Le Funzioni di Bessel

Serie di Laurent del prodotto

Siano $f, g : \Delta \to \mathbb{C}$ due funzioni olomorfe in un anello $\Delta := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$, $r < R$. Allora $f(z)g(z)$ è olomorfa in Δ e quindi si potrà scrivere come una serie di Laurent totalmente convergente in ogni anello chiuso $D = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 \leq |z - z_0| \leq R_1\}$ con $r < r_1 < R_1 < R$. Ci proponiamo di calcolare i coefficienti di Laurent c_n di $f(z)g(z)$ in Δ supponendo di conoscere quelli di $f(z)$ e $g(z)$ in Δ. In altre parole scrivendo

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c'_n (z - z_0)^n \qquad g(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c''_n (z - z_0)^n$$

e

$$f(z)g(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n$$

vogliamo determinare c_n in funzione di $\{c'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ e $\{c''_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Sappiamo già che le serie che danno $f(z)$, $g(z)$ e $f(z)g(z)$ convergono totalmente in ogni anello chiuso Δ_0 come sopra. Sia allora γ una curva generalmente regolare, semplice e chiusa contenuta in Δ. Si ha

$$c'_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad c''_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

e quindi

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)g(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{c'_k}{(z - z_0)^{n+1-k}} dz \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{c'_k}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g(z)}{(z - z_0)^{n-k+1}} dz = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c'_k c''_{n-k} \end{aligned}$$

Consideriamo, in particolare, il caso in cui $f(z)$ sia analitica in $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ e che la serie di Laurent di $g(z_0 + w^{-1})$ in $D_1 = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| > R^{-1}\}$ sia una serie di Taylor, ossia supponiamo che sia:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

per $|z - z_0| < R$ e

$$g(z_0 + w^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{-n} w^n$$

per $|w| > R^{-1}$. Posto $w = (z - z_0)^{-1}$ otteniamo:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{-n} (z - z_0)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{0} b_n (z - z_0)^n.$$

per ogni $z = z_0 + w^{-1} \in D$. In altre parole

$$c'_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n < 0 \\ a_n & \text{se } n \geq 0 \end{cases} \qquad c''_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n > 0 \\ b_n & \text{se } n \leq 0 \end{cases}$$

Dalla $c_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c'_k c''_{n-k}$ otteniamo allora:

$$c_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k c''_{n-k} = \sum_{k=\max\{0,n\}}^{\infty} a_k b_{n-k}$$

Le funzioni di Bessel

Sia $w \in \mathbb{C}$ un numero complesso. Consideriamo la funzione olomorfa in $C^* := \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$:

$$F(z) = e^{\frac{w}{2}(z-z^{-1})} = e^{\frac{w}{2}z} e^{-\frac{w}{2z}}$$

Posto $f(z) := e^{\frac{w}{2}z}$ e $g(z) := e^{-\frac{w}{2z}}$ si ha

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{w}{2}\right)^n \frac{z^n}{n!} \quad \text{e} \quad g(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{w}{2}\right)^n \frac{z^{-n}}{n!}.$$

Possiamo quindi applicare il risultato della sezione precedente e scrivere

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(w) z^n$$

dove

$$J_n(w) = \sum_{k=\max\{0,n\}}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{w}{2}\right)^k \frac{1}{(k-n)!}\left(-\frac{w}{2}\right)^{k-n} = (-1)^n \sum_{k=\max\{0,n\}}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k-n)!}\left(\frac{w}{2}\right)^{2k-n}$$

(si osservi che $b_{-n} = \frac{1}{n!}\left(-\frac{w}{2}\right)^n$). Nella somma precedente k e $k-n$ sono entrambi ≥ 0 e quindi i coefficienti $J_n(w)$ sono funzioni analitiche di $w \in \mathbb{C}$. Inoltre essendo $k! = \Gamma(k+1)$ [e $(k-n)! = \Gamma(k-n+1)$] e dato che gli interi negativi sono poli della funzione Γ possiamo porre $\frac{1}{\Gamma(-n)} = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi

$$J_n(w) = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k)\Gamma(k-n)}\left(\frac{w}{2}\right)^{2k-n}$$

Definizione. La funzione $J_n(w)$ si dice funzione di Bessel di ordine n.

Sia $n \geq 0$ allora

$$J_{-n}(w) = (-1)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\left(\frac{w}{2}\right)^{2k+n} = (-1)^{-n} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(-1)^{j-n}}{(j-n)!j!}\left(\frac{w}{2}\right)^{2j-n} = (-1)^n J_n(w)$$

avendo posto $j = k+n$. In altre parole conoscendo $J_n(w)$ per $n \geq 0$ possiamo determinare $J_n(w)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

Formule ricorsive

Scriviamo

$$e^{\frac{w}{2}(z-z^{-1})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(w) z^n. \tag{1}$$

Derivando rispetto a z si ottiene:

$$\frac{w}{2}\left(1+\frac{1}{z^2}\right) e^{\frac{w}{2}(z-z^{-1})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n J_n(w) z^{n-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n+1) J_{n+1}(w) z^n$$

ossia

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (n+1) J_{n+1}(w) z^n = \frac{w}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [J_n(w) + J_{n+2}(w)] z^n$$

e quindi, per l'unicità degli sviluppi in serie di Laurent:

$$(n+1) J_{n+1}(w) = \frac{w}{2}[J_n(w) + J_{n+2}(w)]. \tag{2}$$

La precedente è una prima formula ricorsiva che ci permette di calcolare tutte le funzioni di Bessel una volta che si conoscono $J_0(w)$ e $J_1(w)$. Ad esempio

$$\begin{array}{l} J_2(w) = \frac{2}{w} J_1(w) - J_0(w) \\ J_3(w) = \frac{4}{w} J_2(w) - J_1(w) = \frac{8-w^2}{w^2} J_1(w) - \frac{4}{w} J_0(w) \\ J_4(w) = \frac{6}{w} J_3(w) - J_2(w) = \frac{8-2w-w^2}{w^2} J_1(w) - \frac{4+w}{w} J_0(w) \end{array} \tag{3}$$

Dato che $J_2(w)$ è olomorfa in $\mathbb{C}$ anche $\frac{2}{w} J_1(w)$ lo sarà, e quindi dovrà aversi $J_1(0) = 0$. Infatti, dalla (1) si ottiene subito (ponendo $w = 0$)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(0) z^n = 1$$

e quindi (per l'unicità dello sviluppo di Laurent)

$$J_0(0) = 1 \quad \text{e} \quad J_n(0) = 0 \quad \text{per ogni } n \neq 0.$$

Di conseguenza, passando al limite per $w \to 0$ nella prima delle (3):

$$2J_1'(0) = J_0(0) = 1.$$

In generale dalla (2) si ha

$$2(n+1) J_{n+1}'(0) = J_n(0) + J_{n+2}(0) = 0$$

per ogni $n \geq 1$.
Derivando la (1) rispetto a w otteniamo invece:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n'(w) z^n = \frac{1}{2}(z - z^{-1}) \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(w) z^n = \frac{1}{2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} [J_{n-1}(w) - J_{n+1}(w)] z^n$$

e derivando ancora:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n''(w)z^n = \frac{1}{4}(z^2+z^{-2}-2)\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(w)z^n = \frac{1}{4}\sum_{n\in\mathbb{Z}}[J_{n-2}(w)-2J_n(w)+J_{n+2}(w)]z^n.$$

Quindi

$$(4)\qquad \begin{aligned} J_n'(w) &= \tfrac{1}{2}[J_{n-1}(w)-J_{n+1}(w)] \\ J_n''(w) &= \tfrac{1}{4}[J_{n-2}(w)-2J_n(w)+J_{n+2}(w)] \end{aligned}$$

ossia, utilizzando anche la (2) e supponendo $w \neq 0$:

$$\begin{aligned} J_n''(w) &= \frac{1}{4}[J_{n-2}(w)+J_n(w)-4J_n(w)+J_n(w)+J_{n+2}(w)] \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{2}{w}(n-1)J_{n-1}(w)-4J_n(w)+\frac{2}{w}(n+1)J_{n+1}(w)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{n}{w}(J_{n-1}(w)+J_{n+1}(w))-2J_n(w)-\frac{1}{w}(J_{n-1}(w)-J_{n+1}(w))\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{2n^2}{w^2}J_n(w)-2J_n(w)-\frac{2}{w}J_n'(w)\right] = \frac{n^2}{w^2}J_n(w)-J_n(w)-\frac{1}{w}J_n'(w). \end{aligned}$$

Vediamo quindi che $J_n(w)$ soddisfa l'equazione differenziale (detta di Bessel)

$$(5)\qquad w^2u''(w)+wu'(w)+(w^2-n^2)u(w)=0$$

assieme alle *condizioni iniziali*

$$u(0)=\delta_n, \quad u'(0)=\frac{1}{2}[\delta_{n-1}-\delta_{n+1}]$$

essendo $\delta_n = 1$ se $n = 0$ e $\delta_n = 0$ se $n \neq 0$. Per continuità l'equazione (5) è soddisfatta anche per $w = 0$. Osserviamo che se $n > 1$ si ha $J_n(0) = 0$ e $J_n'(0) = 0$ tuttavia non si ha $J_n(w) = 0$ in quanto l'equazione (5) è *singolare* in $w = 0$ (il coefficiente di $u''(w)$ si annulla in $w = 0$). L'equazione di Bessel è quindi un esempio di una equazione differenziale singolare in $w = 0$ che ammette soluzioni *analitiche* in $\mathbb{C}$.

Forma integrale delle funzioni di Bessel

Nella (1) poniamo $z = e = i\theta$ e $w = x \in \mathbb{R}$. Otteniamo:

$$e^{ix\sin\theta} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(x)e^{in\theta}.$$

Di conseguenza $J_n(x)$ è l'n-esimo coefficiente di Fourier della funzione 2π-periodica $e^{ix\sin\theta} = \cos(x\sin\theta)+i\sin(x\sin\theta)$. Di conseguenza:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\sin\theta-n\theta)}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x\sin\theta-n\theta)d\theta$$

dato che $\sin(x \sin\theta - n\theta)$ è dispari. Dalla parità di $\cos(x \sin\theta - n\theta)$ segue anche

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin\theta - n\theta) d\theta$$

Dalla uguaglianza di Parseval si ottiene poi:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |J_n(x)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |e^{ix \sin\theta}|^2 d\theta = 1$$

da cui segue che $J_n(x)$ sono funzioni limitate in $\mathbb{R}$ (ovviamente la stessa conclusione è falsa se si considerano le funzioni $J_n(w)$, $w \in \mathbb{C}$, altrimenti $J_n(w)$ sarebbe costante in virtù del Teorema di Liouville).