PROGRAMMA DEL CORSO DI GEOMETRIA
INGEGNERIA CIVILE E AMBIENTALE

Anno Accademico: 2013-2014
Facoltà di Ingegneria – Università Politecnica delle Marche
Docente: DOTT. CHIARA BRAMBILLA

Definizione di campo. Definizione di spazio vettoriale su un campo K. Esempi di spazi vettoriali: R^2, R^n, $R[t]$, lo spazio delle matrici, lo spazio vettoriale nullo, lo spazio delle funzioni a valori reali. Definizione di sottospazio vettoriale. Esempi di sottospazi: le rette per l'origine, i piani per l'origine, i polinomi di grado al massimo d, le matrici a traccia nulla.

Definizione di combinazione lineare. Definizione di sottospazio generato da k vettori: $Span(v_1, ..., v_k)$. Definizione di sistema di generatori. Definizione di vettori linearmente dipendenti e linearmente indipendenti. Definizione di base di uno spazio vettoriale. Esempi di basi: base canonica di R^n, base delle matrici elementari, base dei monomi. Definizione di coordinate rispetto a una base. Teorema delle coordinate. Insiemi massimali di generatori lin. indipendenti e loro caratterizzazione come basi (Teorema 1 e Teorema 2). Esistenza base di uno spazio finitamente generato. Teorema del completamento. Corollari del teorema del completamento. Definizione di dimensione di uno spazio vettoriale. Sottospazi somma e intersezione. Teorema di Grassmann. Somma diretta e sottospazi supplementari. Unicita' della decomposizione rispetto a due sottospazi supplementari. Esistenza (e non unicita') del supplementare.

Richiami sulla teoria delle funzioni: applicazioni iniettive e suriettive. Definizione di applicazione lineare. Esempi: applicazione identita', applicazione nulla, traccia di una matrice quadrata, trasposta di una matrice, derivata di un polinomio. Applicazione lineare coordinate $F_{\mathcal{B}}$. Applicazione lineare L_A associata a una matrice A. Teorema dell'applicazione lineare. Definizione di nucleo e immagine di un'applicazione lineare. Nucleo e immagine sono sottospazi. Criterio di iniettivita' e suriettivita' per un'applicazione lineare. Generatori dell'immagine di un'applicazione lineare. Definizione di rango di una applicazione lineare. Rango di una matrice. Teorema della dimensione. Corollari del teorema della dimensione. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$ (senza dimostrazione)

Sistemi lineari: matrice dei coefficienti e matrice completa Definizione di sistema compatibile e sistema omogeneo. Teorema di struttura per i sistemi lineari Definizione di sottospazio affine. Teorema di Rouche'-Capelli. Matrici e sistemi a scala. Risoluzione all'indietro. Rango e immagine di una matrice a scala. Operazioni elementari del metodo di Gauss. Metodo di Gauss: algoritmo per ridurre a scala una matrice qualsiasi. Teorema riassuntivo sui sistemi. Risoluzione di sistemi tramite la riduzione a scala. Applicazioni del metodo di riduzione a scala: trovare basi di immagine e nucleo di L_A, trovare vettori linearmente indipendenti, completare a una base, trovare basi di somma e intersezione. Equazioni parametriche e cartesiane di sottospazi affini di R^n. Come si passa da equazioni cartesiane a parametriche e viceversa.

Lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari da V a W. Composizione di applicazioni lineari e proprieta'. Definizione di applicazione lineare invertibile (o isomorfismo). Caratterizzazione degli isomorfismi. Definizione di spazi isomorfi. Essere isomorfi e' relazione di equivalenza. L'isomorfismo coordinate tra V e R^n. L'isomorfismo tra lo spazio delle applicazioni lineari tra R^n e R^m e lo spazio delle matrici $m \times n$. Definizione del prodotto righe per colonne. Proprieta' del prodotto righe per colonne. Definizione di matrice invertibile e proprieta' dell'inversa. Caratterizzazione delle matrici invertibili (teorema delle 11 equivalenze). Calcolo dell'inversa di una matrice (tramite riduzione a scala).

Matrice di cambiamento di base: definizione ed esempi. Calcolo della matrice di cambiamento di base tramite una base ausiliaria. Matrice associata ad una applicazione lineare da V in W rispetto a basi fissate. L'isomorfismo tra lo spazio delle applicazioni lineari tra V e W e lo spazio delle matrici $m \times n$. Come cambia la matrice associata ad una applicazione lineare al variare delle basi. Matrici simili. La similitudine e' relazione di equivalenza.

Il determinante di una matrice di ordine 2 e le sue proprieta'. Definizione assiomatica del determinante (senza dimostrazione). Proprieta' del determinante. Sviluppo di Laplace rispetto a una riga o a una colonna. Legame tra determinante e invertibilita' della matrice. Teorema di Binet (senza dimostrazione). Corollari del teorema di Binet. Teorema di Cramer. Teorema degli orlati. (senza dimostrazione) Calcolo della matrice inversa attraverso i determinanti.

Definizione di autovettore, autovalore, spettro, autospazio. L'autospazio e' sottospazio vettoriale. Interpretazione dell'autospazio come nucleo. Endomorfismi e matrici diagonalizzabili e triangolabili. Legame tra diagonalizzabilita' e base di autovettori. Definizione di polinomio caratteristico di un endomorfismo. Il polinomio caratteristico non dipende dalla base. Legame tra polinomio caratteristico e autovalori di T. Criterio necessario per la triangolabilita'. Criterio necessario per la diagonalizzabilita'. Lineare indipendenza di autovettori relativi ad autovalori distinti. Criterio sufficiente per la diagonalizzabilita'. Molteplicita' algebrica e geometrica di un autovalore. Relazione tra molteplicita' algebrica e geometrica di un autovalore. Criterio necessario e sufficiente per la diagonalizzabilita' di un endomorfismo.

Definizione di forma bilineare simmetrica. Definizione di forma degenere e non degenere. Definizione di forma definita positiva (negativa), semidefinita positiva (negativa), indefinita. Esempi di forme bilineari simmetriche. Relazione tra degenericita' e segno di una forma bilineare simmetrica. Matrice associata a una forma bilineare. Come cambia la matrice al variare della base. Matrici congruenti. Proprieta' della matrice che rappresenta la forma bilineare (Teorema 1 e 2). Criterio per lo studio del segno di una forma bilineare simmetrica (Teorema 3) (con cenno di dimostrazione). Regola di Cartesio per calcolare il numero di radici positive, negative e nulle (senza dimostrazione).

Definizione di spazio vettoriale metrico. Definizione e proprieta' della norma. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e disuguaglianza triangolare. Definizione di distanza e angolo. Definizione di vettori ortogonali. Vettori ortogonali sono linearmente indipendenti. Basi ortogonali e ortonormali. Teorema dei coefficienti di Fourier Procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Definizione di proiezione ortogonale. Proprieta' della proiezione ortogonale. Definizione di ortogonale di un sottoinsieme e di supplemento ortogonale di un sottospazio. Relative proprieta'.

Definizione di endomorfismo simmetrico in uno spazio metrico. Definizione di endomorfismo ortogonale in uno spazio metrico. Proprieta' della matrice associata a un endomorfismo simmetrico. Autovettori relativi ad autovalori distinti di un endomorfismo simmetrico sono ortogonali. Lemma 1 (proprieta' degli endomorfismi simmetrici rispetto al sottospazio ortogonale) Definizione e proprieta' del prodotto hermitiano canonico su C^n. Lemma 2 (un endomorfismo simmetrico ammette almeno un autovalore reale). Teorema spettrale. Definizione e proprieta' delle matrici ortogonali. Corollari del teorema spettrale. Criterio necessario e sufficiente per la congruenza di due matrici simmetriche (con cenno di dimostrazione solo del criterio sufficiente).

Geometria affine: sistema di riferimento affine. Equazioni cartesiane e parametriche di: una retta nel piano, una retta nello spazio, un piano nello spazio, un fascio di rette nel piano, una stella di rette nello spazio, una retta per due punti, un piano per tre punti, un fascio di piani per una retta. Posizioni reciproche di: due rette, una retta e un piano, due piani. Cambiamento di coordinate affini. Orientazione di un sistema di riferimento.

Geometria euclidea: sistema di riferimento cartesiano e cambiamento di coordinate cartesiane. Versore direttore di una retta. Angolo tra rette orientate, proiezione ortogonale di un punto su una retta. Versore normale di un piano. Angolo tra piani orientati, proiezione ortogonale di un punto su un piano. Angolo tra retta e piano. Prodotto vettore in R^3: definizione e proprieta'. Prodotto misto in R^3. Distanza tra un punto e una retta e tra un punto e un piano. Distanze tra due rette sghembe.

Coniche nel piano. Ellisse, iperbole e parabola: definizione come luoghi geometrici ed equazione. Equazione matriciale di una conica. Forme canoniche metriche e affini delle coniche nel piano. Classificazione di una conica. Coordinate del centro di una conica a centro. Equazione della retta tangente a una conica. Algoritmo di riduzione a forma canonica metrica. Quadriche nello spazio: equazione matriciale. Quadriche non degeneri: sfera, ellissoide, iperboloidi, paraboloidi. Quadriche degeneri: cono, cilindri, coppie di piani. Forme canoniche affini delle quadriche. Classificazione delle quadriche. Piano tangente a una quadrica. Classificazione delle quadriche degeneri.