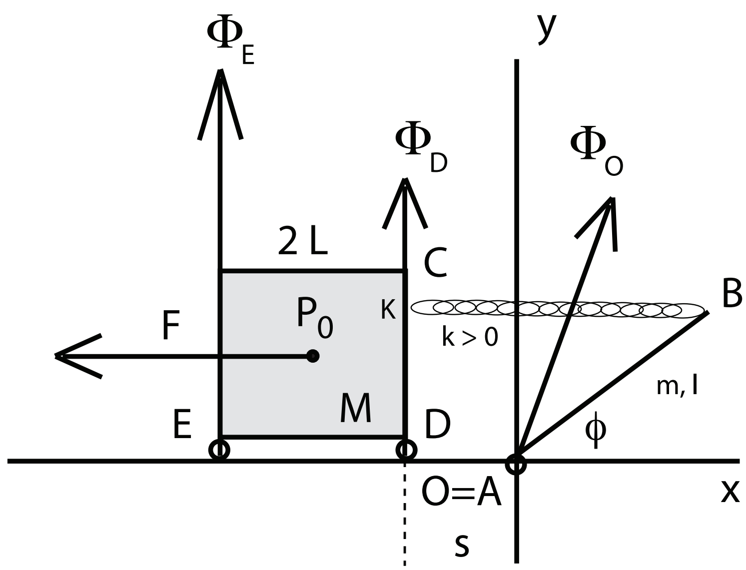
Esercizio 1.

Un sistema materiale è costituito da una lamina piana omogenea di massa M e lato $2\,L$ e da un'asta AB di lunghezza l e massa m. La lamina scorre con un lato sull'asse x ed è soggetta a una forza costante $\mathbf{F} = -F\,\widehat{\mathbf{i}}$ che agisce sul centro di massa P_0. L'estremo A dell'asta, che sta sull'asse x e coincide con l'origine del sistema di coordinate, è fisso e l'asta può ruotare attorno a esso. Infine, una molla collega l'estremo B dell'asta con il lato CD della lamina, rimanendo sempre perpendicolare a esso e agganciandolo nel punto K. Vogliamo determinare le configurazioni di equilibrio e studiare la stabilità del



sistema (che è rappresentato in figura). Infine, vogliamo calcolare le reazioni vincolari sul sistema.

Il sistema in esame ha due gradi di libertà, che noi descriviamo con le coordinate lagrangiane s e φ, dove s è l'ascissa del punto D cambiata di segno (quindi $s > 0$ quando la lamina si trova a sinistra dell'asse y) e φ l'angolo formato dall'asta AB con l'asse x. L'energia potenziale è data da tre contributi: la forza peso sull'asta, la forza elastica della molla e la forza costante sul centro di massa della lamina. Il centro di massa dell'asta P_1 è il punto medio dell'asta, pertanto

$$P_1 - O = \frac{l}{2}\,(\widehat{\mathbf{i}}\cos\varphi + \widehat{\mathbf{j}}\sin\varphi) \tag{1}$$

e

$$B - O = l\,(\widehat{\mathbf{i}}\cos\varphi + \widehat{\mathbf{j}}\sin\varphi). \tag{2}$$

La forza $\mathbf{F}$ è un campo costante, quindi è conservativa. La sua energia potenziale è $F\,x_0 = -F\,(s + L)$ ($\mathbf{F}$ è diretta lungo il verso negativo dell'asse x), dove x_0 è l'ascissa del centro di massa P_0. Abbiamo dunque, trascurando la costante $F\,L$ nell'energia potenziale:

$$\begin{aligned} V(s,\varphi) &= m\,g\,\frac{l}{2}\,\sin\varphi + \frac{1}{2}\,k\,(B-C)^2 - F\,s = \\ &= m\,g\,\frac{l}{2}\,\sin\varphi + \frac{1}{2}\,k\,(s+l\,\cos\varphi)^2 - F\,s \end{aligned} \tag{3}$$

I punti critici dell'energia potenziale, che corrispondono alle configurazioni di equilibrio, sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial s} &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned}$$

ovvero

$$\frac{\partial V}{\partial s} \equiv k\,(s+l\,\cos\varphi) - F = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} \equiv m\,g\,\frac{l}{2}\,\cos\varphi - k\,(s+l\,\cos\varphi)\,l\,\sin\varphi = 0 \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &k\,(s+l\,\cos\varphi) = F \\ &m\,g\,\frac{l}{2}\,\cos\varphi - F\,l\,\sin\varphi = 0 \end{aligned}$$

$$\tan\varphi = \frac{m\,g}{2\,F} \tag{6}$$

$$s = \frac{F}{k} - l\,\cos\varphi \tag{7}$$

Ci sono due soluzioni per φ,

$$\varphi_1 = \varphi_0 \tag{8}$$

$$\varphi_2 = \pi + \varphi_0 \tag{9}$$

dove φ_0 è la determinazione nel primo quadrante di

$$\varphi_0 = \arctan\left(\frac{m\,g}{2\,F}\right). \tag{10}$$

Le corrispondenti soluzioni per la variabile s sono

$$s_1 = \frac{F}{k} - l\,\cos\varphi_0 \tag{11}$$

$$s_2 = \frac{F}{k} + l\,\cos\varphi_0. \tag{12}$$

Abbiamo dunque complessivamente due configurazioni di equilibrio Q_1 e Q_2 date da

$$Q_1 = \left(\frac{F}{k} - l\,\cos\varphi_0,\, \varphi_0\right); \quad Q_2 = \left(\frac{F}{k} + l\,\cos\varphi_0,\, \pi + \varphi_0\right). \tag{13}$$

Per studiare la stabilità di Q_1 e Q_2 dobbiamo calcolare la matrice hessiana dell'energia potenziale. Abbiamo per le derivate seconde:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = k \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = -m\,g\,\frac{l}{2}\,\sin\varphi - k\,s\,l\,\cos\varphi - k\,l^2\,(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \tag{15}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s\,\partial\varphi} = -k\,l\,\sin\varphi \tag{16}$$

Sostituendo le configurazioni di equilibrio troviamo, dopo qualche passaggio, per le matrici hessiane $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$ nei due equilibri:

$$\mathbf{H}_{1,2} = \begin{pmatrix} k & -k\,l\,\sin\varphi_0 \\ -k\,l\,\sin\varphi_0 & k\,l^2\,\sin^2\varphi_0 - l\,F\,(1+\tan^2\varphi_0)\,\cos\varphi_0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

che danno $det(\mathbf{H}_{1,2}) = -k\,l\,F\,(1+\tan^2\varphi_0)\,\cos\varphi_0$, il cui segno dipende da $\cos\varphi_0$. La configurazione di equilibrio Q_2 è quindi incondizionatamente stabile mentre Q_1 è incondizionatamente instabile.

Le reazioni vincolari sul sistema sono: la reazione vincolare $\mathbf{\Phi}_O = \Phi_x\,\widehat{\mathbf{i}} + \Phi_y\,\widehat{\mathbf{j}}$ nell'origine e le reazioni $\mathbf{\Phi}_D = \Phi_D\,\widehat{\mathbf{j}}$ e $\mathbf{\Phi}_E = \Phi_E\,\widehat{\mathbf{j}}$ nei punti D ed E. La prima equazione cardinale sull'asta all'equilibrio ci da'

$$\mathbf{\Phi}_O - m\,g\,\widehat{\mathbf{j}} + k\,(K - B) = 0 \tag{18}$$

Scomposta lungo le due direzioni coordinate da':

$$\Phi_x - k\,(s + l\,\cos\varphi) = 0$$
$$\Phi_y - m\,g = 0$$

e quindi le componenti della reazione vincolare in O all'equilibrio sono

$$\Phi_x = k\,(s + l\,\cos\varphi) = F$$
$$\Phi_y = m\,g.$$

La prima equazione cardinale della statica applicata alla lamina quadrata,

$$\mathbf{\Phi}_E + \mathbf{\Phi}_D - M\,g\,\widehat{\mathbf{j}} + k\,(B - K) - F\,\widehat{\mathbf{i}} = 0, \tag{19}$$

scomposta lungo le direzioni coordinate, ci dà

$$k\,(s + l\,\cos\varphi) - F = 0 \tag{20}$$

$$\Phi_E + \Phi_D - M\,g = 0 \tag{21}$$

La prima equazione è una delle equazioni dell'equilibrio che abbiamo già trovato. La seconda equazione non è sufficiente a determinare separatamente Φ_E e Φ_D, quindi dobbiamo usare anche la seconda equazione cardinale. Scegliendo il centro di massa della lamina P_0 come polo abbiamo:

$$(E - P_0) \times \mathbf{\Phi}_E + (D - P_0) \times \mathbf{\Phi}_D + (K - P_0) \times [k\,(B - K)] = 0 \tag{22}$$

Proiettando lungo $\widehat{\mathbf{k}}$ si ha:

$$L\,(\Phi_D - \Phi_E) - k\,(s + l\,\cos\varphi)\,(l\,\sin\varphi - L) = 0 \tag{23}$$

$$L\,(\Phi_D - \Phi_E) - F\,(l\,\sin\varphi - L) = 0. \tag{24}$$

Le reazioni vincolari Φ_D e Φ_E sono quindi date dal sistema

$$\Phi_D + \Phi_E = M\,g \tag{25}$$

$$\Phi_D - \Phi_E = \frac{F}{L}\,(l\,\sin\varphi - L) \tag{26}$$

da cui otteniamo

$$\Phi_D = \frac{1}{2}\,\left(M\,g - F + F\,\frac{l}{L}\,\sin\varphi\right) \tag{27}$$

$$\Phi_E = \frac{1}{2}\,\left[M\,g + F - F\,\frac{l}{L}\,\sin\varphi\right]. \tag{28}$$

Ricordando la relazione trigonometrica

$$\sin\varphi = \pm\frac{\tan\varphi}{\sqrt{1 + \tan^2\varphi}}$$

otteniamo all'equilibrio:

$$\sin\varphi_0 = \frac{m\,g}{\sqrt{4\,F^2 + m^2\,g^2}}$$

$$\sin(\varphi_0 + \pi) = -\frac{m\,g}{\sqrt{4\,F^2 + m^2\,g^2}}$$

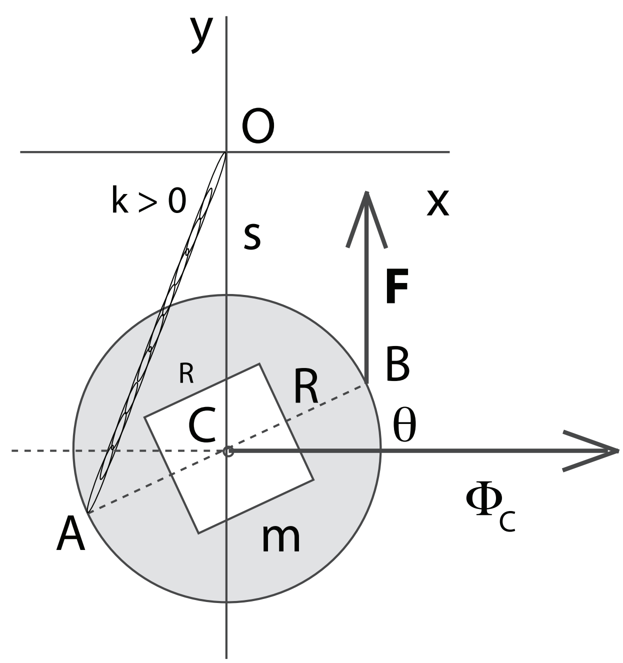
e usando i dati dell'equilibrio abbiamo in Q_1:

$$\Phi_D = \frac{1}{2}\,\left(M\,g - F + \frac{F}{L}\,\frac{m\,g\,l}{\sqrt{4\,F^2 + m^2\,g^2}}\right) \tag{29}$$

$$\Phi_E = \frac{1}{2}\,\left(M\,g + F - \frac{F}{L}\,\frac{m\,g\,l}{\sqrt{4\,F^2 + m^2\,g^2}}\right). \tag{30}$$

Esercizio 2.

Una lamina piana omogenea di massa m è costituita da un disco di centro C e raggio R nel quale è praticato un foro quadrato concentrico di lato R. La lamina si muove nel piano verticale $O(x, y)$ ed è libera di ruotare attorno al centro C, a sua volta libero di scorrere senza attrito sull'asse y. Sui punti diametrali A e B agiscono due forze: una molla di costante elastica $k > 0$, che collega A con l'origine O, e una forza costante applicata in B, parallela alla direzione dell'asse y nel verso positivo. Il sistema ha due gradi di libertà; si scelgano come coordinate lagrangiane i parametri s e θ indicati in figura, con $s > 0$ quando C sta sotto di O. Si chiede di:



- calcolare la matrice d'inerzia della lamina in un sistema di riferimento con l'origine in C e gli assi paralleli ai lati del quadrato;
- scrivere l'energia potenziale del sistema;
- calcolare le configurazioni di equilibrio;
- studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio trovate;
- scrivere l'energia cinetica del sistema;
- scrivere le equazioni di Lagrange nell'ipotesi che sul punto C agisca una forza viscosa di costante λ.

.

La matrice d'inerzia $\mathbf{I}$ della lamina è data dalla differenza delle matrici $\mathbf{I}_D$ del disco pieno e $\mathbf{I}_Q$ del foro quadrato:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_D - \mathbf{I}_Q, \tag{31}$$

con le matrici $\mathbf{I}_D$ e $\mathbf{I}_Q$ calcolate con la densità della lamina. Le masse del disco pieno m_D e del foro quadrato m_Q sono date dalla soluzione del sistema

$$m_D - m_Q = m \tag{32}$$

$$\frac{m_D}{m_Q} = \frac{\pi R^2}{R^2} = \pi \tag{33}$$

da cui ricaviamo

$$m_D = \frac{\pi}{\pi - 1}\, m \tag{34}$$

$$m_Q = \frac{1}{\pi - 1}\, m \tag{35}$$

Per le matrici d'inerzia del disco e del quadrato facciamo riferimento alle espressioni ricavate a lezione:

$$\mathbf{I}_D = \frac{1}{4}\, m_D\, R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{36}$$

per il disco e

$$\mathbf{I}_Q = \frac{1}{12}\, m_Q\, R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

per il quadrato (che ha lato R). In conclusione:

$$\mathbf{I} = \frac{1}{12}\, R^2\, (3\, m_D - m_Q) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{38}$$

L'energia potenziale del sistema contiene tre contributi: quello della forza peso, quello della molla e quello della forza costante applicata in B:

$$V = m\, g\, y_C + \frac{1}{2} k\, (A - O)^2 - F\, y_B = \tag{39}$$

$$= -m\, g\, s + \frac{1}{2} k\, \left(R^2 + s^2 + 2\, R\, s\, \sin\theta\right) - F(R\, \sin\theta - s) \tag{40}$$

I punti critici dell'energia potenziale, che corrispondono alle configurazioni di equilibrio, sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\frac{\partial V}{\partial s} = 0$$
$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

ovvero

$$\frac{\partial V}{\partial s} \equiv -m\,g + k\,(s + 2\,R\,\sin\theta) + F = 0 \tag{41}$$
$$\frac{\partial V}{\partial \theta} \equiv k\,R\,s\,\cos\theta - F\,R\,\cos\theta = 0. \tag{42}$$

Calcoliamo anche le derivate seconde dell'energia potenziale, in preparazione per lo studio della stabilità:

$$V_{ss} = \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = k \tag{43}$$
$$V_{s\theta} = \frac{\partial^2 V}{\partial s \partial \theta} = 2\,k\,R\,\cos\theta \tag{44}$$
$$V_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = -R\,(k\,s - F)\,\sin\theta. \tag{45}$$

Il sistema (41)-(42) si riduce a:

$$s + 2\,R\,\sin\theta = \frac{m\,g\,-F}{k} \tag{46}$$
$$(k\,s - F)\,\cos\theta = 0. \tag{47}$$

La seconda equazione è soddisfatta per

(i) $\cos\theta = 0$, che fornisce i due valori $\theta_1 = \pi/2$ e $\theta_1 = 3\,\pi/2$;

(ii) $s = F/k$, che fornisce $\sin\theta = (m\,g - 2\,F)/(2\,k\,R)$.

Il secondo insieme di soluzioni esiste solo quando

$$\left|\frac{m\,g - 2\,F}{2\,k\,R}\right| \leq 1$$

e in tal caso abbiamo $\theta_3 = \arcsin(m\,g - 2\,F)/(2\,k\,R)$ e $\theta_4 = \pi - \theta_3$. I due insiemi di soluzioni danno le seguenti configurazioni di equilibrio $Q(s, \theta)$:

$$Q_1 = \left(\frac{m\,g\; - F}{k} - 2\,R, \pi/2\right) \tag{48}$$

$$Q_2 = \left(\frac{m\,g\; - F}{k} + 2\,R, 3\,\pi/2\right) \tag{49}$$

$$Q_3 = \left(\frac{F}{k}, \theta_3\right) \tag{50}$$

$$Q_4 = \left(\frac{F}{k}, \pi - \theta_3\right) \tag{51}$$

Nelle configurazioni Q_1 e Q_2 abbiamo $V_{s\theta} = 0$, quindi la stabilità è determinata da $V_{\theta\theta}$:

$$Q_1: \qquad V_{\theta\theta} = R\,\left[2\,(F + R) - m\,g\right] \tag{52}$$

$$Q_2: \qquad V_{\theta\theta} = R\,\left[2\,(F - R) - m\,g\right]. \tag{53}$$

Q_1 è stabile se $2\,(F + R) \leq m\,g$ mentre Q_1 è stabile se $2\,(F - R) \leq m\,g$. In Q_3 e Q_4 abbiamo $V_{\theta\theta} = 0$, quindi il determinante della matrice hessiana è negativo e gli equilibri non sono stabili.

Calcoliamo ora le reazioni vincolari all'equilibrio. L'unica reazione vincolare presente è $\mathbf{\Phi}_C = \Phi_C\,\widehat{\mathbf{i}}$. Dalla prima equazione cardinale della statica lungo l'asse x abbiamo:

$$\Phi_C - k\,x_A = 0 \tag{54}$$

e quindi

$$\Phi_C = k\,x_A = -k\,R\,\cos\theta. \tag{55}$$

Nelle configurazioni Q_1 e Q_2 abbiamo $\Phi_C = 0$; in Q_3 e Q_4 abbiamo rispettivamente $\Phi_C = -k\,R\,\cos\theta_3$ e $\Phi_C = k\,R\,\cos\theta_3$.

L'energia cinetica del sistema va calcolata con il teorema di König. Dato che C è il centro di massa abbiamo:

$$T = \frac{1}{2}\,m\,v_C^2 + \frac{1}{2}\,I_{33}\,\omega^2 = \frac{1}{2}\,m\,\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\,I_{33}\,\dot{\theta}^2 \tag{56}$$

dove

$$I_{33} = \frac{1}{6}\,R^2\,(3\,m_D - m_Q)$$

è l'elemento della matrice d'inerzia dell'equazione (38). La lagrangiana del sistema è $\mathcal{L} = T - V$. Abbiamo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} = m\,\dot{s} \tag{57}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = I_{33}\,\dot{\theta} \tag{58}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = m\,g - k\,(s + 2\,R\,\sin\theta) - F \tag{59}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -k\,R\,s\,\cos\theta + F\,R\,\cos\theta. \tag{60}$$

La forza viscosa che agisce sul punto C è data da:

$$\mathbf{F}_\lambda = -\lambda\,\mathbf{v}_C = -\lambda\,(-\dot{s}\,\widehat{\mathbf{j}}) = \lambda\,\dot{s}\,\widehat{\mathbf{j}}. \tag{61}$$

Le forze generalizzate relative alla forza viscosa sono date da:

$$Q_s = \mathbf{F}_\lambda \cdot \frac{\partial C}{\partial s} = \lambda\,\dot{s}\,\widehat{\mathbf{j}} \cdot (-\widehat{\mathbf{j}}) = -\lambda\,\dot{s} \tag{62}$$

$$Q_\theta = \mathbf{F}_\lambda \cdot \frac{\partial C}{\partial \theta} = 0 \tag{63}$$

e le equazioni di Lagrange sono:

$$m\,\ddot{s} - m\,g + k\,(s + 2\,R\,\sin\theta) + F = -\lambda\,\dot{s} \tag{64}$$

$$I_{33}\,\ddot{\theta} = -k\,R\,s\,\cos\theta + F\,R\,\cos\theta \tag{65}$$