Singolarità di funzioni olomorfe

Sia $f : A \setminus \{z_0\} \to \mathcal{C}$ una funzione olomorfa, A un aperto connesso.

Definizione. Si dice che il punto z_0 è una singolarità isolata per f se esiste $r > 0$ tale che $B^*(z_0, r) := B(z_0, r) \setminus \{z_0\} \subset A$, cioè se f è olomorfa in $B^*(z_0, r)$.

Esempi. Le funzioni $\frac{\sin z}{z}, \frac{e^z - 1}{z}, \cos\frac{1}{z}$ hanno una singolarità isolata nell'origine. La funzione $\frac{1}{z^2+1}$ ha due singolarità isolate nei punti $z = \pm i$. La funzione $\frac{1}{\sin(1/z)}$ ha singolarità nell'origine e nei punti $z_k = 1/k\pi$, k intero non nullo. Questi ultimi sono singolarità isolate, mentre l'origine è una singolarità non isolata.

Intorno ad una singolarità isolata la funzione f è sviluppabile in serie di Laurent, cioè

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \ + \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} \qquad z \in B^*(z_0, r).$$

Possiamo quindi dare la seguente classificazione delle singolarità isolate, a seconda di come si presenta la parte singolare di f.

Definizione. Sia z_0 una singolarità isolata per f. Allora z_0 è detta:

- *singolarità eliminabile* se $c_{-n} = 0$ per ogni $n \geq 1$, cioè se la parte singolare di f è identicamente nulla;

- *polo (di ordine n)* se $c_{-k} = 0$ per ogni $k > n$ e $c_{-n} \neq 0$, cioè se la parte singolare di f contiene solo un numero finito di addendi ed n è l'ordine massimo delle potenze $1/(z - z_0)^k$ che vi compaiono;

- *singolarità essenziale* se $c_{-n} \neq 0$ per infiniti $n \in \mathbb{N}$.

• Proprietà delle singolarità eliminabili

Teorema 1. *Sia z_0 una singolarità isolata per f, con $B^*(z_0, r) \subset A$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) z_0 *è una singolarità eliminabile;*

(ii) esiste un prolungamento analitico di f su tutto $B(z_0, r)$;

(iii) esiste il $\lim_{z \to z_0} f(z) = \ell \in \mathcal{C}$*;*

(iv) f *è limitata in $B^*(z_0, \rho)$ per qualche $\rho < r$.*

Dim. L'implicazione $(i) \Rightarrow (ii)$ è conseguenza della definizione di singolarità eliminabile, poiché la funzione $g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ è analitica in tutto $B(z_0, r)$ e coincide con $f(z)$ su $B^*(z_0, r)$.

L'implicazione $(ii) \Rightarrow (iii)$ è immediata. Per l'implicazione $(iii) \Rightarrow (iv)$ osserviamo che dalla definizione di limite segue che esiste $\rho > 0$ tale che per ogni $z \in B^*(z_0, \rho)$ si ha $|f(z) - \ell| \leq 1$, quindi $|f(z)| \leq |\ell| + 1$.

Infine proviamo che $(iv) \Rightarrow (i)$. Sia $|f(z)| \leq M$ in $B^*(z_0, \rho)$; allora, posto $\gamma_\epsilon := \{z : |z - z_0| = \epsilon\}$, nello sviluppo in serie di Laurent della f i coefficienti c_{-n} soddisfano la maggiorazione

$$|c_{-n}| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_\epsilon} f(z)(z-z_0)^{n-1}\, dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} M\epsilon^{n-1}\, 2\pi\epsilon = M\epsilon^n$$

per ogni $0 < \epsilon < \rho$. Passando al limite per $\epsilon \to 0$ si ottiene $c_{-n} = 0$ per ogni $n \geq 1$, cioè z_0 è eliminabile.

- **Proprietà dei poli**

Teorema 2. *Sia z_0 una singolarità isolata per f, con $B^*(z_0, r) \subset A$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) z_0 è un polo di ordine n;

(ii) la funzione $g(z) := f(z)(z-z_0)^n$ ha una singolarità eliminabile in z_0 con $\lim_{z \to z_0} g(z) \neq 0$;

(iii) la funzione $h(z) := \frac{1}{f(z)}$ per $z \neq z_0$, $h(z) = 0$ per $z = z_0$, è definita e analitica in $B(z_0, \rho)$ per qualche $\rho < r$ ed ha uno zero di ordine n in z_0.

Dim. $((i) \Rightarrow (ii))$ Dallo sviluppo in serie di Laurent di f segue che

$$g(z) = c_{-n} + c_{-n+1}(z-z_0) + \ldots + c_{-1}(z-z_0)^{n-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^{n+k}$$

quindi la parte singolare dello sviluppo in serie di Laurent della funzione g è identicamente nulla e $\lim_{z \to z_0} g(z) = c_{-n} \neq 0$.

$((ii) \Rightarrow (iii))$ La funzione g ha un prolungamento analitico su $B(z_0, \rho)$ per qualche $\rho > 0$, che non ha zeri. Quindi la funzione $\frac{1}{g(z)}$ è analitica in tale intorno di z_0 e vale lo sviluppo

$$\frac{1}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

pertanto

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{(z-z_0)^n}{g(z)} = c_0(z-z_0)^n + c_1(z-z_0)^{n+1} + \ldots + c_k(z-z_0)^{n+k} + \ldots$$

da cui segue (iii).

($(iii) \Rightarrow (i)$) Se $h(z)$ ha uno zero di ordine n in z_0 allora $h(z) = (z - z_0)^n \phi(z)$ con $\phi(z)$ analitica in $B(z_0, r)$ e non nulla in z_0. Quindi $f(z)(z - z_0)^n = \frac{1}{\phi(z)}$ e $\frac{1}{\phi(z)}$ è analitica nello stesso intorno $B(z_0, r)$. Posto

$$\frac{1}{\phi(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

si ottiene

$$f(z) = \frac{c_0}{(z - z_0)^n} + \frac{c_1}{(z - z_0)^{n-1}} + \ldots + \frac{c_{n-1}}{z - z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{n+k} (z - z_0)^k$$

con $c_0 \neq 0$, quindi z_0 è un polo di ordine n per f. □

Teorema 3. *z_0 è un polo per f se e solo se* $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Dim. Se z_0 è un polo di ordine n per f, allora $\lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0)^n = \ell \neq 0$. Quindi $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Viceversa, se $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$, allora la funzione $h(z) = \frac{1}{f(z)}$ è ben definita e analitica in $B^*(z_0, \rho)$ per qualche $\rho > 0$ con $\lim_{z \to z_0} h(z) = 0$. Quindi $h(z)$ ammette un prolungamento analitico che ha uno zero isolato in z_0, di qualche ordine n. □

- **Proprietà delle singolarità essenziali**

Teorema 4. *Sia z_0 una singolarità isolata per f, con $B^*(z_0, r) \subset A$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) z_0 è una singolarità essenziale;

(ii) non esiste in $\tilde{\mathbb{C}}$ il $\lim_{z \to z_0} f(z)$;

(iii) esistono due successioni $(z_n)_n$ e $(w_n)_n$, entrambe convergenti a z_0, tali che $f(z_n) \to 0$ e $f(w_n) \to \infty$.

Dim. L'equivalenza $(i) \Leftrightarrow (ii)$ è conseguenza immediata dei Teoremi 1 e 3. L'implicazione $(iii) \Rightarrow (ii)$ è ovvia. Proviamo che $(i) \Rightarrow (iii)$.

Dato che z_0 non è una singolarità eliminabile, dal Teorema 1 segue che f non è limitata in alcun $B^*(z_0, r)$, quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $w_n \in A$, con $|w_n - z_0| < \frac{1}{n}$ e $|f(w_n)| > n$. Quindi $w_n \to z_0$ e $f(w_n) \to \infty$.

Supponiamo ora per assurdo che non esista alcuna successione $(z_n)_n$ convergente a z_0 tale che $f(z_n) \to 0$. Allora la funzione $h(z) = \frac{1}{f(z)}$ è ben definita e analitica in qualche $B^*(z_0, \rho)$. Inoltre $h(z)$ è limitata e z_0 è una singolarità isolata eliminabile per h. Se il prolungamento analitico di h a z_0 vale 0, allora z_0 è un polo per f, contro l'ipotesi, mentre se è diverso da zero allora z_0 è una singolarità eliminabile per f, contro l'ipotesi. □

Corollario 5. *Se* z_0 *è una singolarità essenziale, allora* $|f(z)|$ *assume tutti i valori positivi in ogni intorno forato di* z_0*, ovvero:*

per ogni $\alpha > 0$ *esiste una successione* $z_n \to z_0$ *tale che* $|f(z_n)| = \alpha$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$.

Dim. La dimostrazione deriva dall'equivalenza $(i) \Leftrightarrow (iii)$ del Teorema 4. Infatti fissato un intorno $B^*(z_0, r)$ ed un valore positivo α, per la (iii) del Teorema 4 esistono due punti $z, w \in B^*(z_0, r)$ tali che $|f(z)| < \alpha < |f(w)|$. Presa una poligonale γ congiungente z e w contenuta in $B^*(z_0, r)$, per la continuità della funzione modulo, deduciamo che esiste un punto ζ nel sostegno di γ tale che $|f(\zeta)| = \alpha$. $\square$