Prima prova scritta di Analisi Matematica 1 – A
Ing. Civile e Ambientale – A.A. 2012/13 – 15/02/2013

Cognome: _____ Nome: _____ Matricola: _____ Immatricolato nel _____

1) Dimostrare che, se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono due successioni tali che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell_1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \ell_2$ con $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$, allora si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \ell_1 + \ell_2$.
Dimostrare poi che se $\ell_1 = +\infty$ e $\ell_2 \in \mathbb{R}$, allora si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty$.

2) Enunciare e dimostrare il Teorema di Lagrange. Enunciare almeno un suo corollario. Discutere l'applicabilità del Teorema di Lagrange alla funzione $f(x) = 1+|x|$ nell'intervallo $[-1, 1]$.

3) Dare la definizione di integrale improprio per funzioni continue nell'intervallo $[a, +\infty)$. Discutere il caso particolare delle funzioni non negative. Enunciare e dimostrare il criterio del confronto per gli integrali impropri.

4) Siano $\{a_n\}$ una successione divergente a $+\infty$ e $\{b_n\}$ una successione limitata. Provare di ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

a) La successione $\left\{ \frac{b_n}{a_n} \right\}$ è convergente.

b) La successione $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$ è regolare.

c) La successione $\{a_n \cdot b_n\}$ non è limitata superiormente.