Esercizio.

Consideriamo il sistema mostrato in figura 1, costituito da due aste AC e BC, di ugual massa b ed ugual lunghezza L, vincolate con cerniera nell'estremo comune C ed i cui estremi A e B sono vincolati a scorrere senza attrito su una guida orizzontale. Vogliamo scrivere le equazioni del moto e determinare le reazioni vincolari utilizzando le equazioni cardinali della dinamica.

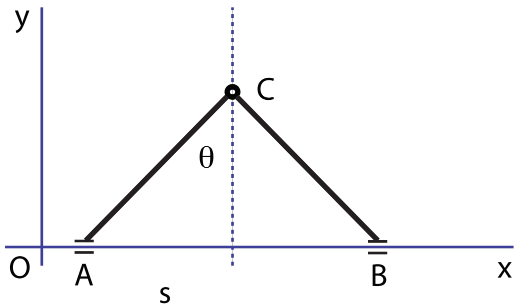

Figura 1: Il corpo rigido ed il sistema solidale

Equazioni del moto.

Il sistema ha due gradi di libertà; scegliamo come variabili lagrangiane l'ascissa di C e l'amgolo φ che l'asta AC forma con la verticale (vedi figura 1). **Attenzione**: il sistema non è rigido, ma è composto da due parti rigide, che vanno studiate separatamente. Nell'applicare le equazioni cardinali a ciascuna asta, dobbiamo rappresentare l'azione dell'altra asta mediante una forza vincolare interna di mutua interazione, applicata all'estremo comune C. Chiamiamo tale forza di reazione $\mathbf{\Phi}_C$ quando applicata all'asta AC e $-\mathbf{\Phi}_C$ quando applicata all'asta BC. Le due forze obbediscono al principio di azione e reazione di Newton sono pertanto opposte. Dalla simmetria del problema, avendo le aste ugual massa ed ugual lunghezza, ci aspettiamo una forza di reazione interna parallela all'asse x; questo però lo vogliamo ricavare dalle equazioni e dalla loro soluzione, quindi diamo a $\mathbf{\Phi}_C$ una direzione generica, quindi $\mathbf{\Phi}_C = \Phi_x \,\widehat{\mathbf{i}} + \Phi_y \,\widehat{\mathbf{j}}$. Su ciascuna asta agisce inoltre la forza peso $-m\,g\,\widehat{\mathbf{j}}$, applicata ai centri di massa P_A e P_B delle due aste, e le forze di reazione agli estremi, $\mathbf{\Phi}_A = \Phi_A \,\widehat{\mathbf{j}}$ e $\mathbf{\Phi}_B = \Phi_B \,\widehat{\mathbf{j}}$. Il diagramma delle forze è illustrato in figura 2. Per scrivere le equazioni cardinali, scegliamo i due centri di massa P_A e P_B quali punti rispetto ai quali calcolare i momenti. Abbiamo dunque le equazioni cardinali della dinamica per l'asta AC,

$$m\,\mathbf{a}_A = \mathbf{R}^{(A)} \tag{1}$$

$$\dot{\mathbf{K}}^{(A)}(P_A) = \mathbf{M}^{(A)}(P_A) \tag{2}$$

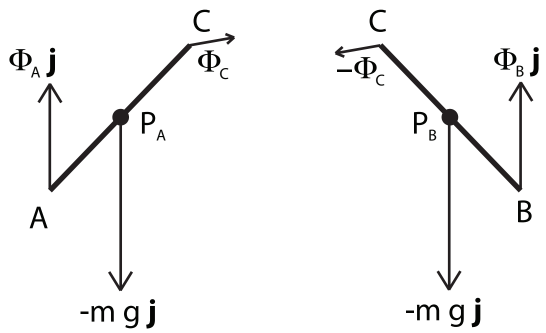

Figura 2: Il diagramma delle forze

e per l'asta BC

$$m\,\mathbf{a}_B = \mathbf{R}^{(B)} \tag{3}$$

$$\dot{\mathbf{K}}^{(B)}(P_B) = \mathbf{M}^{(B)}(P_B), \tag{4}$$

dove $\mathbf{a}_A$ ed $\mathbf{a}_B$ sono le accelerazioni dei centri di massa P_A e P_B, $\mathbf{R}^{(A)}$ ed $\mathbf{R}^{(B)}$ sono le risultanti delle forze agenti rispettivamente sull'asta AC e sull'asta BC, $\mathbf{M}^{(A)}(P_A)$ e $\mathbf{M}^{(B)}(P_B)$ sono i momenti risultanti sulle due aste e $\mathbf{K}^{(A)}(P_A)$ e $\mathbf{K}^{(B)}(P_B)$ i due momenti angolari. Dobbiamo innanzitutto trovare posizione, velocità ed accelerazione dei centri di massa P_A e P_B. Abbiamo:

$$P_A - O = \left(s - \frac{L}{2}\sin\theta\right)\widehat{\mathbf{i}} + \frac{L}{2}\cos\theta\,\widehat{\mathbf{j}} \tag{5}$$

$$P_B - O = \left(s + \frac{L}{2}\sin\theta\right)\widehat{\mathbf{i}} + \frac{L}{2}\cos\theta\,\widehat{\mathbf{j}} \tag{6}$$

$$\mathbf{v}_A = \left(\dot{s} - \frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right)\widehat{\mathbf{i}} - \frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta\,\widehat{\mathbf{j}} \tag{7}$$

$$\mathbf{v}_B = \left(\dot{s} + \frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right)\widehat{\mathbf{i}} - \frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta\,\widehat{\mathbf{j}} \tag{8}$$

$$\mathbf{a}_A = \left[\ddot{s} - \frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right)\right]\widehat{\mathbf{i}} - \frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right)\widehat{\mathbf{j}} \tag{9}$$

$$\mathbf{a}_B = \left[\ddot{s} + \frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right)\right]\widehat{\mathbf{i}} - \frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right)\widehat{\mathbf{j}} \tag{10}$$

I momenti angolari rispetto ai centri di massa, tenendo conto che quando θ aumenta (e quindi $\dot{\theta} > 0$) l'asta AC ruota in senso orario e l'asta BC in senso antiorario, sono dati da

$$\mathbf{K}^{(A)}(P_A) = -I(P_A)\,\dot{\theta}\,\widehat{\mathbf{k}} = -\frac{1}{12}\,m\,L^2\,\dot{\theta}\,\widehat{\mathbf{k}} \tag{11}$$

$$\mathbf{K}^{(B)}(P_B) = I(P_B)\,\dot{\theta}\,\widehat{\mathbf{k}} = \frac{1}{12}\,m\,L^2\,\dot{\theta}\,\widehat{\mathbf{k}} \tag{12}$$

Le risultanti delle forze esterne sono

$$\mathbf{R}^{(A)} = \Phi_A \,\widehat{\mathbf{j}} - m\,g\,\widehat{\mathbf{j}} + \mathbf{\Phi}_C \tag{13}$$
$$\mathbf{R}^{(B)} = \Phi_B \,\widehat{\mathbf{j}} - m\,g\,\widehat{\mathbf{j}} - \mathbf{\Phi}_C \tag{14}$$

mentre per i momenti risultanto abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(A)}(P_A) &= (A - P_A) \times (\Phi_A \,\widehat{\mathbf{j}}) + (C - P_A) \times \mathbf{\Phi}_C \\ &= -\frac{L}{2}\,\Phi_A\,\sin\theta\,\widehat{\mathbf{k}} + \frac{L}{2}\,(\Phi_y\,\sin\theta - \Phi_x\,\cos\theta)\,\widehat{\mathbf{k}} \end{aligned} \tag{15}$$
$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(B)}(P_B) &= (B - P_B) \times (\Phi_B \,\widehat{\mathbf{j}}) + (C - P_B) \times (-\mathbf{\Phi}_C) \\ &= \frac{L}{2}\,\Phi_B\,\sin\theta\,\widehat{\mathbf{k}} + \frac{L}{2}\,(\Phi_x\,\cos\theta + \Phi_y\,\sin\theta)\,\widehat{\mathbf{k}} \end{aligned} \tag{16}$$

Sostituiamo ora le (9), (10), (11), (12), (13), (14), (15) ed (16) nelle equazioni cardinali (1)-(4), scomponiamo lungo le direzioni degli assi $\widehat{\mathbf{i}}$ e $\widehat{\mathbf{j}}$ ed otteniamo così:

$$m\left[\ddot{s} - \frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\,\cos\theta - \dot{\theta}^2\,\sin\theta\right)\right] = \Phi_x \tag{17}$$
$$-m\,\frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\,\sin\theta + \dot{\theta}^2\,\cos\theta\right) = \Phi_y + \Phi_A - m\,g \tag{18}$$
$$m\left[\ddot{s} + \frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\,\cos\theta - \dot{\theta}^2\,\sin\theta\right)\right] = -\Phi_x \tag{19}$$
$$-m\,\frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\,\sin\theta + \dot{\theta}^2\,\cos\theta\right) = -\Phi_y + \Phi_B - m\,g \tag{20}$$
$$-\frac{1}{12}\,m\,L^2\,\ddot{\theta} = \frac{L}{2}\,\left[(\Phi_y - \Phi_A)\,\sin\theta - \Phi_x\,\cos\theta\right] \tag{21}$$
$$\frac{1}{12}\,m\,L^2\,\ddot{\theta} = \frac{L}{2}\,\left[(\Phi_y + \Phi_B)\,\sin\theta + \Phi_x\,\cos\theta\right] \tag{22}$$

Sommando e sottraendo (17) con (19), (18) con (20) e (21) con (22) abbiamo:

$$\ddot{s} = 0 \tag{23}$$
$$m\,L\left(\ddot{\theta}\,\cos\theta - \dot{\theta}^2\,\sin\theta\right) = -2\,\Phi_x \tag{24}$$
$$-m\,L\left(\ddot{\theta}\,\sin\theta + \dot{\theta}^2\,\cos\theta\right) = \Phi_A + \Phi_B - 2\,m\,g \tag{25}$$
$$2\,\Phi_y + \Phi_A - \Phi_B = 0 \tag{26}$$
$$2\,\Phi_y + \Phi_B - \Phi_A = 0 \tag{27}$$
$$\frac{1}{6}\,m\,L^2\,\ddot{\theta} = \frac{L}{2}\,\left[(\Phi_B + \Phi_A)\,\sin\theta + 2\,\Phi_x\,\cos\theta\right] \tag{28}$$

La (23) può essere risolta per la coordinata s, con $s(t) = s(0) + \dot{s}(0)\,t$, dove $s(0)$ e $\dot{s}(0)$ sono dati dalle condizioni iniziali. Dalle (26) e (27) ricaviamo che

$\Phi_y = 0$ e $\Phi_B = \Phi_A$. Le rimanenti equazioni diventano

$$m\,L\left(\ddot\theta\,\cos\theta - \dot\theta^2\,\sin\theta\right) = -2\,\Phi_x \tag{29}$$

$$-m\,L\left(\ddot\theta\,\sin\theta + \dot\theta^2\,\cos\theta\right) = 2\,\Phi_A - 2\,m\,g \tag{30}$$

$$\frac{1}{6}\,m\,L\,\ddot\theta = \Phi_A\,\sin\theta + \Phi_x\,\cos\theta \tag{31}$$

Moltiplicando la (29) per $\cos\theta$ e la (30) per $\sin\theta$ e sottraendole otteniamo

$$\Phi_A\,\sin\theta + \Phi_x\,\cos\theta = -m\,\frac{L}{2}\,\ddot\theta + m\,g\,\sin\theta;$$

sostituendo nella (31) abbiamo finalmente l'equazione del moto:

$$\ddot\theta - \frac{3}{2}\,\frac{g}{L}\,\sin\theta = 0 \tag{32}$$

Una volta ottenuta la soluzione dell'equazione del moto a partire dalle condizioni iniziali, sono note le funzioni $\theta(t)$, $\dot\theta(t)$ e $\ddot\theta(t)$ che, sostituite nelle (29) e (30) danno i valori delle reazioni vincolari.

Reazioni vincolari.

Abbiamo dalle (29) e (30):

$$\Phi_x = \frac{m\,L}{2}\left(\dot\theta^2\,\sin\theta - \ddot\theta\,\cos\theta\right) \tag{33}$$

$$\Phi_A = m\,g - \frac{m\,L}{2}\left(\ddot\theta\,\sin\theta + \dot\theta^2\,\cos\theta\right) \tag{34}$$

Inoltre, già sappiamo che $\Phi_B = \Phi_A$ e che $\Phi_y = 0$, quindi il calcolo delle reazioni vincolari interne ed esterne in funzione della soluzione $\theta(t)$ e delle sue derivate temporali è completo. È peraltro utile conoscere le reazioni vincolari in funzione delle coordinate lagrangiane scelte, in questo caso il solo angolo θ. Per ottenere questo risultato dobbiamo sfruttare gli integrali primi del moto. In questo caso è sufficiente la sola conservazione dell'energia, che però necessita delle condizioni iniziali. Siano dunque

$$\theta(0) = \theta_0 \tag{35}$$

$$\dot\theta(0) = \omega_0 \tag{36}$$

le condizioni iniziali. Moltiplichiamo ora l'equazione del moto (32) per $\dot\theta$:

$$\begin{aligned}
&\dot\theta\,\ddot\theta - \frac{3}{2}\,\frac{g}{L}\,\dot\theta\,\sin\theta = 0\\
&\frac{d}{dt}\left[\frac{\dot\theta^2}{2}\right] + \frac{3}{2}\,\frac{g}{L}\,\frac{d}{dt}[\cos\theta] = 0\\
&\frac{d}{dt}\left[\frac{\dot\theta^2}{2} + \frac{3}{2}\,\frac{g}{L}\,\cos\theta\right] = 0\\
&\frac{\dot\theta^2}{2} + \frac{3}{2}\,\frac{g}{L}\,\cos\theta = \text{costante} = \frac{\omega_0^2}{2} + \frac{3}{2}\,\frac{g}{L}\,\cos\theta_0 \quad \text{da cui}\\
&\dot\theta^2 = \omega_0^2 + \frac{3\,g}{L}\,(\cos\theta_0 - \cos\theta)
\end{aligned}$$

Dall'equazione del moto sappiamo inoltre che

$$\ddot\theta = \frac{3}{2}\,\frac{g}{L}\,\sin\theta$$

e, sostituendo nelle (33) e (34), otteniamo le reazioni vincolari in funzione dell'angolo:

$$\begin{aligned}
\Phi_A = m\,g - \frac{m\,L}{2}\,&\left\{\frac{3}{2}\,\frac{g}{L}\,\sin\theta\,\sin\theta + \left[\omega_0^2\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{3\,g}{L}\,(\cos\theta_0 - \cos\theta)\right]\,\cos\theta\right\} \qquad (37)\\
\Phi_x = \frac{m\,L}{2}\,&\left\{\left[\omega_0^2 + \frac{3\,g}{L}\,(\cos\theta_0 - \cos\theta)\right]\,\sin\theta\right.\\
&\left.-\frac{3}{2}\,\frac{g}{L}\,\sin\theta\,\cos\theta\right\}\\
= \frac{m\,L}{2}\,&\left(\omega_0^2 + \frac{3\,g}{L}\,\cos\theta_0\,\sin\theta\right) - \frac{9}{2}\,m\,g\,\cos\theta\,\sin\theta. \qquad (38)
\end{aligned}$$

Inoltre, come già sappiamo, $\Phi_B = \Phi_A$ e $\Phi_y = 0$.