

# 1 Integrali impropri di funzioni continue

## 1.1 Integrali impropri su intervalli semiaperti

**Definizione 1** Data una funzione continua  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $b \leq +\infty$ , si dice che  $f$  è *integrabile* se esiste finito il

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

ed in tal caso il valore del limite si chiama *integrale di f* e si denota con

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Denotando con  $F(t) := \int_a^t f(x) dx$  la funzione integrale di  $f$ , allora  $f$  è integrabile se la funzione integrale  $F(t)$  ammette limite finito per  $t \rightarrow b^-$ .

Se  $f$  è integrabile si dice anche che l'integrale è *convergente*, mentre se il limite esiste ed è infinito, si dice che l'integrale è *divergente*.

Osserviamo che se  $f$  ha segno costante in  $[a, b)$  allora la funzione integrale è monotona, crescente se  $f(x) \geq 0$ , decrescente se  $f(x) \leq 0$ , quindi il limite esiste, finito o infinito.

Studiamo ora l'integrabilità di alcune semplici funzioni.

**Esempio 1** Sia  $f(x) = \cos x$  in  $[0, +\infty)$ . Allora  $\int_1^t \cos x dx = [\sin x]_0^t = \sin t$  e  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sin t$  non esiste, quindi  $f$  non è integrabile.

**Esempio 2** Sia  $f(x) = \frac{1}{x}$  in  $[1, +\infty)$ . Allora  $\int_1^t \frac{1}{x} dx = [\log x]_1^t = \log t$  ed essendo  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \log t = +\infty$ ,  $f$  non è integrabile.

**Esempio 3** Sia  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  in  $[1, +\infty)$ . Allora  $\int_1^t \frac{1}{x^2} dx = [-1/x]_1^t = 1 - \frac{1}{t}$  e  $\lim_{t \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{t} = 1$ , quindi  $f$  è integrabile e  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$ .

**Esempio 4** Sia  $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$ ,  $x \in [0, 1)$ . Allora  $\int_0^t f(x) dx = [-\sqrt{1-x}]_0^t = 1 - \sqrt{1-t}$  e  $\lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t f(x) dx = 1$ , quindi l'integrale converge e vale 1.

Dagli ultimi due esempi ora considerati segue che *l'area di una regione di piano illimitata non è necessariamente infinita*.

Come mostrato negli esempi, la verifica dell'integrabilità si può fare contestualmente al calcolo dell'integrale, applicando la definizione. Ma l'integrabilità o meno

di una funzione si può studiare anche *a priori*, senza calcolare l'integrale, utilizzando degli opportuni criteri che verranno stabiliti nel seguito.

Intanto osserviamo che la convergenza o la divergenza dell'integrale dipendono solo dal comportamento della funzione per  $x \rightarrow b^-$ , ovvero: *date due funzioni  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , se  $\exists M < b : f(x) = g(x) \forall x \in [M, b]$ , allora  $\int_a^b f(x) dx$  e  $\int_a^b g(x) dx$  hanno lo stesso comportamento (non lo stesso valore), cioè sono entrambi convergenti o entrambi divergenti.* Infatti,

$$\begin{aligned} \int_a^t f(x) dx &= \int_a^M f(x) dx + \int_M^t f(x) dx = \int_a^M f(x) dx + \int_M^t g(x) dx = \\ &= \int_a^M [f(x) - g(x)] dx + \int_a^t g(x) dx, \end{aligned}$$

quindi, poiché  $\int_a^M [f(x) - g(x)] dx$  è una costante,  $\int_a^b f(x) dx$  converge se e solo se  $\int_a^b g(x) dx$  converge.

Nel caso in cui l'integrale  $\int_a^b f(x) dx$  converge, questa osservazione giustifica la dicitura "f è integrabile intorno a b" o la notazione  $\int_a^b f(x) dx < +\infty$ , a prescindere dal primo estremo di integrazione.

Al fine di studiare l'integrabilità a priori di una funzione, enunciamo i due seguenti criteri di confronto, che permetteranno di ricondurre lo studio dell'integrabilità di  $f$  a quella di funzioni note.

**Proposizione 1** *Siano  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni continue, tali che*

$$|f(x)| \leq g(x) \quad \text{per ogni } x \in [M, b) \tag{1}$$

*per qualche  $M \in [a, b)$ . Allora se g è integrabile lo è anche f e si ha*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b g(x) dx.$$

*Invece, se*

$$f(x) \geq g(x) \geq 0 \quad \text{per ogni } x \in [M, b) \tag{2}$$

*per qualche  $M \in [a, b)$ , e se  $\int_a^b g(x) dx = +\infty$ , allora anche  $\int_a^b f(x) dx = +\infty$ .*

*Dimostrazione.* Se vale (1), allora per ogni  $x \in [M, b)$  si ha  $0 \leq g(x) - f(x) \leq 2g(x)$ , quindi

$$\int_M^t (g(x) - f(x)) dx \leq 2 \int_M^t g(x) dx$$

e passando al limite per  $t \rightarrow b^-$  si ha

$$\int_M^b (g(x) - f(x)) dx \leq 2 \int_M^b g(x) dx < +\infty$$

(entrambi i limiti esistono perché le funzioni integrande sono non negative). Di conseguenza,

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx &= \lim_{t \rightarrow b^-} \left( \int_a^t g(x) dx - \int_a^t (g(x) - f(x)) dx \right) = \\ &= \int_a^b g(x) dx - \int_a^b (g(x) - f(x)) dx\end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il fatto che entrambi i limiti esistono finiti. Quindi,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b (g(x) - f(x)) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Ripetendo il ragionamento per  $-f(x)$  (che soddisfa l'ipotesi (1)), si ottiene l'altra diseguaglianza  $-\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ , pertanto

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Invece, se vale (2), si ha

$$\int_M^t f(x) dx \geq \int_M^t g(x) dx, \quad \forall t \in [M, b],$$

quindi se l'integrale  $\int_a^b g(x) dx$  diverge, anche l'integrale  $\int_a^b f(x) dx$  diverge.  $\square$

Come immediata conseguenza del precedente risultato si ha che se  $|f|$  è integrabile, allora anche  $f$  lo è e si ha

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Il viceversa in generale non sussiste, come mostra il seguente esempio.

**Esempio 5** Sia  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x) = \frac{1}{x} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

Per ogni  $t > 1$  si ha

$$\int_1^t \frac{1}{x} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \left[ -\frac{2}{\pi x} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right]_1^t - \frac{2}{\pi} \int_1^t \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = -\frac{2}{\pi t} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{2}{\pi} \int_1^t \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx. \quad (3)$$

Osserviamo che esiste finito il limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{2}{\pi t} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) = 0.$$

Inoltre, dato che

$$\left| \frac{1}{x^2} \cos \frac{\pi}{2} x \right| \leq \frac{1}{x^2} \quad \forall x \geq 1$$

e che la funzione  $g(x) = \frac{1}{x^2}$  è integrabile in  $[1, +\infty)$  come mostrato nell'Esempio 3, dalla Proposizione 1 deduciamo che anche la funzione  $h(x) = \frac{1}{x^2} \cos \frac{\pi}{2} x$  è integrabile in  $[1, +\infty)$ . Quindi nella (3) esiste finito anche il limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} \cos \left( \frac{\pi}{2} x \right) dx$$

e la  $f(x)$  risulta integrabile.

Dimostriamo ora che  $|f(x)|$  non è integrabile utilizzando ancora la Proposizione 1, seconda parte. Definiamo la funzione  $g : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ponendo

$$g(x) = \frac{|x - 2n|}{x} \quad \text{per } 2n - 1 \leq x < 2n + 1; \quad n = 1, 2, \dots$$

cioè  $g(x)$  è la funzione lineare a tratti che vale 0 nei punti  $x = 2n$  e vale  $\frac{1}{2n-1}$  nei punti  $x = 2n - 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Quindi,  $g(x) = f(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{N}$ .

Per la concavità della funzione  $\sin(\frac{\pi}{2}x)$  in  $[0, 2]$  e osservando che  $|\sin(\frac{\pi}{2}x)|$  è periodica di periodo 2, deduciamo che  $f(x) \geq g(x) \geq 0$  per ogni  $x \geq 1$ .

Infine, poiché  $g(x) \geq 0$  per ogni  $x \geq 1$ , il limite  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t g(x) dx$  esiste, finito o infinito, e quindi può essere calcolato su una generica successione divergente  $(t_n)_n$ . Scegliendo  $t_n = 2n + 1$ , si ha

$$\int_1^{+\infty} g(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{2n+1} g(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} = +\infty.$$

Di conseguenza, per la Proposizione 1,  $|f(x)|$  non è integrabile. □

Il prossimo criterio è basato su un confronto asintotico per  $x \rightarrow b^-$ .

**Proposizione 2** *Siano  $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni continue positive, tali che esiste il*  
 $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} =: \ell \in [0, +\infty]$ . Allora,

- se  $\ell \in (0, +\infty)$ , gli integrali  $\int_a^b f(x) dx$  e  $\int_a^b g(x) dx$  hanno lo stesso comportamento (cioè sono entrambi convergenti o entrambi divergenti)
- se  $\ell = 0$ , allora

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx = +\infty &\Rightarrow \int_a^b g(x) dx = +\infty \\ e \\ \int_a^b g(x) dx < +\infty &\Rightarrow \int_a^b f(x) dx < +\infty \end{aligned}$$

- se  $\ell = +\infty$ , allora

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x) \, dx = +\infty &\Rightarrow \int_a^b f(x) \, dx = +\infty \\ \text{e} \quad \int_a^b f(x) \, dx < +\infty &\Rightarrow \int_a^b g(x) \, dx < +\infty. \end{aligned}$$

*Dimostrazione.* Nel caso in cui  $\ell \in (0, +\infty)$ , scegliendo  $\epsilon \in (0, \ell)$ , dalla definizione di limite segue che esiste un valore reale  $M < b^-$  tale che

$$0 < (\ell - \epsilon)g(x) \leq f(x) \leq (\ell + \epsilon)g(x) \quad \forall x \in [M, b].$$

Pertanto

$$0 < (\ell - \epsilon) \int_M^t g(x) \, dx \leq \int_M^t f(x) \, dx \leq (\ell + \epsilon) \int_M^t g(x) \, dx, \quad \forall t \in (M, b).$$

Dato che le funzioni integrali nella formula precedente ammettono limite (finito o infinito) per  $t \rightarrow b^-$ , deduciamo che  $\int_a^b g(x) \, dx$  è finito se e solo se  $\int_a^b f(x) \, dx$  lo è.

Invece nel caso in cui  $\ell = 0$ , possiamo utilizzare solo l'ultima delle diseguaglianze della precedente formula, cioè scelto  $\epsilon > 0$  si ha  $f(x) \leq (\ell + \epsilon)g(x)$  in un intorno sinistro di  $b$ , da cui l'asserto.

Infine, se  $\ell = +\infty$ , allora  $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$  e possiamo applicare l'asserto del punto precedente invertendo  $f$  con  $g$ .  $\square$

Come sopra accennato, il precedente criterio verrà utilizzato per studiare l'integrabilità di una funzione a priori, riconducendola a quella di funzioni campione, che saranno:

$$g(x) := \frac{1}{(b-x)^\alpha} \quad \text{se } b < +\infty, \quad g(x) := \frac{1}{x^\alpha} \quad \text{se } b = +\infty$$

con  $\alpha$  parametro reale positivo.

Lo studio dell'integrabilità per tali funzioni è molto semplice e si fa direttamente con la definizione.

Iniziamo col caso di intervalli limitati, cioè  $b < +\infty$ . In tal caso, per  $\alpha \neq 1$  si ha

$$\int_a^t \frac{1}{(b-x)^\alpha} \, dx = \frac{-1}{1-\alpha} [(b-x)^{1-\alpha}]_a^t = \frac{-1}{1-\alpha} ((b-t)^{1-\alpha} - (b-a)^{1-\alpha})$$

e di conseguenza

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t \frac{1}{(b-x)^\alpha} \, dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

Invece, per  $\alpha = 1$   $\lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t \frac{1}{b-x} dx = \lim_{t \rightarrow b^-} (\log(b-a) - \log(b-t)) = +\infty$ , quindi l'integrale è divergente.

Utilizzando tale funzione come funzione "campione"  $g(x)$ , la Proposizione 2 si enuncia:

**Proposizione 3** *Sia  $f$  una funzione continua e positiva su  $[a, b]$ . Allora:*

- i) se esiste  $\alpha > 0$  tale che  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)(b-x)^\alpha = \ell \in (0, +\infty)$ , allora se  $\alpha \geq 1$  l'integrale  $\int_a^b f(x)dx$  diverge, mentre se  $\alpha < 1$  l'integrale converge;
- ii) se esiste  $\alpha < 1$  tale che  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)(b-x)^\alpha = 0$ , allora l'integrale converge;
- iii) se  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)(b-x) = +\infty$ , allora l'integrale diverge.

Osserviamo innanzitutto che se  $f(x)$  è limitata in un intorno sinistro di  $b$ , allora  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)(b-x)^\alpha = 0$  per ogni  $0 < \alpha < 1$ , quindi l'integrale converge come conseguenza della (ii).

Invece, nel caso in cui  $f(x) \rightarrow \pm\infty$  per  $x \rightarrow b^-$ , l'ordine di infinito deve essere minore di 1, perché se è maggiore o uguale ad 1, l'integrale certamente diverge. Osserviamo comunque che se una funzione è un infinito di ordine minore di 1, non è detto che sia integrabile. Il precedente risultato afferma infatti che se una funzione è un infinito di ordine *minore o uguale ad  $\alpha$  per qualche  $\alpha < 1$* , allora l'integrale converge. A tale proposito, consideriamo ad esempio la funzione

$$f(x) := \frac{1}{|x \log|x||} = \frac{1}{x \log(-x)}, \quad x \in [-\frac{1}{2}, 0).$$

Calcolando direttamente l'integrale si ha

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{-\frac{1}{2}}^t f(x) dx = \lim_{t \rightarrow 0^-} [-\log|\log|x||]_{-\frac{1}{2}}^t = +\infty$$

quindi l'integrale diverge. Osserviamo che  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$  e che  $\lim_{x \rightarrow 0^-} xf(x) = 0$ , quindi la funzione è un infinito di ordine minore di 1, ma è di ordine maggiore di  $\alpha$ , per ogni  $\alpha < 1$ .

Consideriamo ora il caso di intervalli illimitati, cioè il caso  $b = +\infty$ . Le funzioni "campione" sono  $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ . È facile verificare mediante il calcolo diretto dell'integrale, che

$$\int^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ converge se e solo se } \alpha > 1,$$

cioè se l'ordine di infinitesimo è maggiore di 1. In questo caso la Proposizione 2 si enuncia:

**Proposizione 4** Sia  $f$  una funzione continua e positiva su  $[a, +\infty)$ . Allora:

- i) se esiste  $\alpha > 0$  tale che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)x^\alpha = \ell \in (0, +\infty)$ , allora se  $\alpha \leq 1$  l'integrale  $\int_a^b f(x)dx$  diverge, mentre se  $\alpha > 1$  l'integrale converge;
- ii) se esiste  $\alpha > 1$  tale che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)x^\alpha = 0$ , allora l'integrale converge;
- iii) se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = +\infty$ , allora l'integrale diverge.

Pertanto, se  $f$  è un infinitesimo di ordine maggiore o uguale ad  $\alpha$ , per qualche  $\alpha > 1$ , l'integrale converge; mentre se è un infinitesimo di ordine minore o uguale ad 1 allora l'integrale diverge.

**Esempio 6** La funzione  $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$  è integrabile in  $[1, +\infty)$ , infatti  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} f(x) = 0$  e l'integrabilità segue come applicazione del punto ii) della proposizione precedente.

A proposito dell'esistenza o meno del limite di  $f$  per  $x \rightarrow +\infty$ , vale il seguente risultato, immediata conseguenza della proposizione precedente, che fornisce una *condizione necessaria* per l'integrabilità.

**Proposizione 5** Se  $f$  è integrabile intorno a  $+\infty$  e se esiste il  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lambda \in \tilde{\mathbb{R}}$ , allora necessariamente  $\lambda = 0$ .

*Dim.* Supponiamo per assurdo  $\lambda > 0$ . Allora, per la permanenza del segno la funzione  $f$  è positiva in una semiretta destra e inoltre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = +\infty$$

e quindi l'integrale diverge come conseguenza della (iii) della Proposizione 4. Invece, se  $\lambda < 0$ , basta considerare la funzione  $-f(x)$ .  $\square$

Osserviamo che la condizione  $\lambda = 0$  è necessaria per la convergenza dell'integrale nel caso in cui  $\lambda$  esiste (finito o infinito). Se invece  $\lambda$  non esiste, nulla si può dire nulla a priori sulla convergenza o divergenza dell'integrale.

La Proposizione 5 si può usare come criterio di divergenza dell'integrale, perché se  $\ell$  esiste ed è diverso da 0, allora sicuramente l'integrale diverge. Invece se  $\ell$  esiste ed è 0, allora l'integrabilità della funzione dipende dall'ordine di infinitesimo per  $x \rightarrow +\infty$ , come abbiamo visto precedentemente.

A questo punto è facile notare la grande analogia tra i criteri di convergenza e divergenza delle serie e degli integrali impropri sulle semirette, ma il legame è ancora più rilevante, come emerge dal seguente criterio di confronto tra integrali e serie.

**Proposizione 6** Sia  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua, decrescente e positiva.

Allora l'integrale  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  e la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$  hanno lo stesso comportamento.

Inoltre, in caso di convergenza, si ha

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \leq f(0) + \int_0^{+\infty} f(x) dx. \quad (4)$$

*Dim.* Osserviamo che

$$\sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(x) dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k).$$

Quindi, ricordando che la somma parziale  $n$ -esima della serie è  $S_n = \sum_{k=0}^n f(k)$ , si ha

$$S_n - f(0) \leq \int_0^n f(x) dx \leq S_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Poiché  $f(x) > 0$ , entrambe le successioni  $(S_n)_n$  e  $(\int_0^n f(x) dx)_n$  sono monotone crescenti, quindi regolari, e il limite coincide con l'estremo superiore.

Dalla prima diseguaglianza deduciamo che se l'integrale converge anche la serie converge, dalla seconda diseguaglianza deduciamo che se la serie converge anche l'integrale converge; quindi hanno lo stesso comportamento.

Inoltre, in caso di convergenza, passando al limite nella (5), si ottiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) - f(0) \leq \int_0^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=0}^{\infty} f(n),$$

cioè la (4).  $\square$

Naturalmente, il criterio appena dimostrato si può anche applicare a serie in cui l'indice inizia da 1 anziché da 0,  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ , confrontandole con l'integrale  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  e sostituendo  $f(0)$  con  $f(1)$  nella stima (4).

Come applicazione, consideriamo la serie armonica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ . Il confronto con l'integrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$ , riconduce al fatto che la serie converge se e solo se  $\alpha > 1$ , ma ora possiamo anche ottenere una stima della somma nel caso  $\alpha > 1$ . Infatti, poiché l'integrale vale  $\frac{1}{\alpha-1}$  e  $f(1) = 1$ , dalla (4) si ottiene che

$$\frac{1}{\alpha-1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

Per esempio, nel caso  $\alpha = 2$ , si ha  $1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$ .

Tutti i criteri di convergenza appena visti valgono per funzioni positive. Nel caso di funzioni di segno qualunque, si può studiare l'integrabilità del modulo della funzione (integrabilità assoluta), che implica l'integrabilità. Data l'importanza dell'integrabilità assoluta di una funzione, diamo la seguente definizione.

**Definizione 2** Una funzione  $f$  si dice sommabile in  $[a, b)$  se la funzione  $|f(x)|$  è integrabile.

Concludiamo con il seguente risultato per il calcolo integrale.

**Teorema 7** Sia  $f$  una funzione continua e integrabile in  $[a, b)$ . Allora

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow b^-} P(t) - P(a)$$

dove  $P$  è una qualunque primitiva.

Naturalmente, tutta la trattazione fatta per funzioni definite su intervalli semi-aperti a destra del tipo  $[a, b)$  può ripetersi in modo del tutto analogo per funzioni definite su intervalli semiaperti a sinistra del tipo  $(a, b]$ , invertendo i ruoli di  $a$  e  $b$ .

## 1.2 Integrali impropri su intervalli aperti

A questo punto è del tutto naturale cercare di estendere la definizione di integrabilità per funzioni continue definite su intervalli aperti  $(a, b)$ , come ad esempio tutto l'asse reale.

In quest'ultimo caso, una prima idea potrebbe essere quella di definire l'integrabilità in tutto  $\mathbb{R}$  mediante l'esistenza del limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t f(x)dx. \quad (6)$$

Tuttavia questa definizione porta a delle contraddizioni nel caso si vogliano preservare proprietà del tutto naturali per gli integrali, quale ad esempio l'additività sugli intervalli. Infatti, è abbastanza naturale pensare che se una funzione è integrabile in tutto  $\mathbb{R}$ , allora essa debba essere integrabile in ogni intervallo contenuto in  $\mathbb{R}$  e che l'integrale debba essere additivo. Ora, considerando la funzione continua

$$h(x) := \begin{cases} x & \text{se } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$$

osserviamo che entrambi gli integrali  $\int_0^\infty h(x)dx$  e  $\int_{-\infty}^0 h(x)dx$  divergono (rispettivamente a  $+\infty$  e a  $-\infty$ ), mentre per la simmetria dispari della funzione si ha  $\int_{-t}^t h(x)dx = 0$  per ogni  $t \geq 0$ , quindi esiste il limite in (6) e vale zero.

Per evitare tali situazioni, si dà la seguente definizione:

**Definizione 3** Una funzione continua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  si dice integrabile se è integrabile in  $[0, +\infty)$  e in  $(-\infty, 0]$  ed in tal caso si pone

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx := \int_0^\infty f(x)dx + \int_{-\infty}^0 f(x)dx.$$

Quindi, considerando tale definizione, la funzione  $h(x)$  dell'esempio precedente non risulta integrabile.

Osserviamo comunque che se si è stabilito a priori che una funzione  $f$  è integrabile in  $\mathbb{R}$ , allora il valore dell'integrale coincide con il limite in (6). Infatti, vale il seguente risultato.

**Proposizione 8** Se esiste  $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$  allora

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t f(x)dx.$$

*Dimostrazione.*

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^\infty f(x)dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^0 f(x)dx + \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t f(x)dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t f(x)dx$$

dove nell'ultima uguaglianza si è usato il fatto che entrambi i limiti  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^0 f(x)dx$  e  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t f(x)dx$  esistono finiti e pertanto la loro somma è la somma dei limiti (non si verifica la forma di indecisione  $\infty - \infty$ ).  $\square$

In certe situazioni può risultare comunque utile verificare se esiste il limite in (6), anche se la funzione non è integrabile. Per evitare equivoci, il valore del limite in (6) viene chiamato *valore principale* dell'integrale, e si scrive

$$\text{v.p. } \int_{-\infty}^\infty f(x)dx := \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t f(x)dx.$$

Quindi, ricapitolando, se una funzione è integrabile su  $\mathbb{R}$ , allora l'integrale coincide col valore principale, mentre quest'ultimo può esistere anche se la funzione non è integrabile. Osserviamo infine che se  $f$  ha definitivamente segno costante, cioè se

esiste  $K > 0$  tale che  $f(x) \geq 0$  (oppure  $f(x) \leq 0$ ) per  $|x| > K$ , allora la funzione è integrabile se e solo se il valore principale è finito. Infatti, in tal caso non si verifica la forma di indecisione  $\infty - \infty$ .

Volendo generalizzare tale definizione ad un generico intervallo aperto  $(a, b)$ , possiamo dire che:

**Definizione 4** Una funzione continua su  $(a, b)$  è integrabile se scelto arbitrariamente un punto  $c \in (a, b)$ , esistono finiti entrambi gli integrali

$$\int_a^c f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_c^b f(x) dx$$

ed in tal caso l'integrale di  $f$  su  $(a, b)$  è la somma dei due integrali.

È facile verificare che tale definizione non dipende dalla scelta del punto  $c$ , dato che come abbiamo visto l'integrabilità dipende solo dal comportamento della funzione per  $x \rightarrow a^+$  e per  $x \rightarrow b^-$ , e l'integrale è additivo sugli intervalli.

**Esempio 7** La funzione  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}}$  è integrabile in  $(0, +\infty)$ . Infatti, è positiva e per  $x \rightarrow +\infty$  è un infinitesimo di ordine 2  $\not\sim 1$ , mentre per  $x \rightarrow 0^+$  è un infinito di ordine  $\frac{1}{2} < 1$ , quindi esistono finiti entrambi gli integrali  $\int_0^1 f(x) dx$  e  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ .

Anche in questo caso vale il seguente risultato per il calcolo integrale.

**Teorema 9** Sia  $f$  una funzione continua e integrabile su  $(a, b)$ . Allora

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} P(t) - \lim_{t \rightarrow a^+} P(t)$$

dove  $P$  è una qualunque primitiva.

## 2 Integrali di funzioni generalmente continue

### 2.1 Integrabilità di funzioni generalmente continue

**Definizione 5** Sia  $I$  un intervallo di  $\mathbb{R}$  (limitato o illimitato). Una funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  si dice *generalmente continua* (in breve *g.c.*) se l'insieme dei suoi punti di discontinuità non ha punti di accumulazione reali, ovvero se in ogni sottointervallo limitato di  $I$  ammette al più un numero finito di punti di discontinuità.

Ad esempio, la funzione  $[x]$  (parte intera di  $x$ ) è g.c., perché è discontinua solo nei numeri interi. È g.c. anche la funzione  $f(x) = 1/x$  per  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$ .

Nel seguito diremo che una proprietà di tipo puntuale è soddisfatta *quasi ovunque* (in breve *q.o.*) se l'insieme dei punti in cui non vale non ha punti di accumulazione reali.

In realtà nella letteratura matematica il termine *quasi ovunque* ha un diverso significato. Viene usato nel contesto più generale della teoria della misura e significa *ad eccezione al più di un insieme di misura nulla*. L'ambito in cui è più frequentemente usato è quello della misura ed integrazione secondo Lebesgue, che riguarda una classe di funzioni più ampia di quella delle funzioni generalmente continue, a cui noi ci limitiamo. Comunque, nel contesto in cui useremo questo termine, il significato che abbiamo dato è equivalente a quello usuale.

La proprietà di invarianza per l'integrale (sugli intervalli limitati) afferma che se una funzione limitata e integrabile viene alterata in un numero finito di punti, la funzione ottenuta è ancora limitata e integrabile ed il valore dell'integrale rimane invariato. Quindi, pensando anche agli integrali impropri, è del tutto naturale considerare equivalenti due funzioni che sono uguali q.o., cioè:

**Definizione 6** Due funzioni  $f$  e  $g$  generalmente continue si dicono **equivalenti** ( $f \sim g$ ) se sono uguali q.o.

Di fatto, da ora in poi, non distingueremo più due funzioni equivalenti, e quando parleremo di una funzione  $f$ , intenderemo la classe di equivalenza di  $f$ , cioè la famiglia delle infinite funzioni g.c. ad essa equivalenti. Anzi, potremo prendere in considerazione funzioni continue, definite solo q.o. su  $\mathbb{R}$ .

Per introdurre il concetto di integrabilità per funzioni g.c., distinguiamo i casi in cui  $I$  sia un intervallo limitato, una semiretta o tutto  $\mathbb{R}$ .

Se  $I = (a, b)$  è un **intervallo limitato**, allora una funzione  $f$  g.c. definita su  $I$  ammette al più un numero finito di punti di discontinuità, diciamo  $c_1, c_2, \dots, c_N$ . Allora la funzione  $f$  si dice integrabile se lo è in ogni intervallo  $(c_k, c_{k+1})$ ,  $k = 0, \dots, N$ , dove abbiamo posto  $c_0 = a$  e  $c_{N+1} = b$ .

In tal caso, si pone

$$\int_a^b f(x) \, dx := \sum_{k=0}^N \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x) \, dx.$$

Invece, se  $I$  è una **semiretta** del tipo  $(a, +\infty)$ , allora si può decomporre in un numero finito o un'infinità numerabile di intervalli aperti  $I_n = (a_k, a_{k+1})$ , in ciascuno

dei quali  $f$  è continua. Pertanto è naturale definire la funzione *integrabile* se è integrabile in ogni intervallo  $I_n$  e se  $\sum_n \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x) dx < +\infty$ , dove la sommatoria è fatta su un numero finito di addendi (e in tal caso ha certamente un valore finito) o un numero infinito di addendi.

In tal caso, si pone

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx := \sum_n \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x) dx.$$

Analoga è la definizione di integrabilità sulle semirette  $(-\infty, a)$ .

Infine, nel caso  $I = \mathbb{R}$ , diamo la seguente definizione.

**Definizione 7** Una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  g.c. si dice integrabile se lo è in  $(-\infty, 0)$  e in  $(0, +\infty)$  e in tal caso si pone

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx + \int_{-\infty}^0 f(x) dx.$$

Osserviamo che se  $I = \mathbb{R}$  esistono due successioni  $(a_n)_{n \geq 0}$  e  $(b_n)_{n \geq 0}$  in  $\tilde{\mathbb{R}}$  (cioè tali che possono assumere anche i valori  $\pm\infty$ ), tali che

- $b_{n+1} \leq b_n \leq b_0 = 0 = a_0 \leq a_n \leq a_{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;
- se  $a_n$  o  $b_n$ ,  $n \geq 1$ , sono reali (non  $\pm\infty$ ), allora sono punti di discontinuità di  $f$ ;
- $\inf b_n = -\infty$  e  $\sup a_n = +\infty$ ;
- $f$  è continua in  $(b_{n+1}, b_n)$  e in  $(a_n, a_{n+1})$ , per ogni  $n \geq 0$ .

Per ciascuna di tali successioni si possono verificare solo 2 eventualità: o sono strettamente monotone (ed in tal caso la funzione ammette infiniti punti di discontinuità, positivi o negativi), oppure assumono i valori  $\pm\infty$  per qualche  $n$  (e quindi per tutti gli indici da  $n$  in poi), ed in tal caso la funzione ha solo un numero finito di punti di discontinuità.

Ponendo, per convenzione,  $\int_{+\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0$  e  $\int_{-\infty}^{-\infty} f(x) dx = 0$ , è facile verificare che  $f$  è integrabile se e solo se

- $f$  è integrabile in ogni  $(a_n, a_{n+1})$  e  $(b_{n+1}, b_n)$ ,  $n \geq 0$ ;
- le due serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x) dx$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{b_{n+1}}^{b_n} f(x) dx$  sono entrambe convergenti.

Inoltre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x) dx + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{b_{n+1}}^{b_n} f(x) dx.$$

Osserviamo infine che ponendo  $a_{-n} := b_n$ , possiamo scrivere l'integrale mediante una serie bilatera:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x) dx.$$

Data una funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , si definiscono le funzioni **parte positiva** e **parte negativa** di  $f$  nel modo seguente:

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) := \max\{-f(x), 0\}.$$

Si verifica facilmente che

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) \quad \text{e} \quad |f(x)| = f^+(x) + f^-(x).$$

Naturalmente,  $f$  è g.c. se e solo se  $f^+$  ed  $f^-$  sono g.c., inoltre se  $f$  è g.c. anche  $|f|$  lo è (ma non viceversa). Infine, osserviamo che

$$|f| \text{ è integrabile} \iff f^+, f^- \text{ sono entrambe integrabili.}$$

Infatti, essendo  $0 \leq f^+(x) \leq |f(x)|$  e  $0 \leq f^-(x) \leq |f(x)|$ , se  $|f|$  è integrabile, lo sono anche  $f^+$  ed  $f^-$ . Viceversa, essendo  $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$ , se queste sono integrabili lo è anche  $|f|$  perché somma di funzioni integrabili.

Diamo allora la seguente definizione.

**Definizione 8** Una funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  g.c. si dice **sommabile** se  $|f|$  è integrabile (o equivalentemente se  $f^+$  ed  $f^-$  sono entrambe integrabili).

Quindi ogni funzione sommabile è integrabile (perché differenza di due funzioni integrabili), ma non vale il viceversa.

I concetti e le definizioni sopra esposte si possono dare anche per **funzioni a valori complessi**  $f : I \rightarrow \mathcal{C}$ , pensandoli riferiti alla parte reale  $\operatorname{Re}(f)$  e immaginaria  $\operatorname{Im}(f)$ :

**Definizione 9** Una funzione  $f : I \rightarrow \mathcal{C}$  si dice generalmente continua, integrabile o sommabile, se lo sono rispettivamente  $\operatorname{Re}(f)$  ed  $\operatorname{Im}(f)$ . Inoltre, si pone

$$\int_I f(x) dx := \int_I \operatorname{Re}(f(x)) dx + i \int_I \operatorname{Im}(f(x)) dx.$$

A proposito della sommabilità osserviamo che  $\operatorname{Re}(f)$  ed  $\operatorname{Im}(f)$  sono sommabili se e solo se  $|f(x)|$  è sommabile, infatti

$$0 \leq |\operatorname{Re}(f(x))|, |\operatorname{Im}(f(x))| \leq |f(x)| \leq |\operatorname{Re}(f(x))| + |\operatorname{Im}(f(x))|.$$

## 2.2 Spazi di funzioni generalmente continue

Nel seguito denoteremo con  $L^1(I)$  la famiglia delle funzioni  $f : I \rightarrow \mathcal{C}$  generalmente continue e sommabili, cioè

$$L^1(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ è g.c. e } \int_I |f(x)| dx < +\infty\}$$

Anche a questo proposito osserviamo che nella letteratura matematica il simbolo  $L^1(I)$  denota la classe più ampia delle funzioni sommabili secondo Lebesgue. Noi ci limiteremo a trattare la sottofamiglia delle funzioni g.c., per le quali la sommabilità secondo Lebesgue e secondo Riemann sono equivalenti.

È facile verificare che  $L^1(I)$  è uno spazio vettoriale sul campo  $\mathcal{C}$ , con le usuali operazioni di somma tra funzioni e prodotto di una funzione per uno scalare. Inoltre, è possibile definire una norma nel modo seguente:

$$\|f\|_1 := \int_I |f(x)| dx.$$

La norma appena definita soddisfa i 3 assiomi caratteristici delle norme, cioè:

- $\|f\|_1 = 0 \iff f \sim 0$ ;
- $\|\alpha f\|_1 = |\alpha| \|f\|_1$  per ogni  $\alpha \in \mathcal{C}$ ;
- $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$ .

Oltre ad  $L^1(I)$ , possiamo definire anche gli spazi funzionali  $L^p(I)$ , con  $1 \leq p \leq \infty$ :

$$L^p(I) := \{f : I \rightarrow \mathcal{C} : f \text{ è g.c. e } \int_I |f(x)|^p dx < +\infty\} \quad \text{per } 1 \leq p < +\infty;$$

$$L^\infty(I) := \{f : I \rightarrow \mathcal{C} : f \text{ è limitata in } I\}$$

dove nella definizione di  $L^\infty$  si intende che  $f$  è uguale q.o. ad una funzione limitata su  $I$ .

Naturalmente se  $f, g \in L^\infty(I)$ , anche  $\alpha f + \beta g \in L^\infty$ . Invece, se  $p < \infty$ , per la convessità della funzione  $x \mapsto x^p$ , per ogni  $a, b > 0$  si ha  $(\frac{a+b}{2})^p \leq \frac{a^p + b^p}{2}$ , cioè  $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$ . Quindi se  $f, g \in L^p(I)$  allora anche  $\alpha f + \beta g \in L^p(I)$ , cioè  $L^p(I)$  è uno spazio vettoriale.

Anche in tali spazi possiamo definire delle norme nel modo seguente:

$$\|f\|_p := \left( \int_I |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|f\|_\infty := \inf_{g \sim f} \sup_{x \in I} |g(x)|.$$

Ad esempio, data  $f(x) := \frac{1}{x}$  in  $[1, +\infty)$ , si ha che  $f \in L^2([1, \infty))$  e  $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty \frac{1}{x^2} dx} = 1$ . Più in generale,  $f \in L^p$  per ogni  $1 < p < \infty$  e  $\|f\|_p = \frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p}}}$ .

La dimostrazione che  $\|\cdot\|_p$  soddisfa gli assiomi di norma richiede ulteriori risultati e non verrà riportata.

Nello spazio  $L^2(I)$  è possibile definire anche un prodotto scalare che induce la norma  $\|\cdot\|_2$ :

$$\langle f, g \rangle := \int_I f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Tale prodotto è ben definito, essendo  $|f(x)\overline{g(x)}| \leq \frac{1}{2}(|f(x)|^2 + |g(x)|^2)$ . Inoltre,

$$\sqrt{\langle f, f \rangle} = \left( \int_I |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2.$$

Se  $I$  è un intervallo limitato, si può verificare che valgono le seguenti inclusioni:

$$L^\infty(I) \subset L^p(I) \subset L^q(I) \subset L^1(I) \quad \text{per ogni } 1 \leq q \leq p \leq \infty.$$

Tali inclusioni non valgono se  $I$  non è limitato. Ad esempio, le funzioni costanti non nulle sono elementi di  $L^\infty(\mathbb{R})$ , ma non di  $L^p(\mathbb{R})$  per qualsiasi  $p < \infty$ ; la funzione  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  non appartiene ad  $L^1([0, +\infty))$ , ma  $f \in L^2([0, +\infty))$ .

Riguardo al calcolo integrale per funzioni g.c., vale il seguente risultato, di cui non riportiamo la dimostrazione.

**Teorema 10** *Sia  $f : I \rightarrow \mathcal{C}$  una funzione continua su tutto  $I$ , derivabile q.o. con derivata prima g.c. e sommabile sui sottointervalli limitati di  $I$ . Allora*

$$\int_{x_1}^{x_2} f'(x) dx = f(x_2) - f(x_1) \quad \text{per ogni } x_1, x_2 \in I.$$