Trasformate di Laplace delle funzioni di Bessel

Denotiamo con $J_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\ (n+k)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+n}$ le funzioni di Bessel, per $n \geq 0$. Sappiamo che esse sono soluzioni dell'equazione di Bessel

$$t^2 y'' + ty' + t^2 y - n^2 y = 0.$$

Da questo siamo in grado di ottenere le trasformate di Laplace di tali funzioni.

Iniziamo con $n = 0$. Dividendo l'equazione t si ha $ty'' + y' + ty = 0$. Osservando che $J_0(0) = 1$, denotando con $F_0(s)$ la trasformata di $J_0(t)$, si ottiene

$$0 = -\frac{d}{ds}\Big(s^2 F_0(s) - s\Big) + sF_0(s) - 1 - F_0'(s) = -2sF_0(s) - s^2 F_0'(s) + 1 + sF_0(s) - 1 - F_0'(s)$$

cioè

$$F_0'(s) = \frac{-s}{s^2+1} F_0(s)$$

che è un'equazione differenziale lineare a variabili separabili il cui integrale generale è

$$F_0(s) = C\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\ , \quad C \in \mathbb{R}.$$

Per determinare il valore della costante C applichiamo il Teorema del valor iniziale:

$$J_0(0) = 1 = \lim_{Re(s) \to +\infty} sF_0(s) = \lim_{Re(s) \to +\infty} \frac{Cs}{\sqrt{s^2+1}} = C$$

Quindi $C = 1$ e

$$F_0(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}.$$

Determiniamo ora la trasformata $F_1(s)$ di $J_1(t)$. Poiché $J_1(0) = 0$, trasformando l'equazione di Bessel per $n = 1$ si ottiene

$$0 = \frac{d^2}{ds^2}\Big(s^2 F_1(s) - J_1'(0)\Big) - \frac{d}{ds}\left(sF_1(s)\right) + F_1''(s) - F_1(s) =$$

$$= \frac{d}{ds}\Big(2sF_1(s) + s^2 F_1'(s)\Big) - F_1(s) - sF_1'(s) + F_1''(s) - F_1(s) =$$

$$= 2F_1(s) + 2sF_1'(s) + 2sF_1'(s) + s^2 F_1''(s) - F_1(s) - sF_1'(s) + F_1''(s) - F_1(s)$$

cioè

$$F_1''(s) = \frac{-3s}{s^2+1} F_1'(s).$$

Risolvendo rispetto a $F_1'(s)$, si ottiene

$$F_1'(s) = C\frac{1}{(s^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Integrando[1] si ottiene

$$F_1(s) = C\frac{1}{\sqrt{s^2+1}\ (s+\sqrt{s^2+1})} + K\ , \qquad C, K \in I\!R.$$

Per determinare il valore delle costanti C, K osserviamo che $0 = \lim_{Re(s)\to+\infty} F_1(s) = K$. Inoltre, poiché $\mathcal{L}[J_1'(t)](s) = sF_1(s)$ e $J_1'(0) = \frac{1}{2}$, per il Teorema del valor iniziale applicato a $J_1'(t)$, si ha

$$\frac{1}{2} = \lim_{Re(s)\to+\infty} s\ \mathcal{L}[J_1'(t)](s) = \lim_{Re(s)\to+\infty} C\frac{s^2}{\sqrt{s^2+1}\ (s+\sqrt{s^2+1})} = \frac{C}{2}$$

quindi $C = 1$. Di conseguenza

$$F_1(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}\ (s+\sqrt{s^2+1})}.$$

A questo punto le trasformate $F_n(s)$ di $J_n(s)$ si possono ottenere dalla formula ricorsiva $J_{n+1}(t) = J_{n-1}(t) - 2J_n'(t)$ dalla quale si ottiene la formula ricorsiva per le trasformate

$$F_{n+1}(s) = F_{n-1}(s) - 2(sF_n(s) - J_n(0)) = F_{n-1}(s) - 2sF_n(s), \quad n \geq 1.$$

Ad esempio,

$$F_2(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} - \frac{2s}{\sqrt{s^2+1}\ (s+\sqrt{s^2+1})} = \frac{\sqrt{s^2+1}-s}{\sqrt{s^2+1}\ (s+\sqrt{s^2+1})} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}\ (s+\sqrt{s^2+1})^2}.$$

Proviamo per induzione che

$$F_n(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}\ (s+\sqrt{s^2+1})^n}.$$

La formula è vera per $n = 0$ (l'abbiamo verificata anche per $n = 1$ e $n = 2$). Supponendola vera fino ad un generico n, osserviamo che

$$F_{n+1}(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}\ (s+\sqrt{s^2+1})^{n-1}} - \frac{2s}{\sqrt{s^2+1}\ (s+\sqrt{s^2+1})^n} = \frac{\sqrt{s^2+1}-s}{\sqrt{s^2+1}\ (s+\sqrt{s^2+1})^n} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{s^2+1}\ (s+\sqrt{s^2+1})^{n+1}}.$$

□

[1] Risolviamo l'integrale $\int \frac{1}{(s^2+1)^{\frac{3}{2}}}\ ds$. Ponendo $s = \sinh x$ e poi $y = e^{2x}$, si ha

$$\int \frac{1}{(s^2+1)^{\frac{3}{2}}}\ ds = \int \frac{1}{\cosh^2 x}\ dx = \int \frac{4}{e^{2x}+e^{-2x}+2}\ dx = 2\int \frac{1}{(y+1)^2}\ dy = \frac{-2}{y+1} + K =$$

$$= -2\frac{1}{e^{2x}+1} + K = -2\frac{e^{-x}}{e^x+e^{-x}} + K = -\frac{\cosh x - \sinh x}{\cosh x} + K = -\frac{1}{\sqrt{s^2+1}\ (s+\sqrt{s^2+1})} + K.$$