

## PROGRAMMA DEL CORSO DI ANALISI MATEMATICA 1 INGEGNERIA CIVILE E AMBIENTALE

Anno Accademico: 2012-2013

Facoltà di Ingegneria – Università Politecnica delle Marche

Docente: DOTT. ALESSANDRO CALAMAI

### **Numeri reali. Successioni numeriche.**

Assiomi dei numeri reali. Assiomi algebrici e di ordinamento. Assioma di completezza. Elemento separatore. Valore assoluto. Intervalli della retta reale. Retta reale e funzione ascissa. Distanza. Piano cartesiano. Maggiorante e minorante. Insieme superiormente ed inferiormente limitato. Massimo e minimo. Estremo superiore ed inferiore. Teorema di esistenza dell'estremo superiore, proprietà di Archimede e teorema di densità dei numeri razionali (*tutti senza dimostrazione*). Numeri naturali e principio di induzione. Disuguaglianza di Bernoulli. Caratterizzazione di estremo superiore ed inferiore.

Successioni numeriche. Limite di successione. Teorema di unicità del limite. Successioni limitate e limitatezza delle successioni convergenti. Prodotto di una successione limitata per una infinitesima. Algebra dei limiti finiti. Successioni divergenti e successioni regolari. Limiti notevoli. Algebra dei limiti infiniti e forme indeterminate. Teorema della permanenza del segno e suoi corollari. Teoremi di confronto. Teorema dei due carabinieri. Limiti notevoli in cui compaiono seno e coseno. Successioni monotone. Teorema di regolarità delle successioni monotone. Il numero di Nepero. Disuguaglianza di Nepero. Limiti notevoli in cui compaiono esponenziale e logaritmo. Algebra dei limiti e forme indeterminate esponenziali. Criterio del rapporto (*con dimostrazione*) e gerarchia degli infiniti. Limiti notevoli e gerarchia degli infiniti. Relazione di asintotico.

### **Funzioni continue.**

Funzioni. Dominio, codominio, immagine, retroimmagine e grafico. Funzione iniettiva, suriettiva e biiettiva. Funzione identità. Composizione di funzioni. Funzione inversa. Funzioni reali di variabile reale. Dominio naturale. Funzioni elementari. Operazioni tra funzioni: somma, differenza, prodotto, quoziente. Funzione composta. Funzioni monotone. Iniettività delle funzioni strettamente monotone. Inverse delle funzioni elementari. Intorno e intorno forato. Punto di accumulazione. Limite di funzioni. Teorema di caratterizzazione sequenziale del limite di funzioni. Limiti finiti e infiniti. Limite destro e sinistro. Asintoti. Definizione generale di limite di funzioni tramite gli intorni. Teorema di unicità del limite. Algebra dei limiti e forme indeterminate. Teorema della permanenza del segno. Teoremi di confronto. Teorema dei due carabinieri. Teorema sul limite delle funzioni composte. Cambiamento di variabili nei limiti di funzioni. Estremo superiore ed inferiore. Massimo e minimo assoluto. Teorema sul limite di funzioni monotone. Funzioni asintotiche e proprietà elementari. Funzioni trascurabili. Simboli di Landau (“o piccolo”) e proprietà elementari. Ordine di infinitesimo.

Funzioni continue. Caratterizzazione sequenziale della continuità. Continuità delle funzioni elementari. Continuità di somma, prodotto, quoziente e composizione di funzioni continue. Classificazione delle discontinuità. Prolungamento per continuità. Teorema di esistenza degli zeri. Metodo di bisezione. Applicazioni: calcolo di soluzioni di equazioni trascendenti, esistenza della radice  $n$ -esima aritmetica di un numero positivo. Funzioni continue in un intervallo. Teorema dei valori intermedi. Invertibilità e monotonia. Teorema sulla continuità della funzione inversa. Inverse delle funzioni elementari. Massimi e minimi, punti di massimo e di minimo. Teorema di Weierstrass.

### **Funzioni derivabili.**

Definizione di derivata. Interpretazione cinematica e geometrica. Rette secanti e retta tangente. Derivabilità delle funzioni elementari. Regole di derivazione di somma, prodotto e quoziente di funzioni. Regola di derivazione della funzione composta e della funzione inversa. Punti angolosi, cuspidi e punti a tangente verticale. Massimi e minimi relativi. Punti critici. Teorema di Fermat. Teorema di Rolle. Teorema di Lagrange. Criterio di monotonia e criterio di monotonia stretta. Condizione sufficiente per la derivabilità in un punto. Risoluzione di equazioni trascendenti. Studio di funzioni. Derivate successive. Funzioni convesse in un intervallo aperto. Caratterizzazione della convessità per le funzioni derivabili (*senza dimostrazione*). Criterio di convessità per funzioni derivabili due volte. Condizione sufficiente per

massimi e minimi relativi. Metodo di Newton per l'approssimazione degli zeri di una funzione. Teorema di De l'Hopital. Polinomio di Taylor e di Mac Laurin. Formula di Taylor di ordine  $n$  con resto di Peano. Formula di Taylor delle funzioni elementari.

### **Integrale di Riemann.**

Partizione, somma integrale superiore e inferiore, integrale superiore e inferiore. Funzioni integrabili secondo Riemann. Integrale di Riemann. Esempio di funzione non integrabile secondo Riemann: la funzione di Dirichlet. Criterio di integrabilità. Teorema di integrabilità delle funzioni monotone. Teorema di integrabilità delle funzioni continue (*senza dimostrazione*). Proprietà di additività, di linearità e di monotonia dell'integrale. Teorema della media integrale. Integrale definito e funzione integrale. Teorema di continuità della funzione integrale. Teorema fondamentale del calcolo integrale. Primitiva di una funzione. Teorema di caratterizzazione delle primitive. Formula fondamentale del calcolo integrale. Integrale indefinito. Integrali immediati. Integrali riconducibili ad integrali immediati. Proprietà di linearità dell'integrale indefinito. Regola di integrazione per parti. Regola di integrazione per sostituzione. Integrale di funzioni razionali. Scomposizione in fratti semplici e scomposizione di Hermite. Regola di cambiamento di variabile negli integrali definiti. Calcolo di aree e lunghezze. Integrabilità in senso improprio o generalizzato. Integrali impropri su intervalli illimitati. Integrali impropri convergenti e divergenti. Criterio del confronto. Criterio del confronto asintotico. Criterio della convergenza assoluta. Integrali impropri su intervalli limitati. Integrali impropri convergenti e divergenti. Criteri di convergenza: confronto, confronto asintotico, convergenza assoluta. Funzioni definite tramite integrali. Studio di funzioni integrali. Esempi: funzione logaritmo e funzione degli errori.

### **Serie numeriche e Serie di potenze.**

Serie numeriche. Somme parziali. Serie convergenti, divergenti e indeterminate. Serie geometrica e serie armonica generalizzata. Condizione necessaria alla convergenza. Serie a termini non negativi. Criterio del confronto integrale. Criterio del confronto. Criterio del confronto asintotico. Criterio del rapporto. Criterio della radice. Serie a termini di segno qualunque. Criterio della convergenza assoluta. Serie a termini di segno alterno. Criterio di Leibniz.

Serie di potenze. Insieme di convergenza. Teorema della convergenza in intervalli. Raggio di convergenza. Teorema sul raggio di convergenza. Metodo del rapporto e metodo della radice. Serie derivata e integrata. Teorema di derivazione ed integrazione delle serie di potenze. Serie di Taylor. Funzioni analitiche o sviluppabili in serie di Taylor. Condizione necessaria e sufficiente per la sviluppabilità in serie di Taylor. Condizione sufficiente per la sviluppabilità in serie di Taylor. Formula di Taylor di ordine  $n$  con resto di Lagrange. Sviluppi notevoli in serie di Taylor. Sviluppi di Mac Laurin delle funzioni elementari.

### **Testi di riferimento:**

- “Analisi Matematica” – M. Bertsch, R. Dal Passo, L. Giacomelli – Ed. McGraw-Hill.
- “Note di Analisi Matematica Uno” – F.G. Alessio, P. Montecchiari – Ed. Esculapio.