Lemmi di Jordan e del piccolo e grande cerchio

Sia $f : A \setminus \{z_0\} \to \mathcal{C}$ una funzione continua in A aperto connesso e sia $z_0 \in A$ fissato.

Lemma del grande cerchio. *Dato $K > 0$, supponiamo che il settore*

$$S := \{z \in \mathcal{C} \ : \ |z - z_0| > K,\ \theta_1 \le \arg(z - z_0) \le \theta_2\}$$

sia contenuto in A e che

$$\lim_{z\to\infty, z\in S} (z - z_0)f(z) = \lambda \in \mathcal{C}.$$

Allora, denotato con γ_R l'arco di circonferenza di centro z_0 e raggio R con sostegno contenuto nel settore S, si ha

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\ \mathrm{dz} = \lambda \mathrm{i}(\theta_2 - \theta_1). \tag{1}$$

Dim. Poiché $\lim_{z\to\infty, z\in S} ((z - z_0)f(z) - \lambda) = 0$, posto $M_R := \max_{z\in\gamma_R} |(z - z_0)f(z) - \lambda|$, si ha che $\lim_{R\to+\infty} M_R = 0$. Osserviamo ora che

$$\int_{\gamma_R} f(z)\ \mathrm{dz} = \int_{\gamma_R} (\mathrm{f(z)} - \frac{\lambda}{\mathrm{z} - \mathrm{z}_0})\ \mathrm{dz} + \int_{\gamma_R} \frac{\lambda}{\mathrm{z} - \mathrm{z}_0}\ \mathrm{dz} = \int_{\gamma_R} \frac{(\mathrm{z} - \mathrm{z}_0)\mathrm{f(z)} - \lambda}{\mathrm{z} - \mathrm{z}_0}\ \mathrm{dz} + \lambda\mathrm{i}(\theta_2 - \theta_1).$$

Quindi,

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\ \mathrm{dz} - \lambda\mathrm{i}(\theta_2 - \theta_1)\right| = \left|\int_{\gamma_R} \frac{(z - z_0)f(z) - \lambda}{z - z_0}\ \mathrm{dz}\right| \le R(\theta_2 - \theta_1) \max_{z\in\gamma_R} \frac{|(z - z_0)f(z) - \lambda|}{|z - z_0|} =$$

$$= R(\theta_2 - \theta_1)\frac{M_R}{R} = M_R(\theta_2 - \theta_1).$$

Poiché M_R è infinitesimo per $R \to +\infty$, si ottiene (**??**). $\square$

Lemma del piccolo cerchio. *Dato $\delta > 0$, Supponiamo che il settore*

$$S := \{z \in \mathcal{C} \ : \ |z - z_0| < \delta,\ \theta_1 \le \arg(z - z_0) \le \theta_2\}$$

sia contenuto in A e che

$$\lim_{z\to z_0, z\in S} (z - z_0)f(z) = \lambda \in \mathcal{C}.$$

Allora, denotato con γ_r l'arco di circonferenza di centro z_0 e raggio r con sostegno contenuto nel settore S, si ha

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} f(z)\ \mathrm{dz} = \lambda\mathrm{i}(\theta_2 - \theta_1). \tag{2}$$

Dim. La dimostrazione è la stessa del Lemma precedente, basta sostituire M_R con $m_r := \min_{z\in\gamma_r} |(z - z_0)f(z) - \lambda|$ e passare al limite per $r \to 0$ invece che per $R \to +\infty$. $\square$

Come applicazione del Lemma del grande cerchio dimostriamo il

Teorema fondamentale dell'algebra. *Ogni polinomio $p(z)$ di grado n ha esattamente n zeri.*

Dim. Posto $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, poiché $\lim_{z\to\infty} p(z) = \infty$, esiste $K > 0$ tale che $|p(z)| > 1$ per $|z| > K$. Quindi la funzione $\dfrac{p'(z)}{p(z)}$ è ben definita e continua in $A = \{z \in \mathcal{C} : |z| > K\}$.

Inoltre, osserviamo che

$$\lim_{z\to\infty} z\frac{p'(z)}{p(z)} = \lim_{z\to\infty} \frac{na_n z^n + (n-1)a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z}{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0} = n.$$

Quindi, applicando il Lemma del grande cerchio deduciamo che

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{|z|=R} \frac{p'(z)}{p(z)} \text{ dz} = 2\pi\text{ni}.$$

D'altra parte, per il Teorema dell'indicatore logaritmico, gli integrali nella formula precedente (per $R > K$) valgono $2\pi i N$, dove N è il numero degli zeri di $p(z)$. Quindi $N = n$, cioè $p(z)$ ha esattamente n zeri nel campo complesso. □

Lemma di Jordan. *Sia $w \in \mathcal{C}$, $w \neq 0$, fissato. Supponiamo che A contenga il settore $S := \{z \in \mathcal{C} \ : \ |z| > K \ , \ \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2\}$ con*

$$\frac{\pi}{2} - \arg w \ \leq \ \theta_1 < \theta_2 \leq \frac{3}{2}\pi - \arg w. \tag{3}$$

Allora, se $\lim_{z\to\infty, z\in S} f(z) = 0$, *si ha*

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\ e^{wz} \text{ dz} = 0. \tag{4}$$

Dim. Osserviamo che posto $\theta = \arg z$ e $\phi = \arg w$, si ha

$$|e^{wz}| = e^{Re(wz)} = e^{|w||z|(\cos\phi \ \ \cos\theta - \sin\phi \ \ \sin\theta)} = e^{|w||z|\cos(\phi+\theta)}$$

con $\frac{\pi}{2} \leq \phi + \theta \leq \frac{3}{2}\pi$. Quindi, posto $M_R := \max_{z\in\gamma_R} |f(z)|$, si ha

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) e^{wz} \text{ dz} \right| \leq R M_R \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{|w|R\cos(\phi+\theta)} d\theta. \tag{5}$$

Posto $t = \theta + \phi - \frac{\pi}{2}$, si ha $\cos(\theta+\phi) = \cos(t + \frac{\pi}{2}) = -\sin t$ e l'ultimo integrale nella formula precedente diventa

$$\int_{\theta_1+\phi-\frac{\pi}{2}}^{\theta_2+\phi-\frac{\pi}{2}} e^{-|w|R\sin t} \text{ dt} \leq \int_0^{\pi} \text{e}^{-|\text{w}|\text{R}\sin \text{t}} \text{ dt} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{e}^{-|\text{w}|\text{R}\sin \text{t}} \text{ dt}$$

in quanto $0 \leq \theta_1 + \phi - \frac{\pi}{2} < \theta_2 + \phi - \frac{\pi}{2} \leq \pi$ e la funzione integranda è positiva simmetrica rispetto alla retta $t = \frac{\pi}{2}$.

Inoltre, per la concavità della funzione $\sin t$ in $[0, \frac{\pi}{2}]$, si ha $\sin t \geq \frac{2t}{\pi}$ nello stesso intervallo. Pertanto dalla diguguaglianza (**??**) deduciamo

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)e^{wz}\ \mathrm{dz}\right| \leq 2RM_R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-|w|R\sin t}\ \mathrm{dt} \leq \mathrm{2RM_R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e^{-|w|R\frac{2t}{\pi}}\ dt} =$$

$$= 2RM_R \frac{-\pi}{2|w|R}[e^{-\frac{2|w|R}{\pi}t}]_0^{\frac{\pi}{2}} = M_R \frac{\pi}{|w|}(1 - e^{-R|w|}) \leq M_R \frac{\pi}{|w|}.$$

Poiché M_R è infinitesimo per $R \to +\infty$, si ottiene (**??**). □

Osservazione. La condizione (**??**) fornisce il settore in cui è applicabile il Lemma di Jordan tenuto conto dell'argomento di w. Se $w = i\alpha$, con α reale positivo, allora $\arg w = \frac{\pi}{2}$ ed il Lemma di Jordan è applicabile in ogni settore con argomento contenuto in $[0, \pi]$. Se $w = -i\alpha$, sempre con α reale positivo, allora $\arg w = -\frac{\pi}{2}$ ed il Lemma di Jordan è applicabile in ogni settore con argomento contenuto in $[\pi, 2\pi]$. Invece se w è reale positivo allora il Lemma vale in ogni settore con argomento contenuto in $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$, mentre se w è reale negativo allora dobbiamo prendere un settore con argomento contenuto in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.