Disuguaglianza di Bessel e identità di Parseval

Richiamiamo alcuni concetti di Algebra Lineare.

Sia V uno **spazio vettoriale** sul campo complesso $\mathcal{C}$ (campo degli *scalari*), cioè un insieme (i cui elementi vengono chiamati *vettori*) in cui siano definite le operazioni di somma tra vettori e di prodotto di un vettore per uno scalare, soddisfacenti le proprietà:

- $v + w = w + v$ (commutativa)
- $u + (v + w) = (u + v) + w$ (associativa)
- $\exists 0 \ : \ v + 0 = v \ \ \forall v$ (esistenza dell'elemento neutro)
- $\forall v \ \ \exists(-v) \ : \ v + (-v) = 0$ (esistenza dell'opposto)
- $a(v + w) = av + aw$ (distributiva rispetto alla somma tra vettori)
- $(a + b)v = av + bv$ (distributiva rispetto alla somma tra scalari)
- $a(bv) = (ab)v$
- $1v = v \ \ \forall v$

Dati n vettori $v_1, \ldots, v_n$, si chiama *spazio generato* dagli n vettori il sottoinsieme di V definito da

$$\mathrm{span}(v_1, \ldots, v_n) := \{a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n \ : \ a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{C}\},$$

cioè il sottoinsieme di tutte le combinazioni lineari degli n vettori. Ovviamente esso è uno spazio vettoriale e gli n vettori si dicono *sistema di generatori* per tale spazio.
Inoltre, i vettori si dicono *linearmente indipendenti* se vale la relazione

$$a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \ldots = a_n = 0.$$

Se $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti e sono un sistema di generatori per V (cioè $\mathrm{span}(v_1, \ldots, v_n) = V$), allora si dice che essi formano una *base* per V e il numero naturale n si chiama *dimensione* dello spazio.

Ad esempio, si può verificare che $\mathcal{C}^n$ è uno spazio vettoriale di dimensione n. Una base di tale spazio è data dalle n n-uple $(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)$ (base canonica).

Se uno spazio vettoriale non possiede una base costituita da un numero finito di vettori, allora si dice che ha *dimensione infinita.* Ad esempio, l'insieme $C[a, b]$ delle funzioni continue definite su $[a, b]$ a valori complessi è uno spazio vettoriale a dimensione infinita con le usuali operazioni di somma tra funzioni e prodotto per una costante.

Un **prodotto scalare** $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su V è una funzione definita su $V \times V$ a valori in $\mathcal{C}$ soddisfacente le seguenti proprietà:

- $\langle au + bv, w \rangle = a\langle u, w \rangle + b\langle v, w \rangle$ (bilinearità)

- $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$

- $v \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \langle v, v \rangle > 0.$

Osserviamo che dalle prime due proprietà segue che

$$\langle u, av + bw \rangle = \overline{\langle av + bw, u \rangle} = \overline{a\langle v, u \rangle + b\langle w, u \rangle} = \overline{a\langle v, u \rangle} + \overline{b\langle w, u \rangle} = \overline{a}\langle u, v \rangle + \overline{b}\langle u, w \rangle$$

Ad esempio, in $\mathcal{C}^n$ il prodotto scalare canonico è definito da $\langle v, w \rangle := \sum_{k=1}^{n} v_k \overline{w_k}$. Inoltre, si può facilmente verificare che nello spazio $C[a, b]$

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) \; \overline{g(x)} \; dx$$

è un prodotto scalare.

Un insieme di n vettori $v_1, \ldots, v_n$ si dice *sistema ortogonale* se $\langle v_j, v_k \rangle = 0 \;\; \forall j \neq k$ (cioè se i vettori sono mutuamente ortogonali). Un sistema ortogonale si dice *ortonormale* se soddisfa anche le condizioni $\langle v_k, v_k \rangle = 1 \;\; \forall k = 1, \ldots, n.$

Tale dicitura è giustificata dal fatto che in uno spazio vettoriale con prodotto scalare è possibile definire in modo naturale una **norma** (detta *norma indotta dal prodotto scalare*):

$$\|v\| := \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Si può verificare infatti che essa soddisfa gli assiomi di *norma* cioè:

- $v \neq 0 \;\; \Rightarrow \;\; \|v\| > 0$

- $\|av\| = |a| \; \|v\|$

- $\|v + w\| \;\leq\; \|v\| + \|w\|$ (disuguaglianza triangolare).

La disuguaglianza triangolare si ottiene come immediata applicazione della seguente importante relazione:

$$|\langle u, v \rangle| \;\leq\; \|u\| \; \|v\| \qquad \text{(disuguaglianza di Schwarz)}$$

Per la verifica di tale disuguaglianza, osserviamo che se $\|v\| = 1$ allora

$$0 \leq \|u - \langle u, v \rangle v\|^2 = \langle u - \langle u, v \rangle v, u - \langle u, v \rangle v \rangle =$$

$$= \langle u, u \rangle - \overline{\langle u, v \rangle} \langle u, v \rangle - \langle u, v \rangle \langle v, u \rangle + \langle u, v \rangle \overline{\langle u, v \rangle} = \|u\|^2 - |\langle u, v \rangle|^2$$

cioè se $\|v\| = 1$ allora $|\langle u, v \rangle| \;\leq \|u\|$. Quindi in generale

$$|\langle u, v \rangle| = \left| \left\langle u, \|v\| \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \right| = \|v\| \;\; \left| \left\langle u, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \right| \leq \|u\| \; \|v\|.$$

Osserviamo ora che se v e w sono ortogonali allora

$$\|v+w\|^2 \;=\; \|v\|^2+\|w\|^2 \quad \text{(Teorema di Pitagora).}$$

Se V è uno spazio vettoriale a dimensione finita con base ortogonale $v_1,\ldots,v_n$ allora per ogni $v\in V$ si ha $v=a_1v_1+\ldots+a_nv_n$ dove

$$a_1=\frac{\langle v,v_1\rangle}{\|v_1\|^2},\ \ldots,\ a_n=\frac{\langle v,v_n\rangle}{\|v_n\|^2}$$

(per verificarlo basta eseguire il prodotto $\langle v,v_k\rangle$, $k=1,\ldots,n$, e ricordare che $\langle v_j,v_k\rangle=0$ per $j\neq k$). Pertanto,

$$\|v\|^2=\sum_{k=1}^n|a_k|^2\|v_k\|^2=\sum_{k=1}^n\frac{|\langle v,v_k\rangle|^2}{\|v_k\|^2}.$$

Se la base è ortonormale allora la precedente relazione si scrive

$$\|v\|^2=\sum_{k=1}^n|a_k|^2=\sum_{k=1}^n|\langle v,v_k\rangle|^2.$$

Siano ora u un vettore e $v_1,\ldots,v_n$ un sistema ortogonale. Denotato con $W=\mathrm{span}(v_1,\ldots,v_n)$, si chiama *proiezione ortogonale di u su W* il vettore

$$w:=\frac{\langle u,v_1\rangle}{\|v_1\|^2}\,v_1+\ldots+\frac{\langle u,v_n\rangle}{\|v_n\|^2}\,v_n. \tag{1}$$

Ovviamente per definizione $w\in W$ (è combinazione lineare di $v_1,\ldots,v_n$). Inoltre il vettore $u-w$ è ortogonale a tutti i vettori $v_1,\ldots,v_n$, infatti

$$\langle u-w,v_k\rangle=\langle u,v_k\rangle-\langle w,v_k\rangle=\langle u,v_k\rangle-\sum_{j=1}^n\frac{\langle u,v_j\rangle}{\|v_j\|^2}\,\langle v_j,v_k\rangle=\langle u,v_k\rangle-\langle u,v_k\rangle=0$$

quindi $u-w$ è ortogonale anche a w. Di conseguenza, per il Teorema di Pitagora si ha $\|u-w\|^2+\|w\|^2=\|u\|^2$, quindi $\|w\|^2\le\|u\|^2$ e dato che $v_1,\ldots,v_n$ sono un sistema ortogonale, dalla (1) si deduce

$$\|w\|^2=\sum_{k=1}^n\frac{|\langle u,v_k\rangle|^2}{\|v_k\|^2}\;\le\;\|u\|^2 \qquad \text{(disuguaglianza di Bessel).}$$

Consideriamo ora lo spazio vettoriale $L^2[-\pi,\pi]$ delle funzioni (a valori complessi) a quadrato sommabile su $[-\pi,\pi]$, munito del prodotto scalare

$$\langle f,g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\overline{g(x)}\,dx.$$

Osserviamo che tale prodotto è ben definito, in quanto $|f(x)\,\overline{g(x)}|\le\frac12(|f(x)|^2+|g(x)|^2)$ (per verificarlo basta svolgere il quadrato $(|f(x)|-|g(x)|)^2$ e ricordare che $|g(x)|=|\overline{g(x)}|$), quindi la funzione $|f(x)\,\overline{g(x)}|$ è integrabile su $[-\pi,\pi]$. Tale prodotto induce la norma

$$\|f\|=\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx\right)^{\frac12}.$$

Consideriamo ora le funzioni $f_n(x) := e^{inx}$, n intero. Esse sono mutuamente ortogonali, infatti se $n \neq m$ si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\ e^{-imx}\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}\ dx = \frac{1}{i(n-m)}[e^{i(n-m)x}]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

ma non hanno norma unitaria, infatti

$$\|e^{inx}\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\ e^{-inx}\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1\ dx = 2\pi \qquad \forall n.$$

Fissiamo ora una funzione $f \in L^2[-\pi,\pi]$ e un naturale n. Considerato lo spazio $W_n = \mathrm{span}(e^{ikx})_{k=-n,\dots,n}$, la proiezione ortogonale di f su W_n è data da

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{\langle f, e^{ikx}\rangle}{\|e^{ikx}\|^2}\ e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ e^{-ikx}\ dx\right)\ e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

dove $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\ dx$. Quindi s_n coincide con la somma parziale n-esima dello sviluppo in serie di Fourier di f. La disuguaglianza di Bessel in questo caso diventa

$$\|s_n\|^2 = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ e^{-ikx}\ dx\right|^2 = 2\pi\sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2 \leq \|f\|^2.$$

La precedente disuguaglianza è vera per ogni $n \geq 1$, quindi, passando al limite per $n \to +\infty$, si ottiene

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\|f\|^2 \quad \text{(disuguaglianza di Bessel).}$$

In forma reale, ricordando che $c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$ e $c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$, $k = 1, 2, \dots$, la relazione precedente diventa

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right) \leq \frac{1}{\pi}\|f\|^2.$$

Osserviamo ora che $\|s_n - f\|^2 = \|f\|^2 - \|s_n\|^2$, dato che $s_n - f$ è ortogonale ad s_n. Quindi $\lim_{n\to+\infty}\|s_n\| = \|f\| \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\|s_n - f\| = 0$. Ovvero,

$$\lim_{n\to+\infty}\|s_n - f\| = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\|f\|^2,$$

cioè nella disuguaglianza di Bessel vale il segno di uguaglianza se e solo se la serie di Fourier di f converge ad f nella norma di L^2, e questo è vero. Infatti, vale il seguente risultato.

Identità di Parseval. *Per ogni* $f \in L^2([-\pi,\pi])$ *vale l'identità*

$$2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2 = \pi\left(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right)\right) = \|f\|^2,$$

dove la norma di f *si intende in* L^2.