PROGRAMMA DEL CORSO DI ANALISI MATEMATICA 2
INGEGNERIA CIVILE E AMBIENTALE

Anno Accademico: 2016-2017
Facoltà di Ingegneria – Università Politecnica delle Marche
Docente: DOTT. ALESSANDRO CALAMAI

Funzioni di più variabili.
Lo spazio $\mathbb{R}^n$. Norma e distanza. Intorno sferico. Punti di accumulazione, punti isolati. Punti interni. Insiemi aperti e chiusi. Frontiera di un insieme.
Funzioni reali di più variabili reali. Dominio, grafico, insiemi di livello. Definizione di limite per funzioni di più variabili. Limiti direzionali. Limiti di successioni in $\mathbb{R}^n$. Successioni convergenti e divergenti. Coordinate polari nel piano. Algebra dei limiti. Teorema dell'unicità del limite. Teorema della permanenza del segno. Teorema dei carabinieri e sue conseguenze. Continuità per funzioni di più variabili. Continuità delle funzioni combinate. Teorema di Weierstrass. Derivate parziali. Derivate direzionali. Differenziabilità. Piano tangente al grafico. Continuità delle funzioni differenziabili *(dim)*. Derivabilità delle funzioni differenziabili *(dim)*. Esempi e confronti su continuità, derivabilità e differenziabilità. Teorema del differenziale totale *(dim)*.
Massimi e minimi relativi. Teorema di Fermat *(dim)*. Condizione necessaria del primo ordine per i punti estremanti. Punti critici. Massimi e minimi assoluti. Derivate parziali di ordine superiore. Funzioni di classe C^n. Derivate seconde. Teorema di Schwarz. Matrice hessiana. Teorema di derivazione delle funzioni composte *(dim)*. Aperti connessi (per poligonali) in $\mathbb{R}^n$. Funzioni con gradiente nullo in un connesso. Formula di Taylor al secondo ordine con resto in forma di Peano per funzioni di più variabili *(dim)*. Matrici simmetiche e forme quadratiche associate. Segno di una forma quadratica. Il caso delle matrici di ordine 2: caratterizzazione tramite il determinante e la traccia. Condizione necessaria del secondo ordine per i punti estremanti *(dim)*. Condizione sufficiente del secondo ordine per i punti estremanti *(dim)*.
Funzioni definite implicitamente. Teorema delle funzioni implicite *(dim)*. Punti regolari e punti singolari. Massimi e minimi vincolati. Moltiplicatori di Lagrange.

Curve. Integrali curvilinei. Forme differenziali.
Funzioni a valori vettoriali. Definizione di limite e di funzione continua. Curve (arco di curva parametrica). Definizione di curva continua, semplice e chiusa. Curve piane. Esempi di curve. Curve in coordinate polari. Derivata di una curva: significato geometrico. Curve regolari e generalmente regolari. Retta tangente. Integrale definito di una funzione a valori vettoriali. Teorema fondamentale del calcolo. Curve rettificabili. Lunghezza di una curva. Teorema di rettificabilità delle curve regolari *(dim)*. Unione o concatenazione di due curve. Cambiamenti di parametro. Curve equivalenti. Orientazione. Invarianza della lunghezza. Integrale curvilineo (di prima specie) di una funzione. Ascissa curvilinea. Invarianza dell'integrale curvilineo di prima specie per parametrizzazioni equivalenti e cambi di orientazione *(dim)*. Applicazioni dell'integrale curvilineo di prima specie al calcolo del baricentro e dei momenti d'inerzia rispetto a un asse fissato di una linea materiale.
Curve nello spazio. Curvatura e torsione. Versore tangente, normale e binormale. Triedro fondamentale. Equazioni di Frenet. Calcolo del triedro fondamentale e di curvatura e torsione per parametrizzazioni generiche. Caso delle curve piane.
Campi vettoriali nello spazio. Lavoro di un campo di forze lungo un cammino orientato. Forme differenziali lineari nello spazio. Forme differenziali lineari in $\mathbb{R}^n$. Esempio: il differenziale di una funzione reale di più variabili reali. Integrale di una forma lungo una curva orientata, o integrale curvilineo di seconda specie. Indipendenza dell'integrale dal cammino. Forme esatte. Aperti connessi per archi in $\mathbb{R}^n$. Teorema di caratterizzazione delle forme esatte *(dim)*. Forme esatte e chiuse in $\mathbb{R}^2$. Forme chiuse in un rettangolo. Aperti semplicemente connessi. Teorema di Poincaré. Forme in $\mathbb{R}^3$ e campi vettoriali. Forme esatte e campi conservativi. Potenziale. Forme chiuse e campi irrotazionali. Calcolo di primitive. Calcolo di integrali tramite le primitive.

Integrali multipli.
Integrale doppio di una funzione limitata in un rettangolo. Somme di Cauchy-Riemann. Integrabilità delle funzioni continue. Interpretazione dell'integrale doppio come volume. Teorema di Fubini per i rettangoli. Integrale su un insieme limitato. Insiemi semplici e insiemi regolari. Formule di riduzione. Proprietà dell'integrale. Insiemi misurabili e loro area. Insiemi trascurabili. Esempio di una funzione limitata non integrabile (in una variabile). Trasformazioni di coordinate ammissibili. Formula del cambiamento di coordinate negli integrali doppi. Coordinate polari nel piano. Applicazioni degli integrali doppi al calcolo del baricentro e dei momenti d'inerzia rispetto a un asse fissato di una lamina materiale. Esempi di integrali doppi su insiemi illimitati di $\mathbb{R}^2$.
Integrale triplo. Funzioni limitate in un parallelepipedo. Formule di riduzione. Integrazione per fili e per strati. Integrale su un insieme limitato di $\mathbb{R}^3$. Domini regolari di $\mathbb{R}^3$ e loro volume. Trasformazioni di coordinate ammissibili. Formula del cambiamento di coordinate negli integrali tripli. Coordinate sferiche e coordinate cilindriche nello spazio. Applicazioni degli integrali tripli al calcolo del baricentro e dei momenti d'inerzia rispetto a un asse fissato di un corpo solido materiale.
Teorema di Jordan. Convenzione sull'orientazione dei circuiti nel piano. Domini regolari nel piano. Orientazione positiva del bordo. Formula di Gauss-Green *(dim)*.
Superfici regolari in $\mathbb{R}^3$. Piano tangente. Elemento d'area. Calcolo dell'area di una superficie. Superfici cartesiane. Integrale di superficie di una funzione continua. Superfici di rotazione. Teorema di Guldino per il calcolo dell'area di una superficie di rotazione. Applicazioni al calcolo del baricentro e dei momenti d'inerzia rispetto a un asse fissato di una superficie materiale.
Flusso di un campo vettoriale attraverso una curva chiusa. Teorema della divergenza nel piano *(dim)*.
Superfici orientate. Orientabilità. Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie orientata. Superfici chiuse. Normale esterna. Teorema di Gauss o della divergenza. Superfici con bordo. Orientazione positiva indotta sul bordo. Teorema di Stokes o del rotore.

Equazioni differenziali ordinarie.
Equazioni differenziali ordinarie. Equazioni del primo ordine in forma normale. Definizione di soluzione. Equazioni differenziali del primo ordine: integrale generale e integrali particolari. Condizione iniziale. Problema di Cauchy. Teorema di esistenza e unicità. Tecniche risolutive. Equazioni a variabili separabili. Equazioni lineari del primo ordine. Equazione omogenea associata. Formula risolutiva. Equazioni differenziali del primo ordine che si possono ricondurre a lineari oppure a variabili separabili. Equazioni di Bernoulli. Equazioni del secondo ordine in forma normale. Definizione di soluzione. Condizioni iniziali. Equazioni lineari. Teorema di struttura dell'insieme delle soluzioni di un'equazione lineare non omogenea. Dimensione dell'insieme delle soluzioni di un'equazione omogenea. Funzioni linearmente indipendenti. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti. Equazioni lineari omogenee. Integrale generale. Polinomio caratteristico. Equazioni omogenee: soluzioni complesse. Equazioni non omogenee: soluzioni particolari. Metodo di somiglianza. Principio di sovrapposizione. Metodo della variazione delle costanti. Riduzione dell'ordine. Sistemi di equazioni differenziali. Esempio: il modello preda-predatore di Lotka-Volterra.

Testo di riferimento:
- "Analisi Matematica 2" – M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa, Ed.Zanichelli.