

## PROGRAMMA DEL CORSO DI ANALISI MATEMATICA 1 INGEGNERIA EDILE

Anno Accademico: 2017-2018

Facoltà di Ingegneria – Università Politecnica delle Marche

Docente: DOTT. ALESSANDRO CALAMAI

### **Numeri reali. Successioni numeriche.**

Assiomi dei numeri reali: assiomi algebrici e di ordinamento. Assioma di completezza. Sezioni. Elemento separatore. Irrazionalità di  $\sqrt{2}$  (*dim*). Retta reale e funzione ascissa. Distanza. Valore assoluto. Intervalli della retta reale. Piano cartesiano. Maggiorante e minorante. Insieme superiormente ed inferiormente limitato. Massimo e minimo. Estremo superiore ed inferiore. Esistenza dell'estremo superiore (*dim*). Caratterizzazione di estremo superiore ed inferiore.

Numeri naturali e principio di induzione. Disuguaglianza di Bernoulli (*dim*).

Successioni numeriche. Proprietà definitive di una successione. Limite di successione. Teorema di unicità del limite (*dim*). Successioni convergenti e divergenti. Successioni regolari. Successioni limitate. Teorema di limitatezza delle successioni convergenti (*dim*). Prodotto di una successione limitata per una infinitesima. Successioni monotone. Teorema di regolarità delle successioni monotone (*dim*). Limiti notevoli. Algebra dei limiti finiti. Algebra dei limiti infiniti e forme indeterminate. Teorema della permanenza del segno (*dim*) e suoi corollari. Teorema dei due carabinieri (*dim*). Criterio del rapporto (*dim*). Gerarchia degli infiniti. Il numero di Nepero. Disuguaglianza di Nepero. Limiti notevoli in cui compaiono esponenziale e logaritmo. Algebra dei limiti e forme indeterminate esponenziali. Limiti notevoli in cui compaiono seno e coseno. Confronto tra infiniti e tra infinitesimi. Relazione di asintotico.

### **Funzioni continue.**

Funzioni. Dominio, codominio, immagine, retroimmagine e grafico. Funzione iniettiva, suriettiva e biiettiva. Funzione identità. Composizione di funzioni. Funzione inversa. Funzioni reali di variabile reale. Dominio naturale. Funzioni monotone. Iniettività delle funzioni strettamente monotone. Funzioni elementari e loro inverse. Funzioni potenza con esponente reale. Funzione esponenziale e logaritmo. Funzioni trigonometriche e loro inverse. Monotonia delle funzioni elementari. Funzioni combinate (somma, prodotto, quoziente e composizione). Trasformazioni del grafico di una funzione: traslazioni, simmetrie, omotetie.

Limiti di funzioni. Definizione di limite. Intorno e intorno forato. Punto di accumulazione. Limiti finiti e infiniti. Limite destro e sinistro. Asintoti. Teorema di caratterizzazione sequenziale del limite di funzioni (*dim*). Intorni di infinito. Definizione generale (topologica) di limite di funzioni tramite gli intorni. Teorema di unicità del limite (*dim*). Teorema della permanenza del segno (*dim*). Teorema dei due carabinieri (*dim*). Teorema sul limite delle funzioni composte (*dim*). Cambiamento di variabili nei limiti di funzioni. Funzioni asintotiche e proprietà elementari. Funzioni trascurabili. Simboli di Landau (“o piccolo”) e proprietà elementari. Ordine di infinitesimo.

Funzioni continue. Caratterizzazione sequenziale della continuità. Continuità delle funzioni elementari. Continuità di somma, prodotto, quoziente e composizione di funzioni continue. Classificazione delle discontinuità. Estremo superiore ed inferiore. Massimo e minimo assoluto. Teorema sul limite di funzioni monotone (*dim*). Teorema di esistenza degli zeri (*dim*). Metodo di bisezione e soluzioni approssimate di equazioni trascendenti. Esistenza della radice  $n$ -esima aritmetica di un numero positivo. Funzioni continue in un intervallo. Teorema dei valori intermedi (*dim*). Invertibilità e monotonia. Teorema sulla continuità della funzione inversa (*dim*). Massimi e minimi, punti di massimo e di minimo. Teorema di Weierstrass (senza dimostrazione).

### **Funzioni derivabili.**

Definizione di derivata. Interpretazione cinematica e geometrica. Rette secanti e retta tangente. Derivabilità delle funzioni elementari. Regole di derivazione di somma, prodotto e quoziente di funzioni. Regola di derivazione della funzione composta e della funzione inversa. Punti angolosi, cuspidi e punti a tangente verticale. Massimi e minimi relativi. Punti critici. Teorema di Fermat (*dim*). Teorema di Rolle (*dim*). Teorema di Lagrange (*dim*). Criterio di monotonia e criterio di monotonia stretta. Condizione

sufficiente per la derivabilità in un punto. Risoluzione di equazioni trascendenti. Teorema di De l'Hopital (senza dimostrazione).

Derivate successive. Funzioni convesse in un intervallo aperto. Caratterizzazione della convessità per le funzioni derivabili (senza dimostrazione). Criterio di convessità per funzioni derivabili due volte (*dim*). Condizione sufficiente per massimi e minimi relativi (*dim*). Studio di funzioni.

Polinomio di Taylor e di Mac Laurin. Formula di Taylor di ordine  $n$  con resto di Peano. Formula di Taylor delle funzioni elementari.

### **Integrale di Riemann. Integrali impropri. Serie numeriche.**

Integrale di Riemann di una funzione limitata. Partizione, somma integrale superiore e inferiore, integrale superiore e inferiore. Funzioni integrabili secondo Riemann. Integrale di Riemann. Teorema di integrabilità delle funzioni continue (senza dimostrazione). Esempio di funzione non integrabile secondo Riemann: la funzione di Dirichlet. Criterio di integrabilità (*dim*). Teorema di integrabilità delle funzioni monotone (*dim*). Proprietà di additività, di linearità e di monotonia dell'integrale. Integrale definito. Teorema della media integrale (*dim*). Funzione integrale e sue proprietà. Teorema di continuità della funzione integrale (*dim*). Teorema fondamentale del calcolo integrale (*dim*). Primitiva di una funzione. Teorema di caratterizzazione delle primitive (*dim*). Formula fondamentale del calcolo integrale (*dim*). Integrale indefinito. Proprietà di linearità dell'integrale indefinito. Integrali immediati. Integrali riconducibili ad integrali immediati. Regola di integrazione per parti. Regola di integrazione per sostituzione. Integrale di funzioni razionali. Scomposizione in fratti semplici. Regola di cambiamento di variabile negli integrali definiti.

Integrabilità in senso improprio o generalizzato. Integrali impropri su intervalli illimitati. Integrali impropri convergenti e divergenti. Criteri di convergenza (tutti senza dimostrazione). Criterio del confronto. Criterio del confronto asintotico. Criterio della convergenza assoluta. Integrali impropri di funzioni non limitate. Criteri di convergenza.

Serie numeriche. Somme parziali. Serie convergenti, divergenti e indeterminate. Serie geometrica. Condizione necessaria alla convergenza (*dim*). Serie a termini positivi. Criteri di convergenza (tutti senza dimostrazione). Criterio del confronto. Criterio del confronto asintotico. Convergenza della serie armonica generalizzata. Criterio del rapporto. Criterio della radice. Serie a termini di segno qualunque. Criterio della convergenza assoluta. Serie a termini di segno alterno. Criterio di Leibniz.

### **Testo di riferimento:**

- “Analisi Matematica 1” – M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa, Ed.Zanichelli.