 4.2 sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$ e quindi possiamo introdurre come nuove variabili

$$\begin{aligned}\xi &= x \\ \eta &= x + 2y\end{aligned}$$

nelle quali l'equazione omogenea assume la forma canonica

$$-4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 2\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$$

che si può anche scrivere

$$4\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{u}{2} \right) = 4\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} (ue^{-\eta/2}) e^{\eta/2} = 0.$$

La soluzione generale, nelle variabili ξ ed η risulta pertanto

$$u(\xi, \eta)e^{-\eta/2} = F(\xi) + G_1(\eta)$$

ovvero

$$u(\xi, \eta) = F(\xi)e^{\eta/2} + G(\eta).$$

Ritornando alle variabili x ed y ed all'equazione non omogenea, la soluzione generale risulta

$$u(x, y) = 2e^x + F(x)e^{(x+2y)/2} + G(x + 2y)$$

con F e G due funzioni derivabili due volte in modo continuo.

7.3 Metodo delle trasformate di Fourier

Come nel caso delle equazioni del prim'ordine, il metodo delle trasformate di Fourier si adatta bene alle equazioni lineari a coefficienti costanti. In presenza di non linearità o coefficienti variabili bisogna di solito ricorrere ad altri metodi. In questa sezione, rivediamo le equazioni degli esempi della sezione 7.2, ed ivi risolte col metodo delle caratteristiche, e ne aggiungiamo altri.

Esempio 7.3.1 (L'equazione delle onde in un dominio illimitato) Ricaviamo la soluzione nella forma (5.5) per l'equazione delle onde (5.1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

con le condizioni iniziali $u(x, 0) = h(x)$ e $\partial u / \partial t(x, 0) = \psi(x)$, utilizzando la trasformata di Fourier. Introduciamo innanzitutto la trasformata di Fourier della funzione incognita u ,

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, t) e^{ikx} dk,$$

con l'inversa

$$\hat{u}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-ikx} dx.$$

Operando con la trasformata di Fourier direttamente sull'equazione (5.1) otteniamo un'equazione per \hat{u} :

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} + k^2 v^2 \hat{u} = 0, \tag{7.10}$$

di facile risoluzione:

$$\hat{u}(k, t) = f(k) e^{ikvt} + g(k) e^{-ikvt}. \tag{7.11}$$

Siccome $u(x, t)$ è una funzione reale, deve essere $\hat{u}(k, t) = \hat{u}^*(-k, t)$, che comporta $g = f^*$. Antitrasformando otteniamo

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, t) e^{ikx} dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [f(k) e^{ikvt} + g(k) e^{-ikvt}] e^{ikx} = F(x + vt) + G(x - vt), \end{aligned}$$

che è la forma (5.5) della soluzione, e dove $F(x)$ e $G(x)$ sono le antitrasformate delle funzioni $f(k)$ e $g(k)$.

Esempio 7.3.2 Consideriamo l'equazione

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

e determiniamone la soluzione generale usando le trasformate di Fourier. La trasformata di Fourier permette di trasformare l'equazione alle derivate parziali in una semplice equazione differenziale ordinaria. Sia $u_k(x)$ la trasformata della

funzione u rispetto ad y (è del tutto equivalente a considerare la trasformata rispetto ad x),

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}_k(x) e^{iky} dk.$$

Sostituendo nell'equazione differenziale abbiamo

$$2\widehat{u}_k'' - 5ik\widehat{u}_k' - 3k^2\widehat{u}_k = 0$$

che è un'equazione differenziale ordinaria per \widehat{u}_k . Le radici dell'equazione caratteristica $2\lambda^2 - 5ik\lambda - 3k^2 = 0$ sono $\lambda_1 = ik$ e $\lambda_2 = 3ik/2$ e la soluzione generale è

$$\widehat{u}_k(x) = f(k)e^{ikx} + g(k)e^{3ikx/2}.$$

L'antitrasformata dà

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(k)e^{ik(x+y)} dk + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k)e^{ik(3x/2+y)} dk.$$

Siano ora $F(y)$ e $G_1(y)$ le funzioni di cui $f(k)$ e $g(k)$ sono le trasformate di Fourier. Allora

$$u(x, y) = F(x + y) + G_1(3x/2 + y)$$

e, posto $G(x) = G_1(x/2)$, otteniamo alla fine

$$u(x, y) = F(x + y) + G(3x + 2y)$$

con F e G due funzioni derivabili due volte in modo continuo.

Esempio 7.3.3 Consideriamo l'equazione

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

e determiniamone la soluzione generale usando le trasformate di Fourier. Sia, come al solito,

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}_k(x) e^{iky} dk.$$

Sostituendo nell'equazione differenziale abbiamo

$$2\widehat{u}_k'' + 6ik\widehat{u}_k' - 4k^2\widehat{u}_k + \widehat{u}_k' + ik\widehat{u}_k = 0$$

Le radici dell'equazione caratteristica $2\lambda^2 + (6ik + 1)\lambda - (4k^2 - ik) = 0$ sono $\lambda_1 = -ik$ e $\lambda_2 = -2ik - 1/2$ e la soluzione generale è

$$\widehat{u}_k(x) = f(k)e^{-(2ik+1/2)x} + g(k)e^{-ikx}.$$

L'antitrasformata dà

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{-(2ik+1/2)x+iky} dk + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{-ikx+iky} dk \\ &= e^{-x/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{ik(y-2x)} dk + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ik(y-x)} dk \end{aligned}$$

Siano ora $F_1(y)$ e $G(y)$ le funzioni di cui $f(k)$ e $g(k)$ sono le trasformate di Fourier. Allora

$$u(x, y) = e^{-x/2} F_1(y - 2x) + G(y - x)$$

e, posto $F(x) = e^{(y-2x)/2} F_1(-x)$, otteniamo alla fine

$$u(x, y) = e^{(x-y)/2} F(2x - y) + G(x - y)$$

con F e G due funzioni derivabili due volte in modo continuo.

7.4 Ulteriori applicazioni

Esempio 7.4.1 (L'equazione del telegrafo) Supponiamo ora che le vibrazioni della corda avvengano dentro un mezzo viscoso, come acqua, aria od altro. L'effetto della forza viscosa sul moto della corda si traduce in un termine di derivata prima rispetto al tempo nell'equazione delle onde (5.1):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\lambda \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (7.12)$$

che studiamo con le condizioni al contorno $u(0, t) = u(L, t) = 0$ e le condizioni iniziali $u(x, 0) = h(x)$, $\partial u / \partial t(x, 0) = \psi(x)$. Questa equazione sorse per la prima volta nella descrizione matematica del telegrafo, ed è pertanto detta *equazione del telegrafo*. Utilizzando il metodo dello sviluppo in autofunzioni, sempre con le (1.31) per gli autovalori e le (1.32) come autofunzioni di base, perveniamo alla seguente equazione per i coefficienti $c_n(t)$:

$$\ddot{c}_n + 2\lambda \dot{c}_n + \omega_n^2 c_n = 0, n = 1, 2, \dots,$$

dove abbiamo posto $\omega_n = k_n v$, e la cui soluzione generale è

$$c_n(t) = e^{-\lambda t} (A_n \cos \nu_n t + B_n \sin \nu_n t)$$

dove $\nu_n = \sqrt{\omega_n^2 - \lambda^2}$. La soluzione generale dell'equazione del telegrafo (7.12) è dunque

$$u(x, t) = e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n x (A_n \cos \nu_n t + B_n \sin \nu_n t), \quad (7.13)$$

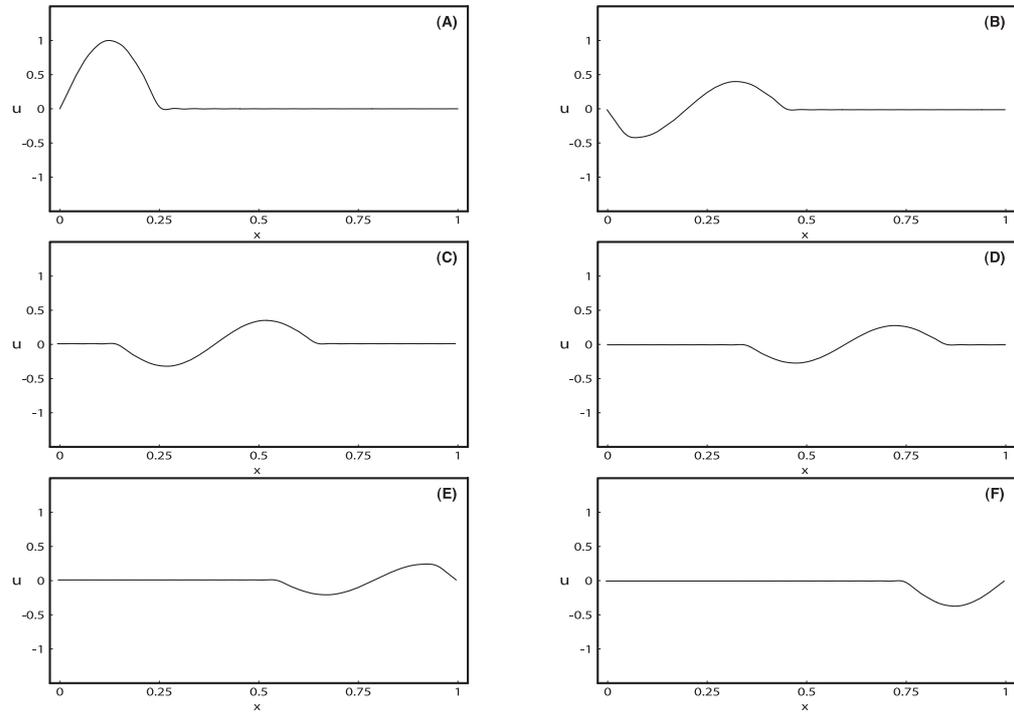


Figura 7.4: Soluzione dell'equazione del telegrafo con (A) $t = 0$, (B) $t = 0.2$, (C) $t = 0.4$, (D) $t = 0.6$, (E) $t = 0.8$, (F) $t = 1$. I valori dei parametri sono $L = 1$, $v = 1$ e $\gamma = 1$.

con le costanti A_n e B_n da determinarsi dalle condizioni iniziali. Questa soluzione mostra due effetti importanti della forza viscosa. Il primo è che la frequenza di oscillazione di ciascun modo è minore che in assenza di viscosità, cioè un effetto di rallentamento. Il secondo effetto è lo smorzamento dell'ampiezza delle oscillazioni di ciascun modo nel tempo.

La soluzione $u(x, t)$, ottenuta dall'espressione (7.13) con le condizioni iniziali (7.3) già usate per l'equazione delle onde e per l'equazione di Klein-Gordon e dove abbiamo posto $v = 1$, $L = 1$ e $\gamma = 1$, è mostrata nella figura 7.4. L'effetto di smorzamento sul profilo iniziale è molto evidente.

Esempio 7.4.2 (Vibrazioni di un gas all'interno di una sfera) L'equazione che governa le vibrazioni radiali di piccola ampiezza di un gas attorno alla sua configurazione di equilibrio è data da

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (7.14)$$

dove $u(r, t)$ è il potenziale della velocità, $0 \leq r \leq R$ la coordinata radiale, con R il raggio della cavità sferica, e v la velocità di propagazione del suono.

Questa equazione va risolta con le condizioni al contorno

$$\frac{\partial u}{\partial r}(R, t) = 0 \quad (7.15)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} u(r, t) < +\infty \quad (7.16)$$

e le condizioni iniziali

$$u(r, 0) = h(r)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(r, 0) = \psi(r).$$

Per sviluppare la funzione incognita u in una base di autofunzioni, consideriamo l'operatore

$$L\phi = -\frac{d^2\phi}{dr^2} - \frac{2}{r}\frac{d\phi}{dr}$$

con le stesse condizioni al contorno del nostro problema, cioè $\phi'(R) = 0$ e $\phi(r)$ limitata per $r \rightarrow 0$. L'equazione agli autovalori per l'operatore L è

$$\phi'' + \frac{2}{r}\phi' + \lambda\phi = 0.$$

Posto $\lambda = k^2$, vediamo che l'equazione per ϕ ammette due soluzioni particolari che sono

$$\phi^{(1)}(r) = \frac{\sin kr}{r}$$

$$\phi^{(2)}(r) = \frac{\cos kr}{r}$$

(lo studente è invitato a verificarle !!) e quindi la soluzione generale è

$$\phi(r) = C \frac{\sin kr}{r} + D \frac{\cos kr}{r}.$$

Affinchè $\phi(0)$ rimanga finito, dobbiamo porre $D = 0$. Assieme alla condizione al contorno (7.15), questo ci dà l'equazione per gli autovalori

$$kR = \tan kR \quad (7.17)$$

simile a quella che abbiamo incontrato nell'esempio 1.3.3 e la cui soluzione grafica è illustrata nella figura 7.5. La soluzione numerica per i primi dieci autovalori $\xi_n = k_n R$ è riportata nella tabella successiva:

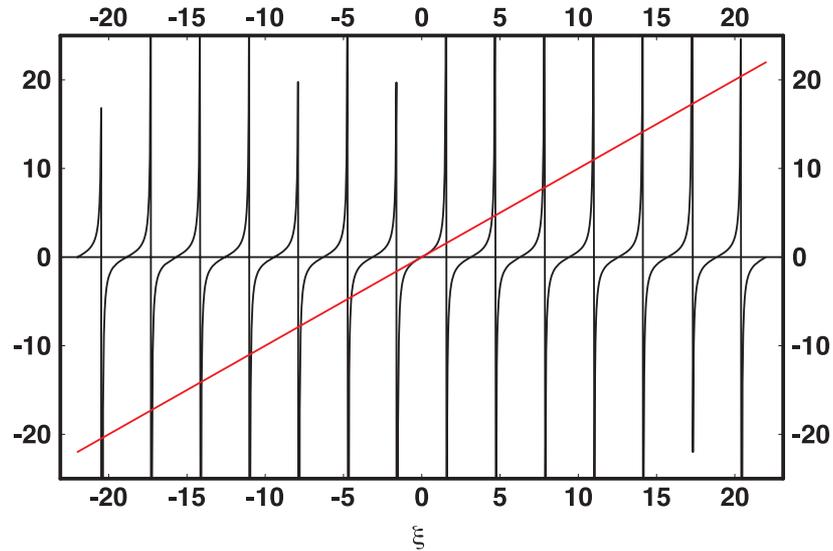


Figura 7.5: Soluzione grafica dell'equazione (7.17) per gli autovalori $\xi_n = k_n R$.

Autovalore	Valore numerico
ξ_1	0.011792
ξ_2	4.49341
ξ_3	7.72525
ξ_4	10.9041
ξ_5	14.0662
ξ_6	17.2208
ξ_7	20.3713
ξ_8	23.5195
ξ_9	26.6661
ξ_{10}	29.8116

In corrispondenza a ciascun autovalore k_n , abbiamo l'autofunzione

$$\phi_n(r) = \frac{\sin k_n r}{r}, \quad (7.18)$$

dove abbiamo posto $C = 1$. Notiamo che $k_n \neq 0$ per ciascun n . L'autofunzione corrispondente a $k = 0$, però, non è triviale e ne dobbiamo tener conto. Per $k = 0$ l'equazione per ϕ diventa

$$\phi'' + \frac{2}{r}\phi' = 0,$$

la cui soluzione generale è

$$\phi_0(r) = C \int_0^r e^{-x^2/4} dx + D.$$

Per soddisfare la condizione al contorno (7.16) deve essere $C = 0$; ponendo inoltre $D = 1$, otteniamo l'autofunzione corrispondente a $k = 0$,

$$\phi_0(r) = 1. \quad (7.19)$$

Introduciamo dunque lo sviluppo

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) \phi_n(t)$$

con le ϕ_n date dalle (7.18)-(7.19). Sostituendo nell'equazione (7.14), e tenendo conto dell'equazione agli autovalori per le ϕ_n , otteniamo

$$\ddot{c}_n + \omega_n^2 c_n = 0 \quad (7.20)$$

dove abbiamo posto $\omega_n = k_n v$. In corrispondenza a ciascun autovalore k_n , l'equazione per c_n ammette la soluzione generale

$$\begin{aligned} c_n(t) &= A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t, \quad n \neq 0, \\ c_0 &= A_0 + B_0 t \end{aligned}$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale (7.14) si scrive allora

$$u(r, t) = A_0 t + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin k_n r}{r} (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t), \quad (7.21)$$

con le costanti A_n e B_n da determinare con le condizioni iniziali. Calcolando la (7.21) e la sua derivata rispetto al tempo all'istante $t = 0$, otteniamo

$$h(r) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\sin k_n r}{r} \quad (7.22)$$

$$\psi(r) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \omega_n \frac{\sin k_n r}{r} \quad (7.23)$$

Per calcolare esplicitamente le costanti A_n e B_n , abbiamo bisogno delle seguenti relazioni, che lo studente è invitato a verificare per esercizio:

$$\begin{aligned} \int_0^R \sin k_n r \sin k_m r dr &= 0, \quad m \neq n \\ \int_0^R \sin^2 k_n r dr &= \frac{R}{2} \frac{k_n^2 R^2}{1 + k_n^2 R^2} \\ \int_0^R r \sin k_n r dr &= 0. \end{aligned}$$

Moltiplicando allora una prima volta le equazioni (7.22) e (7.23) per $r \sin k_n r$ ed integrando su r , e moltiplicandole una seconda volta per r^2 ed integrando su r , otteniamo

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\omega_n R} \left(1 + \frac{1}{k_n^2 R^2} \right) \int_0^R r \psi(r) \sin k_n r \, dr, \quad n \neq 0 \\ B_n &= \frac{2}{R} \left(1 + \frac{1}{k_n^2 R^2} \right) \int_0^R r h(r) \sin k_n r \, dr, \quad n \neq 0 \\ A_0 &= \frac{3}{R^3} \int_0^R \psi(r) r^2 \, dr \\ B_0 &= \frac{3}{R^3} \int_0^R h(r) r^2 \, dr. \end{aligned}$$

Come esempio illustrativo, prendiamo come condizioni iniziali

$$\begin{aligned} h(r) &= 0, \quad 0 \leq r \leq R \\ \psi(r) &= e^{-4r^2}, \end{aligned}$$

da cui abbiamo $B_n = 0$ per ogni n . Nella figura 7.6 riportiamo (A) il pro-

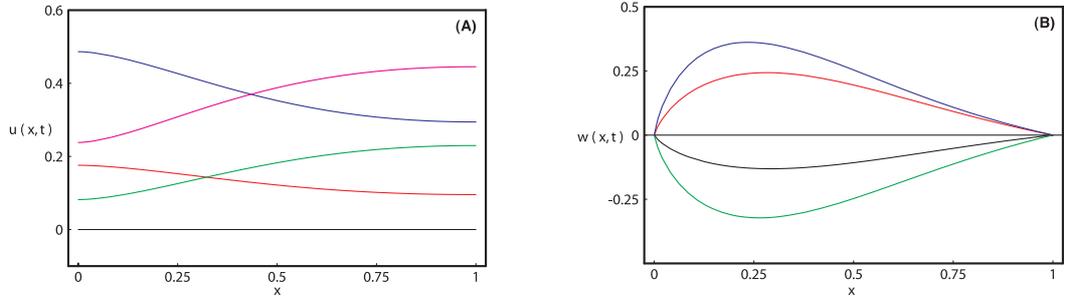


Figura 7.6: Soluzione dell'equazione (7.14) per (A) il potenziale $u(x, t)$ e (B) la velocità del gas $w(x, t)$ dentro la sfera, per $v = 1$, $r = 1$ e $\delta = 0.5$, agli istanti di tempo $t = 0$ (linea nera), $t = 2$ (linea rossa), $t = 4$ (linea verde), $t = 6$ (linea blu) e $t = 8$ (linea fucsia).

filo radiale della funzione $u(x, t)$ e (B) della funzione $w(x, t) = \partial u / \partial x$, che rappresenta la velocità dell'aria dentro la sfera, in corrispondenza agli istanti temporali $t = 0, 2, 4, 6$ ed 8 . Vediamo che il sistema si comporta come un oscillatore, con l'aria che si sposta periodicamente verso il centro della sfera e verso il bordo.

7.5 Esercizi

Esercizio 7.5.1 Determinare la soluzione dell'equazione delle onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

per la funzione incognita $u(x, t)$ con le seguenti condizioni iniziali ed al contorno:

- (a) $u(0, t) = 0$, $\partial u / \partial x(L, t) = 0$ ed $u(x, 0) = h(x)$ e $\partial u / \partial t(x, 0) = \psi(x)$;
- (b) $\partial u / \partial x(0, t) = 0$, $u(L, t) = 0$ ed $u(x, 0) = h(x)$ e $\partial u / \partial t(x, 0) = \psi(x)$;
- (c) $\partial u / \partial x(0, t) = 0$, $\partial u / \partial x(L, t) = 0$ ed $u(x, 0) = h(x)$ e $\partial u / \partial t(x, 0) = \psi(x)$;
- (d) $u(0, t) = u(L, t) = 0$ e $u(x, 0) = 0$ e $\partial u / \partial t(x, 0) = \sin 2\pi x / L$;
- (e) $u(0, t) = \partial u / \partial x(L, t) = 0$ e $u(x, 0) = \sin 5\pi x / (2L)$ e $\partial u / \partial t(x, 0) = \cos \pi x / (2L)$;
- (f) $u(0, t) = \partial u / \partial x(L, t) = 0$ e $u(x, 0) = x$ e $\partial u / \partial t(x, 0) = \sin \pi x / (2L) + \cos 5\pi x / (2L)$.

Esercizio 7.5.2 Ripetere l'esercizio precedente per l'equazione di Klein-Gordon

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma u = 0.$$

Esercizio 7.5.3 Determinare la soluzione dell'equazione del quarto grado

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + v^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$$

nel dominio $0 \leq x \leq L$ per la funzione incognita $u(x, t)$ con le condizioni ausiliarie

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u(L, t) = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) = 0 \end{aligned}$$

Esercizio 7.5.4 Determinare la soluzione dell'equazione del second'ordine iperbolica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

con le condizioni ausiliarie:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= h(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= 0 \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0 \end{aligned}$$

Esercizio 7.5.5 Determinare tutte le soluzioni particolari delle seguenti equazioni differenziali iperboliche con le condizioni ausiliarie assegnate:

- (a)
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$u(x, 0) = u(1, t) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(e, t) = 0$$
- (b)
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial t} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} + u = 0$$

$$u(x, t) = u(\pi, t) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$$
- (c)
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$u(x, 0) = u(1, t) = u(2, t) = 0$$

Esercizio 7.5.6 Usando la formula di d'Alembert (5.9), risolvere l'equazione delle onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

per la funzione incognita $u(x, t)$ nel dominio $-\infty < x < \infty$ con le condizioni iniziali $u(x, 0) = h(x)$ e $\partial u / \partial t(x, 0) = \psi(x)$ assegnate:

- (a) $h(x) = 2 \sin x \cos x$, $\psi(x) = \cos x$;
 (b) $h(x) = x \sin x$, $\psi(x) = \cos 2x$;
 (c) $h(x) = 1/(1 + x^2)$, $\psi(x) = e^x$;
 (d) $h(x) = e^{-x}$, $\psi(x) = 1/(1 + x^2)$;
 (e) $h(x) = \cos(\pi x/2)$, $\psi(x) = \sinh x$;
 (f) $h(x) = \sin 3x$, $\psi(x) = \sin 2x - \sin x$;

Esercizio 7.5.7 Ripetere l'esercizio precedente, utilizzando la trasformata di Fourier invece della formula di d'Alembert.

Capitolo 8

Equazioni paraboliche

8.1 Sviluppo in autofunzioni

Abbiamo già introdotto il metodo dello sviluppo in autofunzioni nel capitolo sulle equazioni iperboliche. L'applicazione alle equazioni paraboliche è del tutto analoga; vedremo la differenza nella natura delle equazioni differenziali per i coefficienti dello sviluppo, $c_n(t)$, che non sono più del second'ordine, ma del prim'ordine nel tempo.

Esempio 8.1.1 (Condizioni di Dirichlet - I) Consideriamo l'equazione del calore (5.19)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(K è il coefficiente di conduzione termica) per la funzione incognita $u(x, t)$ con le condizioni al contorno omogenee $u(0, t) = u(L, t) = 0$ e la condizione iniziale $u(x, 0) = h(x)$. L'equazione descrive l'evoluzione temporale del profilo di temperatura di una sbarra di lunghezza L , i cui estremi sono tenuti a temperatura costante nulla. Sviluppiamo la soluzione u secondo la (7.1)

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) \phi_n(x).$$

ed utilizziamo nuovamente gli autovalori (1.31) e le autofunzioni (1.32)

$$k = k_n = \frac{n\pi}{L}$$
$$\phi_n(x) = \sin k_n x,$$

$n = 1, 2, \dots$, dell'operatore L definito da

$$L\phi = -\frac{d^2\phi}{dx^2}$$

con le stesse condizioni al contorno del nostro problema, cioè $\phi(0) = \phi(L) = 0$. Sostituendo nell'equazione (5.19), otteniamo le equazioni per i coefficienti c_n ,

$$\dot{c}_n + Kk_n^2 c_n = 0$$

la cui soluzione generale è data da

$$c_n(t) = B_n e^{-t/\tau_n},$$

dove abbiamo posto $\tau_n = 1/(k_n^2 K)$ e B_n è una costante. La soluzione generale dell'equazione (5.19) è allora

$$u(x, t) = \sum_1^{\infty} B_n e^{-t/\tau_n} \sin k_n x, \quad (8.1)$$

nella quale si riconosce la serie di Fourier. Le costanti B_n sono determinate dalle condizioni iniziali e sono date da

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L h(x) \sin k_n x dx.$$

Le costanti τ_n rappresentano i tempi caratteristici con cui ciascun termine

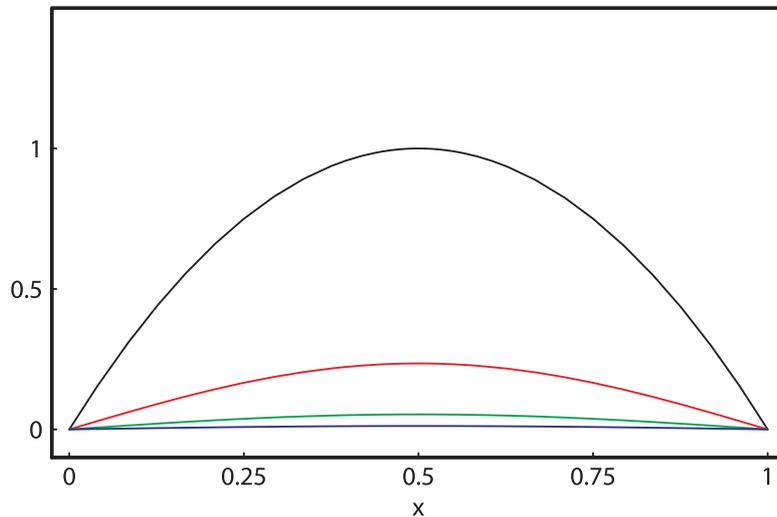


Figura 8.1: Soluzione $u(x, t)$ dell'equazione del calore per l'esempio 8.1.1, con $K = 1$ e la condizione iniziale (8.2), per $t = 0$ (linea nera), $t = 0.15$ (linea rossa), $t = 0.3$ (linea verde) e $t = 0.45$ (linea blu).

della serie (8.1) tende esponenzialmente a zero e vengono talvolta chiamate *tempi di rilassamento*. Da notare che, siccome $\tau_n \sim n^{-2}$, i primi termini (per

n piccolo) sono smorzati più lentamente di quelli ad n grande. Nella figura 8.1 mostriamo la soluzione (8.1) con la condizione iniziale

$$h(x) = 4x(L - x) \quad (8.2)$$

ad alcuni istanti di tempo. Dalla figura si vede chiaramente il rilassamento della temperatura verso un valore uniforme consistente con le condizioni al contorno.

Esempio 8.1.2 (Condizioni di Dirichlet - II) Consideriamo l'equazione di drift-diffusion (5.29)

$$\frac{\partial n}{\partial t} + v \frac{\partial n}{\partial x} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

(D è il coefficiente di diffusione e v la velocità di deriva o di convezione) per la funzione incognita $n(x, t)$ con le condizioni al contorno omogenee $n(0, t) = n(L, t) = 0$ e la condizione iniziale $n(x, 0) = h(x)$. L'equazione descrive l'evoluzione temporale del profilo di densità di un sistema di particelle (ad esempio un gas) in un dominio unidimensionale limitato di lunghezza L , con densità nulla agli estremi. Per applicare il metodo dello sviluppo in autofunzioni, introduciamo in questo caso l'operatore L definito da

$$L\phi = -\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{v}{D} \frac{d\phi}{dx}$$

con le stesse condizioni al contorno del nostro problema, cioè $\phi(0) = \phi(L) = 0$. L'equazione agli autovalori,

$$L\phi = \lambda\phi,$$

posto $\lambda = k^2$, diventa

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} - \frac{v}{D} \frac{d\phi}{dx} + k^2\phi = 0$$

la cui soluzione generale è

$$\phi(x) = e^{vx/2D} (Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x})$$

dove abbiamo posto

$$\beta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v^2}{D^2} - 4k^2}.$$

Imponendo la condizione al contorno $\phi(0) = 0$ otteniamo che $B = -A$, mentre $\phi(L) = 0$ dà direttamente l'equazione agli autovalori

$$e^{2\beta L} = 1,$$

ovvero

$$\beta = \beta_n = i \frac{n\pi}{L}, \quad (8.3)$$

$n = 1, 2, \dots$. A ciascun autovalore β_n corrisponde un k_n tale che

$$k_n^2 = \frac{v^2}{4D} + \frac{n^2\pi^2 D}{L^2} = \frac{1}{\tau_D} \left(\frac{P^2}{4} + n^2\pi^2 \right) = \frac{1}{\tau_v} \left(\frac{P}{4} + \frac{n^2\pi^2}{P} \right)$$

dove τ_D e τ_v sono i tempi caratteristici della diffusione e della convezione e P è il numero di Peclet, introdotti nella sezione 5.3.

Riassumendo, le autofunzioni per l'operatore L sono date da

$$\phi_n(x) = e^{vx/2D} \sin \beta_n x, \quad (8.4)$$

dove abbiamo posto arbitrariamente $A = 1$.

Sviluppiamo ora la funzione incognita $n(x, t)$ nelle autofunzioni dell'operatore L e che abbiamo appena trovato:

$$n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \phi_n(x);$$

sostituendo nell'equazione di drift-diffusion (5.29) otteniamo per i coefficienti c_n le equazioni

$$\frac{dc_n}{dt} + k_n^2 c_n = 0$$

la cui soluzione generale è data da

$$c_n(t) = B_n e^{-t/\tau_n},$$

dove abbiamo posto $\tau_n = 1/\beta_n^2$ e B_n è una costante da determinarsi dalle condizioni iniziali.

La soluzione generale dell'equazione (5.29) è pertanto

$$n(x, t) = e^{vx/2D} \sum_1^{\infty} B_n e^{-t/\tau_n} \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (8.5)$$

Le costanti B_n vanno determinate dalla condizione iniziale. Se $n(x, 0) = h(x)$ è la condizione iniziale, abbiamo

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L h(x) e^{-vx/2D} \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Anche in questo caso, la soluzione tende a zero per $t \rightarrow \infty$, consistentemente con le condizioni al contorno. Fisicamente, questo significa che il sistema non è isolato e perde particelle agli estremi del dominio. Nella figura 8.2 mostriamo la soluzione (8.5) con la condizione iniziale

$$h(x) = 4x(L - x) \quad (8.6)$$

ad alcuni istanti di tempo. Dalla figura si vede chiaramente che il profilo di densità si appiattisce verso lo zero a causa della diffusione, mentre il suo massimo si sposta progressivamente verso destra a causa della convezione.

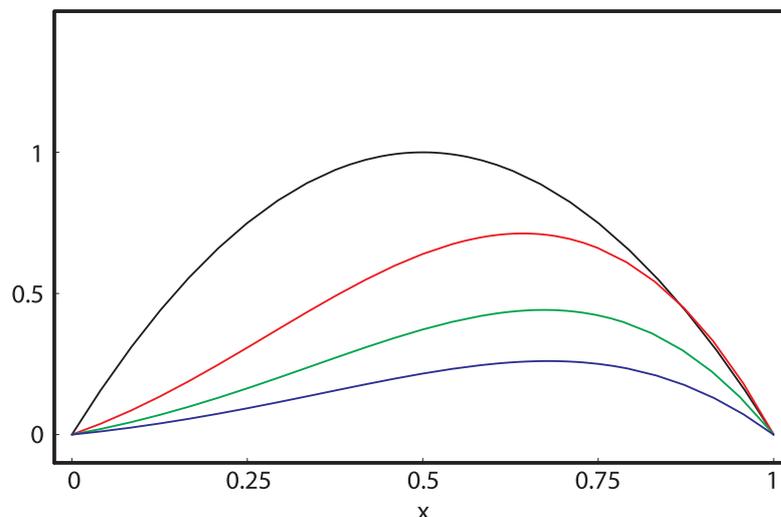


Figura 8.2: Soluzione $n(x, t)$ dell'equazione di drift-diffusion per l'esempio 8.1.2, con $D = 1$, $v = 2$ e la condizione iniziale (8.6), per $t = 0$ (linea nera), $t = 0.05$ (linea rossa), $t = 0.1$ (linea verde) e $t = 0.15$ (linea blu).

Esempio 8.1.3 (Condizioni di tipo misto) Consideriamo ora l'equazione del calore (5.19)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con le condizioni al contorno $\partial u / \partial x(0, t) = u(L, t) = 0$ e la condizione iniziale $u(x, 0) = h(x)$. La condizione al contorno in $x = 0$ dice che il flusso attraverso la frontiera ad $x = 0$ è nullo, cioè il sistema è isolato. Cerchiamo nuovamente la soluzione mediante uno sviluppo in autofunzioni. L'operatore da prendere in considerazione è nuovamente

$$L\phi = -\frac{d^2\phi}{dx^2},$$

ma ora con le condizioni al contorno $\partial\phi/\partial x(0) = \phi(L, t) = 0$. Abbiamo già studiato il problema agli autovalori per questo operatore, ed abbiamo trovato che gli autovalori (1.38) e le autofunzioni (1.39) sono dati da

$$k_n = \frac{(2n + 1)\pi}{2L}$$

$$\phi_n(x) = \cos k_n x$$

con $n = 0, 1, 2, \dots$. Sviluppando l'equazione del calore (5.19) in queste autofunzioni,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)\phi_n(x),$$

otteniamo l'equazione

$$c'_n + k^2 K c_n = 0$$

per i coefficienti c_n . La soluzione è la stessa dell'esempio precedente, cioè

$$c_n(t) = B_n e^{-t/\tau_n},$$

dove abbiamo posto $\tau_n = 1/(Kk_n^2)$ e B_n è una costante da determinarsi dalle condizioni iniziali. La soluzione generale dell'equazione del calore alla fine è

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n e^{-t/\tau_n} \cos k_n x, \quad (8.7)$$

con

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L h(x) \cos k_n x dx.$$

Nella figura 8.3 mostriamo la soluzione (8.7) con la condizione iniziale

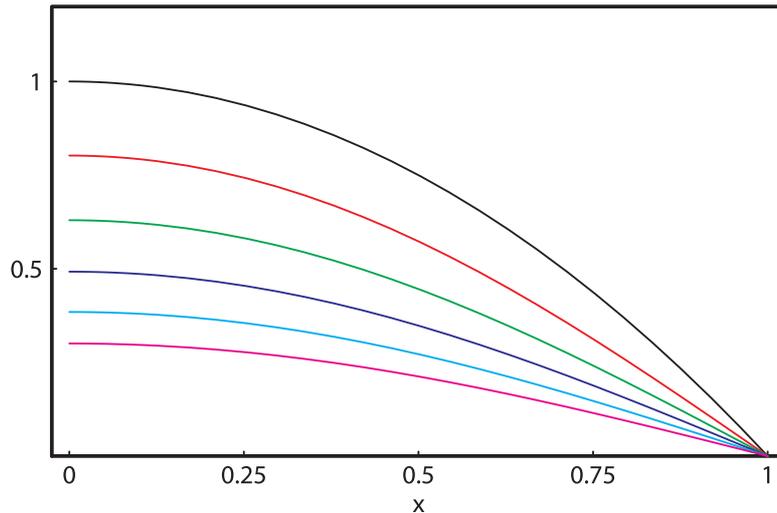


Figura 8.3: Soluzione $u(x, t)$ dell'equazione del calore per l'esempio 8.1.3, con la condizione iniziale (8.8), per $t = 0$ (linea nera), $t = 0.1$ (linea rossa), $t = 0.2$ (linea verde), $t = 0.3$ (linea blu), $t = 0.4$ (linea celeste) e $t = 0.5$ (linea fucsia).

$$h(x) = L - x^2 \quad (8.8)$$

per alcuni istanti di tempo notevoli.

Esempio 8.1.4 (Condizioni non omogenee) Consideriamo ora l'equazione del calore (5.19)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

con le condizioni al contorno non omogenee $u(0, t) = 0$ ed $u(L, t) = \alpha$, e sia $u(x, 0) = h(x)$ la condizione iniziale. Queste condizioni descrivono, per esempio, la propagazione del calore in una sbarra i cui estremi sono tenuti a temperature diverse. Il metodo dello sviluppo in autofunzioni, in questo caso, ha bisogno di una modifica per essere applicato. Se proviamo ad applicarlo come abbiamo fatto finora, infatti, non siamo in grado di trovare una base appropriata di autofunzioni. Il modo per superare questa difficoltà ci viene suggerito

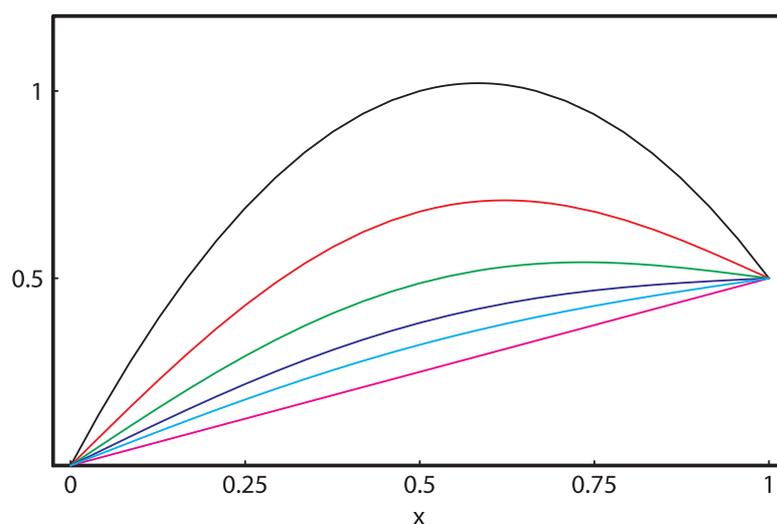


Figura 8.4: Soluzione $u(x, t)$ dell'equazione del calore per l'esempio 8.1.4, con la condizione iniziale (8.11) ed $\alpha = 0.5$, per $t = 0$ (linea nera), $t = 0.1$ (linea rossa), $t = 0.2$ (linea verde), $t = 0.3$ (linea blu), $t = 0.4$ (linea celeste) e $t = 0.5$ (linea fucsia).

dall'intuizione fisica, secondo la quale un mezzo con una distribuzione di temperatura lontana dall'equilibrio termodinamico evolve fino al raggiungimento di uno stato stazionario (di equilibrio). La distribuzione di temperatura nello stato stazionario, che indichiamo con $w(x)$, deve necessariamente soddisfare l'equazione del calore stazionaria, cioè

$$K \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (8.9)$$

con le condizioni al contorno richieste, $w(0) = 0$ e $w(L) = \alpha$. La soluzione esiste ed è data da

$$w(x) = \alpha \frac{x}{L}.$$

Ritornando ora all'equazione dipendente dal tempo, scriviamo la soluzione nella forma

$$u(x, t) = w(x) + v(x, t),$$

con $v(x, t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$. Si nota subito che v obbedisce all'equazione del calore,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = K \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

con condizioni al contorno omogenee $v(0, t) = u(0, t) - w(0) = 0$ e $v(L, t) = u(L, t) - w(L) = 0$ e con la condizione iniziale $v(x, 0) = u(x, 0) - w(x) = h(x) - w(x)$. Il problema per v è pertanto identico a quello visto nel primo esempio, e la soluzione generale si può scrivere

$$u(x, t) = w(x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-t/\tau_n} \sin k_n x, \quad (8.10)$$

con $k_n = n\pi/L$, $\tau_n = 1/(k_n^2 K)$ ed i coefficienti B_n determinati da

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L [h(x) - w(x)] \sin k_n x dx.$$

Nella figura 8.4 mostriamo la soluzione (8.10) con la condizione iniziale

$$h(x) = 3x(L - x) + \alpha \frac{x}{L} \quad (8.11)$$

ad alcuni istanti di tempo, con $\alpha = 0.5$.

Esempio 8.1.5 (Condizioni di Neumann) Continuiamo questa sezione con un esempio in cui si applicano le condizioni al contorno di flusso nullo ad entrambi gli estremi, considerando però questa volta l'equazione della diffusione. Questo equivale a considerare un sistema di particelle (ad esempio un gas) chiuso, nel quale non entrano e dal quale non escono particelle. Sia dunque

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

l'equazione della diffusione, con D il coefficiente di diffusione, e siano $\partial u/\partial x(0, t) = \partial u/\partial x(L, t) = 0$ le condizioni al contorno, con $u(x, 0) = h(x)$ la condizione iniziale. Qui, $u(x, t)$ rappresenta una densità di particelle (per esempio, di un gas) in funzione dello spazio e del tempo. Un'importante proprietà di conservazione deriva dalle condizioni di flusso nullo agli estremi. Consideriamo la grandezza

$$N(t) = \int_0^L u(x, t) dx,$$

che è, a meno di costanti moltiplicative, il numero totale di particelle del sistema. Dimostriamo che, con le condizioni di flusso nullo imposte agli estremi, il numero di particelle si conserva nel tempo, cioè $dN/dt = 0$. Infatti:

$$\frac{dN}{dt} = \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} dx = D \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_0^L = 0$$

per le condizioni al contorno imposte. Pertanto,

$$N(t) = \int_0^L u(x, t) dx = N(0) = \int_0^L h(x) dx \equiv N_0,$$

con N_0 il numero totale di particelle.

Percorrendo la stessa strada dello sviluppo in autofunzioni già percorsa negli esempi precedenti, ed utilizzando le autofunzioni dell'operatore

$$L\phi = -\frac{d^2\phi}{dx^2}$$

con le condizioni al contorno $d\phi/dx(0) = d\phi/dx(L) = 0$ del presente problema, già studiate nell'esempio 1.3.2 e date dalle (1.34),

$$\phi_n(x) = \cos k_n x$$

con

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

otteniamo per i coefficienti $c_n(t)$ dello sviluppo

$$c_n(t) = B_n e^{-t/\tau_n}$$

dove $\tau_n = 1/(k_n^2 D)$ ha nuovamente il significato di un tempo di rilassamento. Notiamo ora che ad $n = 0$, cioè $k_n = 0$, corrisponde un'autofunzione costante, che poniamo uguale ad 1 per convenienza. La soluzione generale è allora nella forma di una serie di coseni

$$u(x, t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-t/\tau_n} \cos k_n x \quad (8.12)$$

con

$$A_0 = \frac{2}{L} \int_0^L h(x) dx$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L h(x) \cos k_n x dx.$$

L'evoluzione temporale della soluzione $u(x, t)$ a partire da una condizione iniziale $h(x)$ qualsiasi è data dalla (8.12) e rappresenta il rilassamento verso uno stato stazionario. I coefficienti τ_n sono i tempi caratteristici di rilassamento di ciascun termine della serie; la soluzione stazionaria, raggiunta teoricamente in un tempo infinito, è una costante,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \frac{A_0}{2} = \frac{N(0)}{L} = \frac{N_0}{L}.$$

Lo stato stazionario è dunque uno stato a densità uniforme.

Esempio 8.1.6 (Condizioni di tipo misto) Consideriamo ora un esempio con condizioni al contorno di tipo misto, quali compaiono, ad esempio, se si considera una sbarra la cui temperatura è fissata ad un estremo, mentre all'altro estremo il calore viene irradiato liberamente nello spazio ad una temperatura fissata. Allora si dovrà risolvere l'equazione del calore

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con le condizioni al contorno

$$\begin{aligned} u(0, t) &= T_0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) + \lambda u(L, t) &= T_L, \end{aligned}$$

dove λ è una costante, e con la condizione iniziale $u(x, 0) = h(x)$. Supponiamo, per semplicità, che sia $T_0 = T_L = 0$. Sviluppriamo la soluzione nella base delle autofunzioni dell'operatore L definito da

$$L\phi = -\frac{d^2\phi}{dx^2}$$

con le condizioni al contorno del nostro problema, vale a dire $\phi(0) = 0$ e $d\phi/dx(L) + \lambda\phi(L) = 0$. Abbiamo già studiato il problema agli autovalori per questo operatore nell'esempio 1.3.3 (con la corrispondenza $\alpha = 1$ e $\beta = \lambda$), trovando le autofunzioni

$$\phi_n(x) = \sin\left(\frac{\alpha_n x}{L}\right)$$

con gli autovalori α_n soluzioni dell'equazione (1.36) che ora riscriviamo come

$$\alpha_n + \lambda L \tan \alpha_n = 0.$$

La soluzione generale diventa dunque

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-t/\tau_n} \sin\left(\frac{\alpha_n x}{L}\right)$$

dove abbiamo introdotto i tempi caratteristici $\tau_n = \alpha_n^2 K / L^2$ e con i coefficienti B_n determinati dalla condizione iniziale. A tal fine, notiamo che

$$\int_0^L \sin\left(\frac{\alpha_n x}{L}\right) \sin\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) dx = 0$$

per $m \neq n$. Indicando con

$$J_n \equiv \int_0^L \sin^2\left(\frac{\alpha_n x}{L}\right) dx$$

abbiamo

$$B_n = \frac{1}{J_n} \int_0^L h(x) \sin(\alpha_n x / L) dx.$$

Esempio 8.1.7 (Equazione non omogenea) Consideriamo infine un esempio di equazione non omogenea,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x) \quad (8.13)$$

per la funzione incognita $u(x, t)$ con le condizioni al contorno omogenee $u(0, t) = u(L, t) = 0$ e la condizione iniziale $u(x, 0) = h(x)$. Questa equazione descrive la propagazione del calore in una sbarra di lunghezza L in presenza di una sorgente di calore indipendente dal tempo. La soluzione di questa equazione non omogenea si può scrivere come somma di una soluzione particolare u_p con la soluzione dell'omogenea associata u_1 , facendo attenzione ad imporre correttamente le condizioni al contorno e le condizioni iniziali. Quale soluzione particolare prendiamo $u_p(x, t) = w(x)$, con $w(x)$ soluzione dell'equazione differenziale ordinaria

$$K \frac{d^2 w}{dx^2} + f(x) = 0$$

con condizioni al contorno $w(0) = w(L) = 0$. La soluzione dell'omogenea associata, che è semplicemente l'equazione del calore con condizioni di Dirichlet nulle, è data dalla (8.1),

$$u_1(x, t) = \sum_1^{\infty} B_n e^{-t/\tau_n} \sin k_n x.$$

dove

$$k_n = \frac{n\pi}{L},$$

$\tau_n = 1/(k^2 K)$ ed i coefficienti B_n sono da determinarsi dalle condizioni iniziali:

$$u(x, 0) = h(x) = u_p(x) + u_1(x, 0).$$

I coefficienti B_n sono dunque dati da

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L [h(x) - u_p(x)] \sin k_n x dx.$$

Questa procedura per risolvere equazioni non omogenee può essere estesa a problemi con altre condizioni al contorno.

8.2 Metodo delle trasformate di Fourier

Esempio 8.2.1 (Equazione del calore in un dominio infinito) Ritorniamo ancora sull'equazione del calore (5.19)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

nell'intervallo $-\infty < x < \infty$, che descrive la conduzione del calore in un mezzo infinito. Sia inoltre $u(x, 0) = h(x)$ la condizione iniziale. Supponiamo anche che la soluzione rimanga finita quando $x \rightarrow \pm\infty$. Introduciamo la trasformata di Fourier della funzione incognita u ,

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_k(t) e^{ikx} dk,$$

con l'inversa

$$\hat{u}_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-ikx} dx.$$

Operando con la trasformata di Fourier direttamente sull'equazione (5.1) otteniamo un'equazione per \hat{u} :

$$\frac{\partial \hat{u}_k}{\partial t} + k^2 K \hat{u}_k = 0, \quad (8.14)$$

di facile risoluzione:

$$\hat{u}_k(t) = \hat{u}_k(0) e^{-k^2 K t}, \quad (8.15)$$

dove

$$\hat{u}_k(0) = \hat{h}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-ikx} dx$$

è la trasformata di Fourier della condizione iniziale. Antitrasformando:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_k(0) e^{-k^2 K t + ikx} dk$$

che è la soluzione del problema.

Come esempio, consideriamo la condizione iniziale

$$h(x) = T_0 e^{-(x/L)^2/2}, \quad (8.16)$$

che corrisponde ad una distribuzione gaussiana di temperatura attorno alla posizione $x = 0$. La trasformata di Fourier di questa condizione iniziale è

$$\hat{h}(k) = T_0 L e^{-(kL)^2/2}$$

e quindi

$$\hat{u}_k(t) = T_0 L e^{-(k\lambda)^2/2}$$

dove abbiamo posto $\lambda = \lambda(t) \equiv \sqrt{L^2 + 2Kt}$. La soluzione dell'equazione del calore diventa

$$u(x, t) = \frac{T_0 L}{\lambda(t)} e^{-(x/\lambda(t))^2/2}. \quad (8.17)$$

L'evoluzione temporale della soluzione è rappresentata graficamente in figura 8.3 (per $L = 1$, e $K = 1$), dove vediamo che il profilo di temperatura tende

a zero al trascorrere del tempo. È facile verificare che, mentre il profilo della funzione u tende a zero, il suo integrale su tutto lo spazio rimane costante nel tempo. Infatti, abbiamo che

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = \sqrt{2\pi} \hat{u}_0(t) = \sqrt{2\pi} T_0 L,$$

indipendente da t .

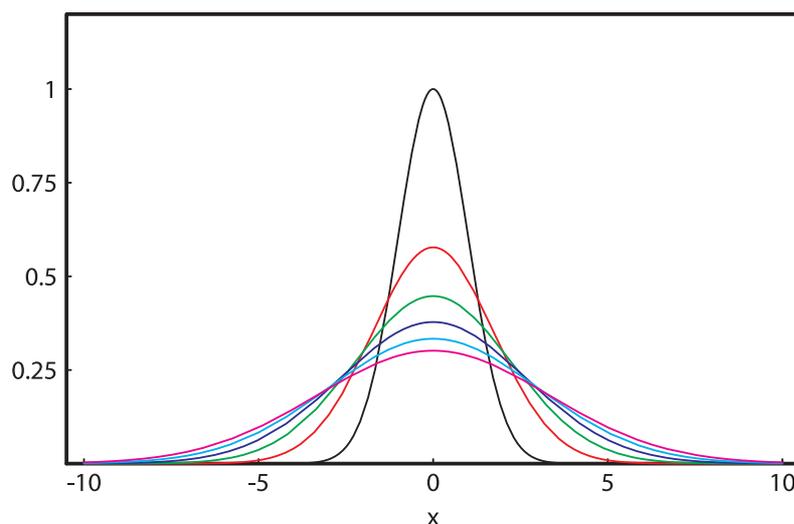


Figura 8.5: Soluzione $u(x, t)$ dell'equazione del calore per l'esempio 8.2.1, con la condizione iniziale (8.16), per $t = 0$ (linea nera), $t = 1$ (linea rossa), $t = 2$ (linea verde), $t = 3$ (linea blu), $t = 4$ (linea celeste) e $t = 5$ (linea fucsia). Qui, abbiamo posto $L = 1$ e $K = 1$.

Esempio 8.2.2 (Equazione di drift-diffusion in un dominio infinito) Consideriamo l'equazione di drift-diffusion (5.29)

$$\frac{\partial n}{\partial t} + v \frac{\partial n}{\partial x} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

nel dominio $-\infty < x < \infty$ con la condizione iniziale $n(x, 0) = h(x)$ e le condizioni al contorno $n(0, t) = 0$, $n(+\infty, t) = 0$. Sia

$$\hat{n}_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} n(x, t) e^{-ikx} dx.$$

la trasformata di Fourier della densità, con

$$n(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{n}_k(t) e^{ikx} dk,$$

la sua antitrasformata. Operando con la trasformata di Fourier direttamente sull'equazione (5.29) otteniamo per \hat{n} :

$$\frac{\partial \hat{n}_k}{\partial t} + (ikv + k^2 D)\hat{n}_k = 0, \quad (8.18)$$

di facile risoluzione:

$$\hat{n}_k(t) = \hat{n}_k(0)e^{-ikvt - k^2 Dt}, \quad (8.19)$$

dove

$$\hat{n}_k(0) = \hat{h}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-ikx} dx$$

è la trasformata di Fourier della condizione iniziale. Antitrasformando:

$$n(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{n}_k(0)e^{-k^2 Dt + ik(x-vt)} dk$$

che è la soluzione del problema.

Come esempio, consideriamo nuovamente una condizione iniziale Gaussiana, del tipo

$$h(x) = \frac{N_0}{L} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-((x-x_0)/L)^2/2}, \quad (8.20)$$

che corrisponde ad una distribuzione gaussiana di particelle attorno alla posizione $x = x_0$, che supponiamo negativa e posta ad una distanza grande dall'origine. La trasformata di Fourier di questa condizione iniziale è

$$\hat{h}(k) = \frac{N_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-(kL)^2/2 - ikx_0}$$

e quindi

$$\hat{n}_k(t) = \frac{N_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-(k\lambda)^2/2 - ik(x_0+vt)}$$

dove abbiamo posto $\lambda = \lambda(t) \equiv \sqrt{L^2 + 2Dt}$. La soluzione dell'equazione di drift-diffusion allora diventa

$$n(x, t) = \frac{N_0}{\lambda(t)} e^{-((x-x_0-vt)/\lambda(t))^2/2}. \quad (8.21)$$

L'evoluzione temporale della soluzione è rappresentata graficamente in figura 8.6 (per $N_0 = 1$, $L = 1$, $x_0 = -5$, $v = 1$ e $D = 1$), dove vediamo che il profilo di densità tende a zero al trascorrere del tempo, spostandosi contemporaneamente verso destra. È facile verificare che, mentre il profilo della funzione n si appiattisce per effetto della diffusione e tende a zero, il suo integrale su tutto lo spazio rimane costante nel tempo. Infatti, abbiamo che

$$\int_{-\infty}^{\infty} n(x, t) dx = \sqrt{2\pi} \hat{n}_0(t) = N_0,$$

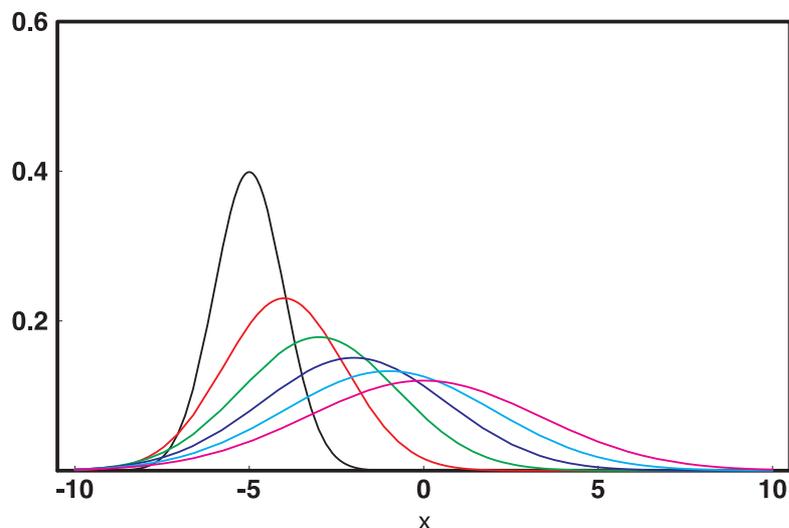


Figura 8.6: Soluzione $n(x, t)$ dell'equazione di drift-diffusion dell'esempio 8.2.2, con la condizione iniziale (8.20), per $t = 0$ (linea nera), $t = 1$ (linea rossa), $t = 2$ (linea verde), $t = 3$ (linea blu), $t = 4$ (linea celeste) e $t = 5$ (linea fucsia). Qui, abbiamo posto $N_0 = 1$, $L = 1$, $x_0 = -5$, $v = 1$ e $D = 1$.

indipendente da t .

Questo esempio potrebbe rappresentare l'andamento temporale del profilo di densità di un tracciante colorato in un mezzo che si muove con velocità v ; all'inizio il tracciante è concentrato in una certa posizione e, con l'andare del tempo, si sposta assieme al fluido in cui è immerso e, al tempo stesso, diffonde.

8.3 Trasformazioni di similitudine

Illustriamo con qualche esempio il metodo delle trasformazioni di similitudine, o della funzione di Green.

Esempio 8.3.1 (Dominio semi-infinito) Consideriamo l'equazione del calore

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

sull'intervallo semi-infinito $0 \leq x < \infty$ e siano, in questo esempio, $u(0, t) = T_S$, $u(\infty, t) = T_0$ le condizioni al contorno con $u(x, 0) = h(x) = T_0$ la condizione iniziale. Abbiamo studiato il problema dell'equazione del calore in un dominio semi-infinito nella sezione 5.3.4, ma con condizioni al contorno diverse. Si vede subito che, introducendo la funzione ausiliaria $v(x, t) = u(x, t) - T_S$, il problema si riconduce a quello studiato, con la condizione iniziale $v(x, 0) =$

$h(x) = T_0 - T_S$. Possiamo quindi applicare le formule (5.40) e (5.41) con questa condizione iniziale ed otteniamo, dopo qualche passaggio,

$$u(x, t) = (T_0 - T_S)\text{Erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Kt}}\right) + T_S \quad (8.22)$$

Nella figura 8.7 mostriamo la soluzione (8.22) con la condizione iniziale $u(x, 0) = T_0$ per alcuni istanti di tempo notevoli, con $K = 1$, $T_0 = 1$ e $T_S = 0.2$.

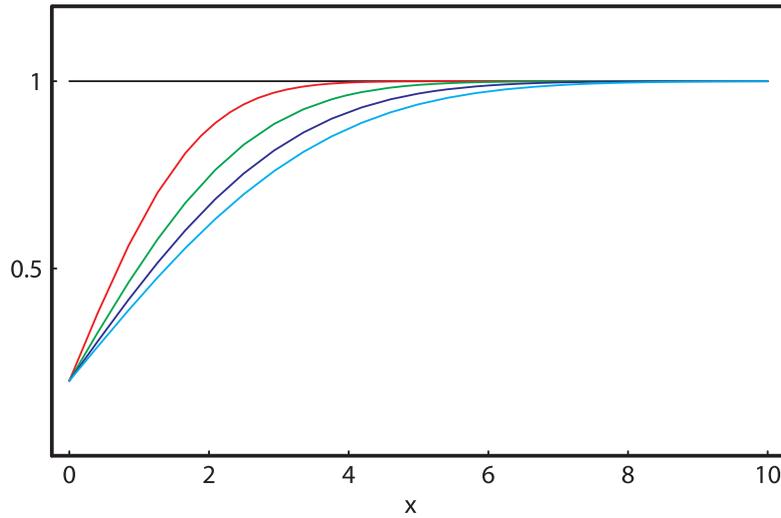


Figura 8.7: Soluzione $u(x, t)$, data dalla (8.22), dell'equazione del calore con la trasformazione di similitudine (sezione 8.3), per $t = 0$ (linea nera), $t = 1$ (linea rossa), $t = 2$ (linea verde), $t = 3$ (linea blu) e $t = 4$ (linea celeste). Qui, abbiamo posto $K = 1$, $T_0 = 1$ e $T_S = 0.2$.

Esempio 8.3.2 (Dominio infinito) Riprendiamo ora il primo esempio della sezione 8.2, dove abbiamo risolto l'equazione del calore

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

nell'intervallo $-\infty < x < \infty$ usando le trasformate di Fourier, e sia nuovamente (8.16) la condizione iniziale. Possiamo applicare direttamente la forma integrale della soluzione, l'equazione (5.37), con $h(x)$ data dalla (8.16), ed otteniamo:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4Kt)} h(y) dy = \\ &= T_0 \frac{1}{\sqrt{4\pi Kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4Kt)} e^{-(y/L)^2/2} dy = \\ &= T_0 \frac{1}{\sqrt{4\pi Kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4Kt) - (y/L)^2/2} dy \end{aligned}$$

Dopo alcuni passaggi, ed introducendo il parametro $\lambda = \lambda(t) \equiv \sqrt{L^2 + 2Kt}$, già definito nella sezione 8.2, riotteniamo il risultato (8.17) per la temperatura $u(x, t)$:

$$u(x, t) = \frac{T_0 L}{\lambda(t)} e^{-(x/\lambda(t))^2/2}.$$

8.4 Esercizi

Esercizio 8.4.1 Determinare la soluzione dell'equazione del calore

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

per la funzione incognita $u(x, t)$ con le seguenti condizioni iniziali ed al contorno:

- (a) $u(0, t) = 0$, $u(L, t) = 0$ ed $u(x, 0) = Ax$, dove A è una costante reale non nulla;
- (b) $\partial u/\partial x(0, t) = 0$, $\partial u/\partial x(L, t) = 0$ ed $u(x, 0) = A$, dove A è una costante reale non nulla;
- (c) $\partial u/\partial x(0, t) = 0$, $u(L, t) = 0$ ed $u(x, 0) = A(L - x)$, dove A è una costante reale non nulla;
- (d) $\partial u/\partial x(0, t) - Bu(0, t) = 0$, $u(L, t) = 0$ ed $u(x, 0) = A$, dove A e B sono due costanti reali non nulle;
- (e) $\partial u/\partial x(0, t) - Bu(0, t) = 0$, $\partial u/\partial x(L, t) + Bu(L, t) = 0$ ed $u(x, 0) = A$, dove A e B sono due costanti reali non nulle;
- (f) $u(0, t) = B$, $\partial u/\partial x(L, t) + Au(L, t) = C$ ed $u(x, 0) = 0$, dove A , B e C sono due costanti reali non nulle;
- (g) $u(0, t) = 0$, $\partial u/\partial x(L, t) = Ae^{-t}$, $u(x, 0) = T$, dove A e T sono due costanti reali non nulle, con $T > 0$;
- (h) $\partial u/\partial x(0, t) = At$, $\partial u/\partial x(L, t) = T$, $u(x, 0) = 0$, dove A e T sono due costanti reali non nulle.

Esercizio 8.4.2 Determinare la soluzione stazionaria dell'equazione del calore nel dominio $0 \leq x \leq L$ con le condizioni al contorno $\partial u/\partial x(0, t) = A$ e $\partial u/\partial x(L, t) = B$, dove A e B sono due costanti reali. Considerare sia il caso $A = B$ che il caso $A \neq B$ e commentare la differenza.

Esercizio 8.4.3 Determinare la soluzione dell'equazione del calore

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

per la funzione incognita $u(x, t)$, $0 \leq x \leq L$, nel caso in cui la conducibilità termica assuma il valore $K = K_1$ per $0 \leq x \leq L/2$ e $K = K_2$ per $L/2 \leq x \leq L$, supponendo

che la temperatura $u(x, t)$ ed il flusso di calore siano continui nel punto $x = L/2$ e con le condizioni ausiliarie

- (a) $u(0, t) = 0, u(L, t) = T;$
- (b) $u(0, t) = 0, \partial u / \partial x(L, t) = B;$
- (c) $\partial u / \partial x(0, t) = A, \partial u / \partial x(L, t) = B$ (considerare sia $A = B$ sia $A \neq B$).

Esercizio difficile. Suggestione: considerare dapprima la soluzione stazionaria. Successivamente, nel separare le variabili, tenere presente che la conducibilità termica è in realtà funzione di x .

Esercizio 8.4.4 Si risolva l'equazione di drift-diffusion

$$\frac{\partial n}{\partial t} + v \frac{\partial n}{\partial x} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

($v > 0$) per la funzione incognita $n(x, t)$, con $0 \leq x \leq L, t \geq 0$, con le seguenti condizioni al contorno:

- (a) $\partial n / \partial x(0, t) = 0, n(L, t) = 0;$
- (b) $n(0, t) = 0, n(L, t) = N_0;$
- (c) $n(0, t) = 0, \partial n / \partial x(L, t) = B;$
- (d) $\partial n / \partial x(0, t) = A, \partial n / \partial x(L, t) = B$ (considerare sia $A = B$ sia $A \neq B$).

e la condizione iniziale $n(x, 0) = h(x)$.

Capitolo 9

Equazioni ellittiche

9.1 L'equazione di Laplace nel disco

Consideriamo l'equazione di Laplace

$$\Delta u = 0$$

in un disco di raggio R e centro l'origine in \mathbb{R}^2 , con condizioni al contorno di Dirichlet. Sia, in particolare,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (9.1)$$

l'equazione di Laplace nel dominio $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ con $u = f$ per $(x, y) \in \partial\Omega$, con $\partial\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 = R^2\}$. Data la geometria del dominio, è conveniente studiare il problema in coordinate polari piane:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \\ y &= r \sin \phi. \end{aligned}$$

Nelle coordinate polari (r, ϕ) l'equazione di Laplace ha la forma

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0, \quad (9.2)$$

che si ottiene dalla (1.64) ponendo $\theta = \pi/2$ e dove abbiamo indicato con $u(r, \phi)$ la dipendenza di u da r e ϕ , con $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \phi < 2\pi$, e la funzione u è periodica di periodo 2π , $u(r, \phi) = u(r, \phi + 2\pi)$. La condizione al contorno diventa $u(R, \phi) = f(\phi)$, con f periodica di periodo 2π . Data la periodicità della funzione incognita nella variabile ϕ , conviene risolvere l'equazione sviluppando u in autofunzioni, utilizzando la base complessa di Fourier (1.11):

$$u(r, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_n(r) e^{in\phi}.$$

con $U_n(r) = U_{-n}(r)^*$ per la realtà della soluzione. Sostituendo nell'equazione di Laplace (9.2), e tenendo conto dell'indipendenza lineare delle autofunzioni, otteniamo per i coefficienti U_n

$$r^2 \frac{d^2 U_n}{dr^2} + r \frac{dU_n}{dr} - n^2 U_n = 0,$$

che è un'equazione di Eulero nel caso $m \neq 0$. La soluzione dell'equazione di Eulero è della forma

$$U_n(r) = r^\sigma, \quad (9.3)$$

dove σ è detto indice e va determinato sostituendo la forma (9.3) nell'equazione. Nel nostro caso otteniamo l'equazione per σ

$$\sigma(\sigma - 1) + \sigma - n^2$$

che ha come soluzioni $\sigma_{1,2} = \pm n$. Le due soluzioni linearmente indipendenti allora sono $U_n^1(r) = r^n$ e $U_n^2(r) = r^{-n}$ per $n \neq 0$ e $U_0^1(r) = 1$ ed $U_0^2(r) = \ln r$ per $n = 0$. Possiamo dunque scrivere la soluzione generale nella forma

$$U_m(r) = \begin{cases} A_n + B_n \ln r, & n = 0 \\ A_n r^n + B_n r^{-n} & n \neq 0 \end{cases}$$

con A_n e B_n costanti complesse tali che $A_n = B_{-n}^*$ e $B_n = A_{-n}^*$. Affinchè la soluzione rimanga limitata per $r = 0$ si deve avere $B_n = 0$ per $n \geq 0$ ed $A_n = 0$ per $n < 0$. Tenendo conto di queste relazioni, la soluzione generale dell'equazione di Laplace (9.1) si può scrivere

$$u(r, \phi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n e^{in\phi} + A_n^* e^{-in\phi})$$

ovvero, con $A_n = C_n + iD_n$,

$$u(r, \phi) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (C_n \cos n\phi + D_n \sin n\phi).$$

Applicando la condizione al contorno per $r = R$ otteniamo

$$f(\phi) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R^n (C_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi)$$

che permette di determinare le costanti C_n e D_n :

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi \\ C_n &= \frac{1}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\phi) \cos n\phi d\phi \\ D_n &= \frac{1}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\phi) \sin n\phi d\phi \end{aligned}$$

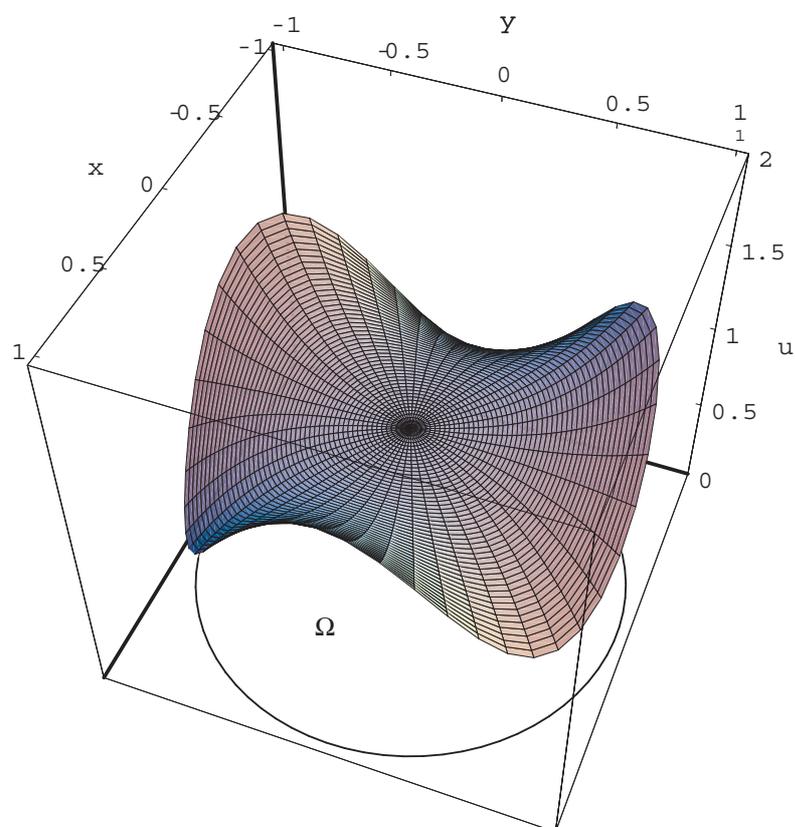


Figura 9.1: Soluzione $u(x, y)$ dell'equazione di Laplace (9.1) nel disco con la condizione al contorno (9.4).

Nella figura 9.1 mostriamo la soluzione dell'equazione di Laplace (9.1) con la condizione al contorno

$$f(\phi) = 1 + \frac{1}{2} \cos(3\phi) \quad (9.4)$$

9.2 L'equazione di Laplace nella sfera

Consideriamo l'equazione di Laplace

$$\Delta u = 0$$

in una sfera di raggio R e centro l'origine in \mathbb{R}^3 , con condizioni al contorno di Dirichlet. Sia, in particolare,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (9.5)$$

l'equazione di Laplace nel dominio $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ con $u = f$ per $(x, y, z) \in \partial\Omega$, con $\partial\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$. Data la geometria del problema, è conveniente studiare il problema in coordinate polari sferiche

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi \\y &= r \sin \theta \sin \phi \\z &= r \cos \theta.\end{aligned}$$

Nelle coordinate polari (r, θ, ϕ) l'equazione di Laplace ha la forma

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right] = 0$$

(vedi 1.64), dove abbiamo indicato con $u(r, \theta, \phi)$ la dipendenza di u da r , θ e ϕ , con $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$ le coordinate polari, e la funzione u è periodica di periodo 2π in ϕ , $u(r, \theta, \phi) = u(r, \theta, \phi + 2\pi)$. La condizione al contorno diventa $u(R, \theta, \phi) = f(\theta, \phi)$, con f periodica di periodo 2π in ϕ . La base più opportuna in questo caso è data dalle funzioni $Y_l^m(\theta, \phi)$, che sono dette *armoniche sferiche* e costituiscono una base completa per lo spazio $L^2(S^2)$, dove S^2 è lo spazio delle funzioni definite sulla superficie sferica:

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} \left(\frac{r}{R} \right)^l Y_l^m(\theta, \phi)$$

Le relazioni di ortonormalità sono

$$(Y_l^m, Y_{l'}^{m'}) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_l^m(\theta, \phi) Y_{l'}^{m'}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

e la definizione esplicita delle armoniche sferiche è in termini dei polinomi di Legendre $P_l^m(\cos \theta)$:

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{2\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}.$$

Applicando la condizione al contorno per $r = R$ otteniamo

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} Y_l^m(\theta, \phi)$$

che permette di determinare le costanti A_{lm} dalle relazioni di ortonormalità delle funzioni Y_l^m :

$$A_{lm} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta, \phi) Y_l^m(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi.$$

9.3 L'equazione di Laplace nel rettangolo

Consideriamo l'equazione di Laplace

$$\Delta u = 0$$

in una regione rettangolare di \mathbb{R}^2 , con condizioni al contorno di Dirichlet. Sia, in particolare,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (9.6)$$

l'equazione di Laplace nel dominio $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ con

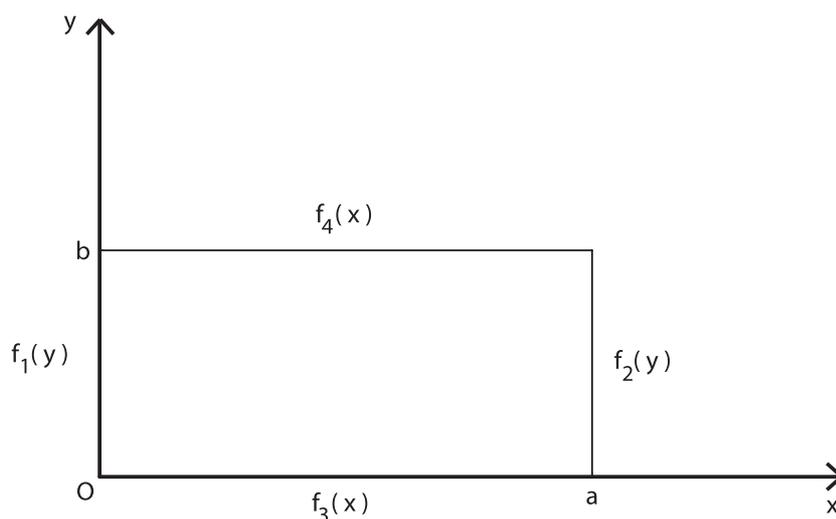


Figura 9.2: Dominio rettangolare Ω per l'equazione di Laplace (9.6) con le condizioni al contorno (9.7).

$u = f$ per $(x, y) \in \partial\Omega$, che esplicitiamo come

$$\begin{aligned} u(0, y) &= f_1(y), & u(a, y) &= f_2(y) \\ u(x, 0) &= f_3(x), & u(x, b) &= f_4(x) \end{aligned} \quad (9.7)$$

con f_1, f_2, f_3 ed f_4 funzioni continue nei loro intervallo di definizione. Il dominio con le condizioni al contorno sono mostrati nella figura 9.2. Ovviamente, la condizione al contorno deve essere continua ai vertici del rettangolo, e pertanto le f_i devono soddisfare le relazioni $f_1(0) = f_3(0) = \alpha$, $f_1(b) = f_4(0) = \beta$, $f_4(a) = f_2(b) = \gamma$ ed $f_2(0) = f_3(a) = \delta$, ma altrimenti sono arbitrarie. È forse più conveniente, in questo caso, risolvere il problema con il metodo della separazione delle variabili, scrivendo $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Vediamo subito che le condizioni al contorno impongono che tra le funzioni f_i siano soddisfatte

ulteriori condizioni. Infatti le condizioni al contorno per $x = 0$ ed $x = a$,

$$\begin{aligned} u(0, y) &= X(0)Y(y) = f_1(y) \\ u(a, y) &= X(a)Y(y) = f_2(y), \end{aligned}$$

implicano che $f_1(y)/f_2(y) = X(0)/X(a) = \text{costante}$. Analogamente, le condizioni al contorno per $y = 0$ ed $y = b$ implicano $f_3(y)/f_4(y) = Y(0)/Y(b) = \text{costante}$. Siccome le quattro funzioni f_1, f_2, f_3 ed f_4 sono assegnate arbitrariamente (fatte salvo le condizioni ai vertici del rettangolo), non possiamo ottenere la soluzione per questa via.

Per ottenere la soluzione, introduciamo preliminarmente la funzione $w(x, y)$ tale che

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

in Ω , con le condizioni

$$\begin{aligned} w(0, 0) &= u(0, 0) \\ w(0, b) &= u(0, b) \\ w(a, 0) &= u(a, 0) \\ w(a, b) &= u(a, b), \end{aligned} \tag{9.8}$$

cioè una funzione che soddisfa l'equazione di Laplace nel rettangolo, con gli stessi valori ai vertici assunti dalla funzione u . È facile vedere che una tale funzione è data da

$$w(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy$$

con le costanti a_{ij} determinate dalle condizioni (9.8).

Supponiamo, ora, di essere in grado di risolvere un problema di Dirichlet più semplice del problema (9.6)-(9.7), nel quale la funzione u obbedisce all'equazione di Laplace nel rettangolo, ma le condizioni al contorno sono questa volta

$$\begin{aligned} u(0, y) &= g_1(y) \\ u(a, y) &= u(x, 0) = u(x, b) = 0, \end{aligned}$$

con $g_1(y) = f_1(y) - w(0, y)$ (e quindi $g_1(0) = g_1(b) = 0$) ed indichiamo con $v_1(x, y)$ la soluzione di questo problema. In modo analogo, indichiamo con v_2, v_3 e v_4 le soluzioni del problema di Dirichlet con le condizioni al contorno, rispettivamente,

$$\begin{aligned} u(a, y) &= g_2(y) \\ u(0, y) &= u(x, 0) = u(x, b) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u(x, 0) &= g_3(x) \\u(0, y) &= u(a, y) = u(x, b) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u(x, b) &= g_4(x) \\u(x, 0) &= u(0, y) = u(a, y) = 0.\end{aligned}$$

con $g_2(y) = f_2(y) - w(a, y)$, $g_3(x) = f_3(x) - w(x, 0)$ e $g_4(x) = f_4(x) - w(x, b)$. La soluzione del problema di Dirichlet iniziale si può scrivere allora come

$$u(x, y) = v_1(x, y) + v_2(x, y) + v_3(x, y) + v_4(x, y) + w(x, y).$$

Infatti, si ha banalmente

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

in Ω , in quanto somma di funzioni armoniche in Ω , ed inoltre la funzione $u(x, y)$ soddisfa alle condizioni al contorno (lo studente lo verifichi per esercizio). Ci siamo pertanto ridotti a risolvere i problemi di Dirichlet per le funzioni v_1, v_2, v_3, v_4 , che sono analoghi.

Risolviamo il problema di Dirichlet per la funzione v_1 mediante separazione delle variabili scrivendo come al solito la soluzione nella forma $u(x, y) = X(x)Y(y)$. L'equazione di Laplace diventa allora

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0.$$

Vediamo ora come la costante di separazione, come risulta da

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = C,$$

debba essere scelta positiva, cioè $C = k^2$. Con una costante di separazione negativa $C = -k^2$, infatti, abbiamo il sistema di equazioni

$$\begin{aligned}X'' + k^2 X &= 0 \\Y'' - k^2 Y &= 0\end{aligned}$$

la cui soluzione generale è

$$\begin{aligned}X(x) &= A \cos kx + B \sin kx \\Y(y) &= C \cosh ky + D \sinh ky.\end{aligned}$$

Applicando le condizioni al contorno in $u(x, 0) = u(x, b) = 0$ abbiamo

$$\begin{aligned}X(x)Y(0) &= 0 \\X(x)Y(b) &= 0,\end{aligned}$$

cioè $Y(0) = Y(b) = 0$. Questo è possibile se e solo se $C = D = 0$, che fornisce la soluzione nulla. Anche una costante di separazione nulla $C = 0$ non è accettabile, in quanto si avrebbero le soluzioni

$$\begin{aligned} X(x) &= Ax + B \\ Y(y) &= Cy + D, \end{aligned}$$

che possono soddisfare le condizioni al contorno $Y(0) = Y(b) = 0$, nuovamente, se e solo se $C = D = 0$. Supponendo pertanto che la costante di separazione sia positiva, abbiamo le equazioni

$$\begin{aligned} X'' - k^2 X &= 0 \\ Y'' + k^2 Y &= 0 \end{aligned}$$

con la soluzione generale

$$\begin{aligned} X(x) &= A \cosh kx + B \sinh kx \\ Y(y) &= C \cos ky + D \sin ky. \end{aligned}$$

Applicando la condizione al contorno $Y(0) = 0$ abbiamo $C = 0$, mentre la condizione al contorno $Y(b) = 0$, $\sin kb = 0$, dà per k i valori

$$k = k_n = \frac{n\pi}{b}.$$

La soluzione generale dell'equazione di Laplace con le condizioni $u(x, 0) = u(x, b) = 0$ è pertanto

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n y (C_n \cosh k_n x + D_n \sinh k_n x)$$

alla quale applichiamo ora le condizioni al contorno in $x = 0$ ed $x = a$. La condizione in $u(a, y) = 0$ diventa

$$\sum_n \sin k_n y (C_n \cosh k_n a + D_n \sinh k_n a) = 0$$

che è soddisfatta da

$$C_n = -D_n \tanh k_n a.$$

In $x = 0$ abbiamo invece $u(0, y) = g_1(y)$, e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin k_n y = g_1(y)$$

e quindi

$$C_n = \frac{2}{b} \int_0^b g_1(y) \sin k_n y dy$$

che completa la soluzione del problema di Dirichlet per v_1 . Le soluzioni dei problemi di Dirichlet per v_2 , v_3 e v_4 , che riportiamo senza i dettagli, sono rispettivamente

$$v_2(x, y) = \sum_n D_n \sin k_n y \sinh k_n x$$

con

$$D_n = \frac{2}{b \sinh k_n a} \int_0^b g_2(y) \sin k_n y dy.$$

Nelle rimanenti espressioni, abbiamo

$$k_n = \frac{n\pi}{a}.$$

$$v_3(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n x (C_n \cosh k_n y + D_n \sinh k_n y)$$

con

$$C_n = -D_n \tanh k_n b$$

e

$$C_n = \frac{2}{a} \int_0^a g_3(x) \sin \frac{n\pi}{a} x dx$$

$$v_4(x, y) = \sum_n D_n \sin \frac{n\pi}{a} x \sinh \frac{n\pi}{a} y$$

con

$$D_n = \frac{2}{a \sinh k_n b} \int_0^a g_4(x) \sin k_n x dx.$$

9.4 Il problema di Poisson-Dirichlet nel rettangolo

Consideriamo l'equazione di Poisson in una regione rettangolare di \mathbb{R}^2 , con condizioni al contorno di Dirichlet. Sia, in particolare,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

l'equazione di Poisson nel dominio $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ con $u = 0$ per $(x, y) \in \partial\Omega$, che esplicitiamo come

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0, & u(a, y) &= 0 \\ u(x, 0) &= 0, & u(x, b) &= 0 \end{aligned} \tag{9.9}$$

E' facile rendersi conto che il problema non è risolvibile con il metodo usuale della separazione delle variabili, scrivendo $u(x, y) = X(x)Y(y)$, nemmeno

considerando l'equazione omogenea associata. La strada da percorrere è allora quella di considerare un problema di Sturm-Liouville associato, e di sviluppare sia la funzione incognita u che il termine di sorgente f nelle autofunzioni di tale problema. Il problema di Sturm-Liouville deve avere le stesse condizioni al contorno del problema di partenza, e sarà quindi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = 0,$$

con le condizioni al contorno (9.9). Se risolviamo il problema separando le variabili, $u(x, y) = X(x)Y(y)$, otteniamo le equazioni per X ed Y :

$$\begin{aligned} X'' + k^2 X &= 0 \\ Y'' + (\lambda - k^2) Y &= 0 \end{aligned}$$

con la soluzione

$$\begin{aligned} k &= k_n = \frac{n\pi}{a} \\ \lambda &= \lambda_{nm} = \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) \\ X(x) &= X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{a} \\ Y(y) &= Y_m(y) = \sin \frac{m\pi y}{b}. \end{aligned}$$

Possiamo pertanto utilizzare le autofunzioni

$$\phi_{nm}(x, y) = \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$$

per sviluppare le funzioni u ed f . Le relazioni di ortonormalità per queste autofunzioni sono

$$(\phi_{nm}, \phi_{n'm'}) \equiv \int_0^a \int_0^b \phi_{nm}(x, y) \phi_{n'm'}(x, y) dy dx = \frac{4}{ab} \delta_{nn'} \delta_{mm'}.$$

Introducendo gli sviluppi

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{nm} \phi_{nm}(x, y) \\ f(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f_{nm} \phi_{nm}(x, y). \end{aligned}$$

e sostituendo nell'equazione di Poisson, otteniamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(-\frac{n^2 \pi^2}{a^2} - \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \right) u_{nm} \phi_{nm} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f_{nm} \phi_{nm}$$

e pertanto

$$u_{nm} = -\frac{f_{nm}}{(n^2 \pi^2 / a^2) + (m^2 \pi^2 / b^2)}$$

che dà la soluzione del problema.

9.5 Esercizi

Esercizio 9.5.1 Risolvere l'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

nella regione rettangolare $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ con le seguenti condizioni al contorno:

- (a) $\partial u / \partial x(0, y) = 0, u(a, y) = u(x, 0) = u(x, b) = 1;$
- (b) $\partial u / \partial x(0, y) = u(a, y) = u(x, 0) = 0, u(x, b) = 1;$
- (c) $\partial u / \partial y(x, 0) = u(x, b) = u(a, y) = 0, u(0, y) = 1;$
- (d) $u(x, 0) = u(x, b) = u(a, y) = 0, u(0, y) = 1;$
- (e) $\partial u / \partial y(x, 0) = \partial u / \partial y(x, b) = 0, u(0, y) = u(a, y) = 1;$
- (f) $u(0, y) = u(x, 0) = 1, \partial u / \partial x(a, y) = \partial u / \partial y(x, b) = 0;$
- (g) $u(0, y) = u(a, y) = 1, \partial u / \partial y(x, 0) = u(x, b) = 0;$
- (h) $u(0, y) = u(x, 0) = 1, u(a, y) = u(x, b) = 0;$
- (i) $u(0, y) = u(a, y) = u(x, 0) = 0,$

$$u(x, b) = \begin{cases} 2x/a, & 0 < x < a/2 \\ 2(a-x)/a & a/2 < x < a \end{cases}$$

Esercizio 9.5.2 Risolvere i seguenti problemi al contorno di tipo ellittico, in coordinate cilindriche (r, z) , nella regione $\Omega = \{(r, z) : 0 \leq r \leq R, 0 \leq z \leq H\}$ con le condizioni al contorno assegnate:

- (a)
$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$u(r, H) = \frac{\partial u}{\partial r}(a, z) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(r, 0) = \begin{cases} 1, & 0 < r < r_0 \\ 0, & r_0 < r < R \end{cases}$$

con $r_0 < R$
- (b)
$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$u(r, 0) = u(R, z) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(r, H) = Ar$$

con $A > 0$
- (c)
$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$\begin{aligned}
 & u(r, 0) = u(r, H) = 0 \\
 & u(R, z) = z \\
 \text{(d)} \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \\
 & u(r, 0) = 0 \\
 & \frac{\partial u}{\partial r}(R, z) = 0 \\
 & \frac{\partial u}{\partial z}(r, H) = 2r.
 \end{aligned}$$

Esercizio 9.5.3 Risolvere l'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(dopo averla scritta in coordinate polari piane) nel disco $r \leq R$ per la funzione incognita $u = u(r, \phi)$ con le condizioni al contorno assegnate:

- (a) $u(R, \phi) = 3 \sin 2\phi + 1$
- (b) $u(R, \phi) = 1 + 3 \sin \phi$
- (c) $u(R, \phi) = \sin^3 \phi$

Esercizio 9.5.4 Risolvere l'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

nel dominio D indicato e con le condizioni al contorno assegnate, eventualmente dopo averla scritta in un sistema di coordinate opportuno:

- (a), settore circolare $D = \{(r, \phi), 0 \leq r \leq R, 0 \leq \phi \leq \alpha\}$
 $u(r, 0) = u(r, \alpha) = 0, \partial u / \partial r(R, \phi) = f(\phi)$
- (b), corona circolare $D = \{(r, \phi), R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$
 $u(R_1, \phi) = g(\phi), u(R_2, \phi) = h(\phi)$ f e g funzioni periodiche
- (c), esterno del disco $D = \{(r, \phi), R \leq r < \infty, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$
 $u(R, \phi) = g(\phi)$ g funzione periodica
- (d) $D = \{(r, \phi), R \leq r < \infty, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$
 $u(R, \phi) = 1 + 3 \sin \phi$
- (e) $D = \{(r, \phi), 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \phi \leq \pi\}$
 $u(r, 0) = u(r, \pi) = 0, u(1, \phi) = \pi \sin \phi - \sin 2\phi$
- (f) $D = \{(r, \phi), 0 \leq r \leq R, 0 \leq \phi \leq \alpha\}$
 $u(r, 0) = u(r, \alpha) = 0, u(R, \phi) = f(\phi)$
- (g) $D = \{(r, \phi), 0 \leq r \leq R, 0 \leq \phi \leq \alpha\}$
 $u(r, 0) = 0, u(r, \alpha) = \alpha, u(R, \phi) = \phi$

Esercizio 9.5.5 Risolvere i seguenti problemi:

- (a) Determinare la distribuzione stazionaria di temperatura $u(r, \phi)$ in una lamina a forma di corona circolare, con $R_1 = 1$ ed $R_2 = 2$, isolata termicamente sul bordo esterno $r = 2$ e mantenuta ad una temperatura costante $u(1, \phi) = T \sin^2 \phi$ sul bordo interno $r = 1$.
- (b) Determinare la distribuzione stazionaria di temperatura $u(r, \phi)$ in una lamina a forma di corona circolare, con $R_1 = a$ ed $R_2 = b$, mantenuta ad una temperatura costante $u(b, \phi) = T$ sul bordo esterno $r = b$ e con la condizione $\partial u / \partial r(a, \phi) = A$ sul bordo interno $r = a$.

Parte III

Soluzioni numeriche

Capitolo 10

Differenze finite

10.1 Introduzione

In quest'ultimo capitolo, ci limitiamo ad esporre i concetti di base del metodo alle differenze finite per la soluzione delle equazioni differenziali alle derivate parziali, prendendo come esempi di base l'equazione del calore e l'equazione del trasporto, con un breve cenno finale ai problemi ellittici. Nei primi due casi, imposteremo anche l'analisi dell'errore.

10.2 Il metodo delle differenze finite

Supponiamo di cercare la soluzione numerica di un'equazione differenziale ordinaria (per ora non specificata nel dettaglio) per una funzione incognita $f(x)$ nel dominio $\Omega = \{x, 0 \leq x \leq a\}$, con a un numero reale positivo. La prima operazione da compiere è quella di discretizzare questo dominio, ovvero di introdurre una decomposizione dell'intervallo $[0, a]$ in N sottointervalli, che supporremo uguali, di misura

$$\Delta x = a/N.$$

Avremo pertanto un insieme discreto di punti, $\{x_n\}_{n=0}^N$, con $x_0 = 0$, $x_N = a$ ed $x_{n+1} = x_n + \Delta x$. In corrispondenza a ciascuno di questi valori discreti della variabile indipendente x , avremo un valore della funzione $f(x_n)$. Nel seguito, con $f(x_n)$ indicheremo il valore vero della funzione f nel punto x_n , mentre indicheremo con f_n l'approssimazione numerica della soluzione nel punto x_n . Ai fini dell'impostazione e dello sviluppo dei metodi numerici, possiamo tranquillamente identificare $f(x_n)$ con f_n , mentre è importante mantenerli distinti quando si studia il comportamento dell'errore. Risolvere numericamente l'equazione differenziale significa determinare, con un opportuno algoritmo, i va-

lori f_n dell'approssimazione alla soluzione esatta. Nello stesso tempo, però, vogliamo anche conoscere l'errore che commettiamo, cioè l'entità della deviazione dell'approssimazione dalla soluzione esatta, che definiamo come

$$e_n = |f_n - f(x_n)|.$$

In generale, ci aspettiamo che l'errore e_n dipenda dalla discretizzazione usata, ed in particolare dal parametro Δx (o, equivalentemente, da N), e che tenda a zero quando $\Delta x \rightarrow 0$. Sarà dunque $e_n = e_n(\Delta x)$ e $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} e_n(\Delta x) = 0$. È però importante sapere con quale legge asintotica e_n tende a zero, cioè se, ad esempio, $e_n \sim \Delta x$, oppure $e_n \sim \Delta x^2$ per $\Delta x \rightarrow 0$. In generale, se

$$e_n \sim \Delta x^n, \quad \Delta x \rightarrow 0,$$

si dice che l'algoritmo è di *ordine* n .

Nell'equazione differenziale compaiono le derivate della funzione f ; dobbiamo pertanto cercare un'approssimazione delle derivate, utilizzando lo spazio discreto $\{x_n\}$ introdotto sopra, ed i corrispondenti valori f_n della funzione. Procedendo dapprima in modo intuitivo, possiamo pensare di approssimare la derivata prima della funzione f nel punto x_n usando il rapporto incrementale con i due punti immediatamente vicini, cioè

$$\frac{df}{dx}(x_n) \equiv \frac{f(x_{n+1}) - f(x_{n-1}))}{2\Delta x}. \quad (10.1)$$

Per conoscere l'entità dell'errore che si commette approssimando la derivata prima nel punto x_n con il membro di destra della (10.1), sviluppiamo $f(x_{n+1})$ ed $f(x_{n-1})$ in serie di Taylor attorno ad x_n :

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &= f(x_n) + \Delta x f'(x_n) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x_n) + \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x_n) + \mathcal{O}(\Delta x^4) \\ f(x_{n-1}) &= f(x_n) - \Delta x f'(x_n) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x_n) - \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x_n) + \mathcal{O}(\Delta x^4). \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro otteniamo

$$f(x_{n+1}) - f(x_{n-1}) = 2\Delta x f'(x_n) + \frac{\Delta x^3}{3} f'''(x_n) + \mathcal{O}(\Delta x^4)$$

da cui ricaviamo per la derivata prima

$$f'(x_n) = \frac{f(x_{n+1}) - f(x_{n-1}))}{2\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{3} f'''(x_n) + \mathcal{O}(\Delta x^3).$$

Questo mostra che l'errore che si commette usando la (10.1) per approssimare la derivata prima in x_n è del second'ordine in Δx , e diciamo che la (10.1) fornisce un'approssimazione del second'ordine per la derivata prima. Da notare che

il coefficiente nel termine dominante dell'errore è proporzionale alla derivata terza della funzione, e quindi diventa grande quando questa derivata è grande.

L'espressione (10.1) non è però utile per approssimare la derivata prima della funzione nei punti estremi dell'intervallo, cioè x_0 ed x_N . Si fa allora ricorso al rapporto incrementale sinistro (o destro) nel punto in questione. L'errore, però, diventa del prim'ordine in Δx :

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (10.2)$$

$$\frac{df}{dx}(x_N) = \frac{f(x_N) - f(x_{N-1})}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x). \quad (10.3)$$

Il ricorso al rapporto incrementale sinistro è necessario anche nei problemi di evoluzione temporale in cui compare la derivata prima rispetto al tempo, come nell'equazione del calore o nelle equazioni del prim'ordine. Ne faremo uso nelle prossime sezioni.

Con ragionamenti analoghi, si può dimostrare che l'approssimazione al second'ordine per la derivata seconda della funzione f nel punto x_n è

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x_n) = \frac{f(x_{n+1}) - 2f(x_n) + f(x_{n-1}))}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (10.4)$$

Le espressioni (10.1) e (10.4) per le approssimazioni al second'ordine delle derivate ordinarie, si generalizzano naturalmente al caso delle derivate parziali di una funzione u di più variabili. Consideriamo, ed esempio, il caso di una funzione di due variabili, $u(x, y)$, definita in un dominio rettangolare

$$\Omega = \{(x, y), 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$$

con $a > 0$ e $b > 0$ due numeri reali. Per discretizzare questo dominio, introduciamo una decomposizione dell'intervallo $[0, a]$ in $N + 1$ punti ed una dell'intervallo $[0, b]$ in $M + 1$ punti. Avremo allora uno spazio discreto dato dall'insieme di punti $\{(x_n, y_m)\}$, $n = 0, \dots, N$, $m = 0, \dots, M$; l'insieme di questi punto si chiama *griglia spaziale*, caratterizzata dai passi $\Delta x = a/N$ e $\Delta y = b/M$. Analogamente al caso unidimensionale, indichiamo con $u(x_n, y_m)$ il valore della soluzione esatta nel punto (x_n, y_m) , e con u_{nm} la sua approssimazione numerica. Le approssimazioni al second'ordine per le derivate parziali prime e seconde della funzione u sono allora

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_n, y_m) \approx \frac{u(x_{n+1}, y_m) - u(x_{n-1}, y_m)}{2\Delta x} \quad (10.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_n, y_m) \approx \frac{u(x_n, y_{m+1}) - u(x_n, y_{m-1})}{2\Delta y} \quad (10.6)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_n, y_m) \approx \frac{u(x_{n+1}, y_m) - 2u(x_n, y_m) + u(x_{n-1}, y_m)}{\Delta x^2} \quad (10.7)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_n, y_m) \approx \frac{u(x_n, y_{m+1}) - 2u(x_n, y_m) + u(x_n, y_{m-1}))}{\Delta y^2} \quad (10.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x_n, y_m) &\approx \frac{u(x_{n+1}, y_{m+1}) - u(x_{n-1}, y_{m+1})}{4\Delta x \Delta y} + \\ &- \frac{u(x_{n+1}, y_{m-1}) - u(x_{n-1}, y_{m-1})}{4\Delta x \Delta y}. \end{aligned} \quad (10.9)$$

10.3 L'equazione del calore

Illustriamo ora il metodo delle differenze finite con una sua applicazione importante: la soluzione numerica dell'equazione del calore per la funzione incognita $u(x, t)$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (10.10)$$

nel dominio $0 \leq x \leq L$, $0 \leq t \leq t_F$. Abbiamo inoltre posto $K = 1$ per comodità. Imponiamo le condizioni al contorno di Dirichlet $u(0, t) = u(L, t) = 0$ e la condizione iniziale $u(x, 0) = h(x)$. L'evoluzione temporale della funzione $u(x, t)$ viene seguita fino ad un tempo massimo t_F . Introduciamo lo spazio discreto (t_n, x_i) , $n = 0, \dots, N$, $i = 0, \dots, M$, $t_0 = 0$, $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, $t_N = t_F$, $x_0 = 0$, $x_{i+1} = x_i + \Delta x$, $x_M = L$. Siano inoltre u_i^n le approssimazioni ai valori della funzione u sui punti della griglia. Utilizzando le espressioni (10.5)-(10.9) per le derivate parziali, identificando i valori della funzione $u(x_i, t_n)$ nei punti della griglia con u_i^n , e sostituendo nella (10.10), otteniamo la versione discreta dell'equazione del calore

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}. \quad (10.11)$$

Dobbiamo qui notare alcune cose. Per la derivata temporale della funzione u , utilizziamo l'espressione (10.2), in quanto è quella che dovremmo usare in ogni caso nel punto iniziale. Il membro di destra è stato calcolato all'istante t_n , ma avremmo anche potuto calcolarlo all'istante t_{n+1} . Nel primo caso, otteniamo il *metodo di Eulero esplicito*, nel secondo il *metodo di Eulero implicito*, che analizzeremo in seguito. Sono pure possibili altre scelte più sofisticate, ma non le approfondiamo. L'equazione (10.11) ci dà direttamente la soluzione numerica dell'equazione del calore. Infatti, essendo la funzione u nota all'istante iniziale, abbiamo che $u_i^0 = h(x_i)$, per $i = 0, N$. Dalla (10.11), supponendo nota la funzione u all'istante t_n , abbiamo per induzione

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \nu(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n),$$

con $\nu = \Delta t / \Delta x^2$, e dove il membro di destra è costituito interamente da termini noti, in quanto coinvolgono i valori della funzione u all'istante t_n . Inoltre, per soddisfare le condizioni al contorno, abbiamo $u_0^{n+1} = 0$ e $u_M^{n+1} = 0$.

Il metodo di Eulero esplicito è, come abbiamo visto, semplice da applicare. Vogliamo ora studiare il comportamento dell'errore, definito come $e_i^n(\Delta x, \Delta t) \equiv |u_i^n - u(x_i, t_n)|$. Prima di procedere, introduciamo la nozione di *errore di troncamento*. A tal proposito, riscriviamo l'equazione del calore discretizzata nella forma

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0.$$

Questa equazione è soddisfatta in modo esatto dai valori u_i^n dell'approssimazione numerica, ma non dalla soluzione esatta. L'errore di troncamento $T(x, t)$ consiste appunto nel valore che assume l'equazione discreta quando essa viene calcolata con i valori della soluzione esatta, cioè

$$T(x, t) = \frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{\Delta t} - \frac{u(x_{i+1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_{i-1}, t_n)}{\Delta x^2}.$$

Se si ha

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0} T(x, t) = 0$$

lo schema numerico si dice *consistente*. Inoltre, lo schema numerico si dice *convergente* o *stabile* se, per ogni punto del dominio di interesse (x, t) , quando $(x_i, t_n) \rightarrow (x, t)$ allora si ha anche $u_i^n \rightarrow u(x, t)$. Siccome $(x_i, t_n) \rightarrow (x, t)$ implica $\Delta x \rightarrow 0$ e $\Delta t \rightarrow 0$ simultaneamente, dobbiamo studiare il comportamento dell'errore e_i^n quando $\Delta x \rightarrow 0$ e $\Delta t \rightarrow 0$. Ora, la condizione che $\Delta x \rightarrow 0$ e $\Delta t \rightarrow 0$ non specifica come queste due grandezze tendano a zero, cioè non specifica quale sia la sorte del parametro $\nu = \Delta t / \Delta x^2$. Valutiamo dunque, per ν fissato, la differenza $e_i^{n+1} - e_i^n$:

$$\begin{aligned} e_i^{n+1} - e_i^n &= u_i^{n+1} - u_i^n - [u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)] = \\ &= \nu(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) - [u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)] = \\ &= \nu(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) - \nu[u(x_{i+1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_{i-1}, t_n)] + \\ &\quad + T(x_i, t_n)\Delta t = \\ &= \nu(e_{i+1}^n - 2e_i^n + e_{i-1}^n) + T_i^n \Delta t \end{aligned}$$

ovvero

$$e_i^{n+1} = (1 - 2\nu)e_i^n + \nu(e_{i+1}^n + e_{i-1}^n) + T_i^n \Delta t.$$

Sia ora $E^n = \text{Max}_{0 \leq i \leq M} |e_i^n|$ e supponiamo che l'errore di troncamento sia limitato da $T_i^n \leq \bar{T}$. Allora, se $\nu \leq 1/2$, i coefficienti nell'ultima uguaglianza sono non negativi ed abbiamo $E^{n+1} \leq E^n + \bar{T}\Delta t$. Siccome $E^0 = 0$, è facile vedere che

$$E^n \leq n\bar{T}\Delta t$$

e quindi $E^n \rightarrow 0$ per $\Delta t \rightarrow 0$. Ciò dimostra che, per $\nu \leq 1/2$, lo schema numerico (di Eulero esplicito) è convergente.

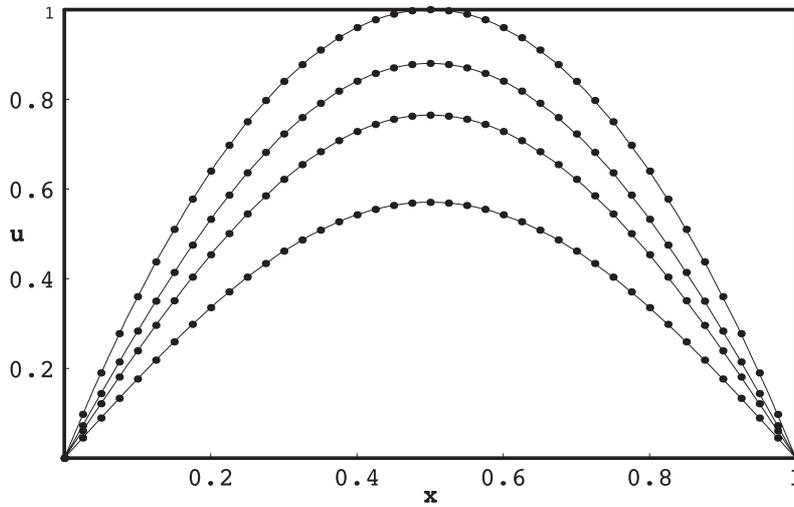


Figura 10.1: Soluzione numerica dell'equazione del calore con il metodo di Eulero esplicito. Caso stabile.

In generale, la convergenza non risulta provata per $\nu > 1/2$, come è facile vedere con un semplice esempio numerico, i cui risultati sono riportati nelle figure 10.1 e 10.2. In questo esempio l'equazione del calore è risolta nel dominio $0 \leq x \leq 1$ con $h(x) = 4x(1-x)$, $M = 40$, $\Delta t = 0.0003$ (figura 10.1) e $\Delta t = 0.000321$ (figura 10.2), corrispondenti rispettivamente a $\nu \approx 0.48$ e $\nu \approx 0.51$. Le figure mostrano la soluzione a diversi istanti temporali: all'istante iniziale e dopo 50, 100 e 200 passi temporali. La curva continua rappresenta la soluzione esatta ottenuta col metodo della separazione delle variabili e data dalla (8.1), mentre i punti rappresentano la soluzione numerica. La differenza in Δt nei due esempi è minima, ma sufficiente per passare dal regime stabile a quello instabile. L'accuratezza della soluzione numerica, pur se con così pochi punti in x , è evidente nel caso stabile, mentre nel caso instabile si vede chiaramente che la soluzione numerica comincia ad oscillare in modo inaccettabile attorno alla soluzione esatta.

Dobbiamo ora chiederci cosa succede se, nell'equazione del calore (10.10), valutiamo il membro di destra all'istante t_{n+1} invece che all'istante t_n . Invece della (10.11) otteniamo

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad (10.12)$$

che, dopo qualche passaggio, dà

$$u_i^{n+1}(1 + 2\nu) - \nu(u_{i+1}^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) = u_i^n,$$

per $i = 1, \dots, M-1$. Le equazioni per $i = 0$ e per $i = M$ sono fornite dalle

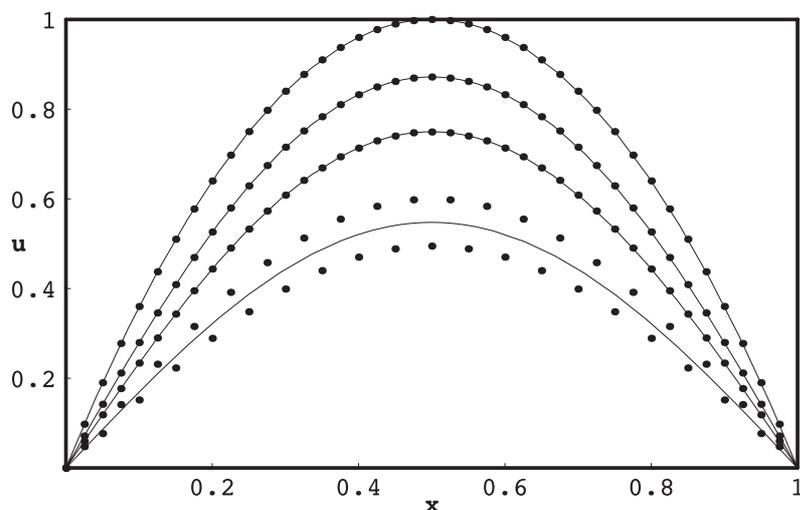


Figura 10.2: Soluzione numerica dell'equazione del calore con il metodo di Eulero esplicito. Caso instabile.

condizioni al contorno, $u_0^{n+1} = u_M^{n+1} = 0$. Otteniamo pertanto il sistema lineare

$$A\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n,$$

dove \mathbf{u}^n è il vettore ad $M+1$ componenti $\mathbf{u}^n = (u_0^n, u_1^n, \dots, u_M^n)$ ed A la matrice quadrata tridiagonale di dimensione $M+1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\nu & 1+2\nu & -\nu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\nu & 1+2\nu & -\nu & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -\nu & 1+2\nu & -\nu \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La determinazione di \mathbf{u}^{n+1} , questa volta, richiede dunque la soluzione di un sistema lineare tridiagonale che, però, di solito, è un'operazione a basso costo computazionale:

$$\mathbf{u}^{n+1} = A^{-1}\mathbf{u}^n.$$

Questo è lo schema di Eulero implicito. La convenienza rispetto al più semplice metodo esplicito sta nel fatto che il metodo implicito è convergente per qualunque valore di ν . La dimostrazione è più complicata di quella della convergenza dello schema esplicito, e la omettiamo.

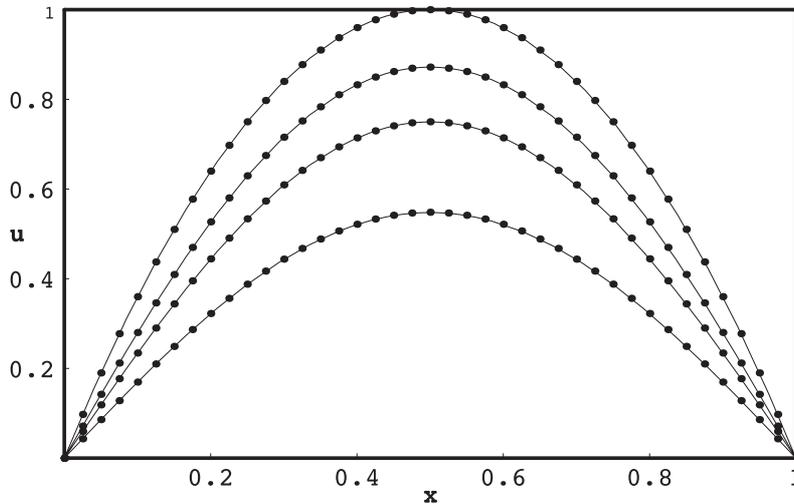


Figura 10.3: Soluzione numerica dell'equazione del calore con il metodo di Eulero implicito.

10.4 Il metodo *upwind* per l'equazione di trasporto

Nei capitoli 3 e 6 abbiamo studiato l'equazione del trasporto libero (3.17)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

e l'abbiamo risolta utilizzando alcune tecniche analitiche nel caso $v = \text{costante}$. Quando v non è costante, ma è una funzione $v(x, t)$ delle due variabili indipendenti x e t , dobbiamo ricorrere all'approssimazione numerica. In questa sezione, vediamo come il metodo delle differenze finite può essere applicato per ottenere la soluzione numerica di questa equazione. Consideriamo dapprima il caso con v costante e studiamone la stabilità. Apporteremo quindi le (poche) modifiche necessarie per applicare il metodo al caso di v variabile.

Sia ora $v = \text{costante}$. Usando le espressioni discrete introdotte nelle sezioni precedenti per approssimare le derivate prime, ed utilizzando uno schema esplicito, otteniamo

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + v \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0, \quad (10.13)$$

che dà

$$u_i^{n+1} = (1 - \nu)u_i^n + \nu u_{i-1}^n \quad (10.14)$$

dove abbiamo posto $\nu = v\Delta t/\Delta x$ ed abbiamo approssimato la derivata rispetto ad x con un rapporto incrementale sinistro. Vediamo ora di studiare

il comportamento dell'errore per stabilire se lo schema è convergente oppure instabile. Come nella precedente sezione, supporremo che esista un limite all'errore di troncamento, vale a dire che $T(x, t) \leq \bar{T}$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} e_i^{n+1} - e_i^n &= u_i^{n+1} - u_i^n - [u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)] = \\ &= u_i^{n+1} - u_i^n + \nu[u(x_i, t_n) - u(x_{i-1}, t_n)] + T(x_i, t_n)\Delta t \\ &= -\nu(e_i^n - e_{i-1}^n) + T_i^n \Delta t \end{aligned}$$

ovvero

$$e_i^{n+1} = (1 - \nu)e_i^n + \nu e_{i-1}^n + T_i^n \Delta t.$$

Come nel caso dell'equazione del calore, otteniamo una maggiorazione utile quando i coefficienti del membro di destra di quest'ultima uguaglianza sono positivi e sommano ad uno. Questo succede per $0 < \nu \leq 1$. Questa condizione non è molto soddisfacente. Infatti, se il limite superiore, $\nu \leq 1$, è una condizione sul rapporto $\Delta t/\Delta x$, il limite inferiore è in realtà una condizione su v , cioè $v > 0$. Poichè vogliamo avere uno schema numerico che possa trattare anche il caso $v < 0$, dobbiamo modificare qualcosa nelle nostre approssimazioni per le derivate. È facile rendersi conto che, con $v < 0$ (e quindi di $\nu < 0$), la derivata rispetto ad x va approssimata con il rapporto incrementale destro. Infatti, così facendo, otteniamo

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + v \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0,$$

che dà

$$u_i^{n+1} = (1 + \nu)u_i^n - \nu u_{i+1}^n$$

Per quanto riguarda l'errore allora abbiamo

$$\begin{aligned} e_i^{n+1} - e_i^n &= u_i^{n+1} - u_i^n - [u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)] = \\ &= \nu(u_i^n - u_{i+1}^n) - \nu[u(x_i, t_n) - u(x_{i+1}, t_n)] + T_i^n \Delta t = \\ &= \nu(e_i^n - e_{i+1}^n) + T_i^n \Delta t \end{aligned}$$

ovvero

$$e_i^{n+1} = (1 + \nu)e_i^n - \nu e_{i+1}^n + T_i^n \Delta t.$$

In questo caso, otteniamo la maggiorazione $E^{n+1} \leq E^n + \bar{T}\Delta t$, con la conseguente proprietà di convergenza dello schema, quando $-1 < \nu < 0$. Assommando i due risultati, perveniamo al seguente criterio: l'approssimazione con il rapporto incrementale sinistro per la derivata rispetto ad x è stabile quando $v > 0$, l'approssimazione con il rapporto incrementale destro è stabile per $v < 0$. La condizione $\nu < 1$ per $v > 0$, o quella $\nu > -1$ per $v < 0$, va sotto il nome di *condizione CFL*, dai nomi di Courant, Friedrichs e Lewy, che l'hanno formulata nel 1928. La si può capire con il seguente ragionamento, che impostiamo nel caso $v > 0$ (il caso con $v < 0$ è del tutto simmetrico). Consideriamo

l'equazione (10.14); questa ci dice che la soluzione numerica nel punto x_i all'istante t_{n+1} dipende dai valori della soluzione numerica all'istante t_n nei due punti x_i ed x_{i-1} . Procedendo ulteriormente a ritroso nel tempo, costruiamo un dominio di dipendenza per il valore della soluzione in (x_i, t_{n+1}) che raggiunge la condizione iniziale nel punto x_{i-n} . Ricordiamo ora che, quando abbiamo studiato l'equazione delle onde nella sezione 5.1, abbiamo introdotto proprio il concetto di dominio di dipendenza per la soluzione esatta e che tale dominio era dato dall'intervallo $[x - vt, x + vt]$. Considerando soltanto l'estremo inferiore di tale intervallo, si vede che la condizione $\nu \leq 1$ è soddisfatta quando il dominio di dipendenza dell'equazione differenziale è contenuto all'interno del dominio di dipendenza numerico, raggiungendone la frontiera per $\nu = 1$.

Supponiamo ora che v non sia costante; per semplicità, consideriamo il caso $v = v(x)$ (indipendente dal tempo). Lo *schema upwind* consiste nell'usare il rapporto incrementale sinistro dove $v(x) > 0$ ed il rapporto incrementale destro dove $v(x) < 0$:

$$u_i^{n+1} = \begin{cases} (1 - \nu_i)u_i^n + \nu_i u_{i+1}^n, & v(x_i) > 0 \\ (1 + \nu_i)u_i^n - \nu_i u_{i-1}^n, & v(x_i) < 0 \end{cases}$$

dove abbiamo posto $\nu_i = v_i \Delta t / \Delta x$. In base alle considerazioni esposte qui sopra, possiamo affermare che lo schema upwind è stabile se $|\nu_i| \leq 1$.

10.5 Problemi ellittici

Concludiamo questa breve introduzione ai metodi numerici con un cenno ai problemi ellittici, ed impostiamo la soluzione numerica dell'equazione di Poisson nel rettangolo, che abbiamo già studiato nella sezione 9.4 con il metodo delle autofunzioni. Per semplicità, prendiamo $a = b = 1$ per le dimensioni del rettangolo e sia

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

l'equazione da risolvere, con $u = 0$ per $(x, y) \in \partial\Omega$. Discretizzando il dominio Ω secondo $\{(x_n, y_m)\}$, $n = 0, \dots, N$, $m = 0, \dots, M$, $x_0 = 0$, $x_N = 1$, $y_0 = 0$, $y_M = 1$, $x_{n+1} = x_n + \Delta x$, $y_{m+1} = y_m + \Delta y$, $\Delta x = 1/N$, $\Delta y = 1/M$ e sostituendo le approssimazioni discrete (10.7) e (10.8) per le derivate seconde nell'equazione differenziale, perveniamo alla seguente equazione alle differenze finite:

$$\frac{u_{n+1,m} - 2u_{nm} + u_{n-1,m}}{\Delta x^2} + \frac{u_{n,m+1} - 2u_{nm} + u_{n,m-1}}{\Delta y^2} = f_{nm}.$$

Questa equazione va applicata ai punti interni del dominio Ω , cioè vale per $n = 1, \dots, N - 1$ ed $m = 1, \dots, M - 1$, mentre sulla frontiera, che corrisponde

ad $n = 0, N$ ed $m = 0, M$, dobbiamo imporre la condizione al contorno

$$\begin{aligned} u_{n0} &= 0, \quad n = 0, N \\ u_{nM} &= 0, \quad n = 0, N \\ u_{0m} &= 0, \quad m = 0, M \\ u_{Nm} &= 0, \quad m = 0, M. \end{aligned}$$

Il problema si riduce pertanto alla risoluzione di un sistema lineare di $(N + 1) \times (M + 1)$ equazioni in altrettante incognite. La struttura di questo sistema è molto particolare, e la possiamo analizzare organizzando le incognite u_{nm} in un vettore “a blocchi” \mathbf{b}^n , $n = 0, \dots, N$, costruito come segue: nel primo blocco di $M + 1$ elementi mettiamo le u_{nm} per $n = 0$ ed $m = 0, \dots, M$; nel secondo blocco mettiamo le u_{nm} per $n = 1$ ed $m = 0, \dots, M$; ...; nel i -esimo blocco mettiamo le u_{nm} per $n = i$ ed $m = 0, \dots, M$; e così via fino ad esaurire tutti gli elementi u_{nm} :

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^0 &= (u_{00}, u_{01}, \dots, u_{0M}) \\ \mathbf{b}^1 &= (u_{10}, u_{11}, \dots, u_{1M}) \\ &\dots \\ \mathbf{b}^i &= (u_{i0}, u_{i1}, \dots, u_{iM}) \\ &\dots \\ \mathbf{b}^N &= (u_{N0}, u_{N1}, \dots, u_{NM}) \end{aligned}$$

Il sistema lineare si scompone pertanto in un insieme di $N + 1$ sottosistemi accoppiati,

$$A^{nn'} \mathbf{b}^n = \mathbf{r}^{n'}$$

dove i vettori \mathbf{r}^n dei termini noti sono costruiti in modo del tutto analogo ai \mathbf{b}^n :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^0 &= (0, 0, \dots, 0) \\ \mathbf{r}^1 &= (0, f_{11}, \dots, f_{1,j-1}, \dots, 0) \\ &\dots \\ \mathbf{r}^i &= (0, f_{i1}, \dots, f_{i,j-1}, \dots, 0) \\ &\dots \\ \mathbf{r}^{N+1} &= (0, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Delle matrici $A^{nn'}$ diamo una rappresentazione grafica, nella figura 10.4, dove abbiamo posto $c = 1/\Delta x^2$, $e = 1/\Delta y^2$ e $d = -2(c + e)$. Notiamo che la matrice è tridiagonale a blocchi, con i blocchi diagonali A^{nn} a loro volta matrici tridiagonali ed i blocchi non diagonali $A^{n,n\pm 1}$ a loro volta matrici diagonali. La matrice costruita con le $A^{nn'}$ è pertanto composta per la maggior parte

da elementi nulli, mentre gli elementi diversi da zero sono molto pochi. Una tale matrice si dice *sparsa*. Le matrici sparse compaiono quasi sempre nella risoluzione dei problemi ellittici; la soluzione di un sistema lineare in cui la matrice dei coefficienti è sparsa, non procede con il solito metodo dell'eliminazione Gaussiana, in questo caso inefficiente, ma con metodi iterativi, la cui esposizione va oltre i limiti di questo corso.

$\begin{matrix} 100 \dots 0 \\ 010 \dots 0 \\ \dots \\ 0 \dots 001 \end{matrix}$	0	0					
$\begin{matrix} 100 \dots 0 \\ 0c0 \dots 0 \\ \dots \\ 00 \dots c0 \\ 0 \dots 001 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 100 \dots 0 \\ ede \dots 0 \\ \dots \\ 0 \dots ede \\ 0 \dots 001 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 100 \dots 0 \\ 0c0 \dots 0 \\ \dots \\ 0 \dots 0c0 \\ 0 \dots 001 \end{matrix}$	0				
0	$\begin{matrix} 100 \dots 0 \\ 0c0 \dots 0 \\ \dots \\ 00 \dots c0 \\ 0 \dots 001 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 100 \dots 0 \\ ede \dots 0 \\ \dots \\ 0 \dots ede \\ 0 \dots 001 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 100 \dots 0 \\ 0c0 \dots 0 \\ \dots \\ 0 \dots 0c0 \\ 0 \dots 001 \end{matrix}$	0			
			0	$\begin{matrix} 100 \dots 0 \\ 0c0 \dots 0 \\ \dots \\ 00 \dots c0 \\ 0 \dots 001 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 100 \dots 0 \\ ede \dots 0 \\ \dots \\ 0 \dots ede \\ 0 \dots 001 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 100 \dots 0 \\ 0c0 \dots 0 \\ \dots \\ 0 \dots 0c0 \\ 0 \dots 001 \end{matrix}$	0
			0	$\begin{matrix} 100 \dots 0 \\ 0c0 \dots 0 \\ \dots \\ 00 \dots c0 \\ 0 \dots 001 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 100 \dots 0 \\ ede \dots 0 \\ \dots \\ 0 \dots ede \\ 0 \dots 001 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 100 \dots 0 \\ 0c0 \dots 0 \\ \dots \\ 0 \dots 0c0 \\ 0 \dots 001 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 100 \dots 0 \\ 010 \dots 0 \\ \dots \\ 0 \dots 001 \end{matrix}$

Figura 10.4: La matrice A per il problema ellittico della sezione 10.5.

Bibliografia

- [1] C. van der Mee, Dispense di Fisica-Matematica, disponibili sul sito web <http://bugs.unica.it/cornelis/>;
- [2] A. Nocentini, Dispense di Fisica-Matematica, Dipartimento di Scienze Matematiche, Università degli Studi di Trieste;
- [3] J. Weidmann, *Linear Operators in Hilbert Spaces*, Springer Verlag, New York 1980;
- [4] F. John, *Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York 1986;
- [5] Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, San Diego 1985;
- [6] D. G. Duffy *Solutions of Partial Differential Equations*, TAB Books, Blue Ridge Summit, U.S.A., 1986;
- [7] W. A. Strauss *Partial Differential Equations: An Introduction*, John Wiley & Sons, Singapore 1992.
- [8] S. J. Farlow, *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Dover, New York 1993.
- [9] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical functions*, Dover, New York 1972.
- [10] Morton and Myers, *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, UK, 1994.