Scritto di Geometria. Anno Accademico 2011–2012. 5 Luglio 2012

Cognome:______________ Nome:______________ Matricola:_________ Immatricolato nel _______

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su ogni foglio che consegnerai devi scrivere nome e cognome. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio). Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma su fogli protocollo a quadretti. Deve essere ben chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se **più di una** *risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere* **giustificate:** *non basta rispondere "Si" o "No".*

Poni a uguale alla penultima cifra del tuo numero di matricola: $a =$_____

1. E' vero che se un endomorfismo ha polinomio caratteristico $p(\lambda) = -(\lambda-3)^2(\lambda-2)$, allora non è mai diagonalizzabile?

2. Dati i vettori $a+2, (a+3)t^2, 1-t^2, 2t^2-2$ di $\mathbb{R}_2[t]$, stabilire se sono linearmente indipendenti, se sono generatori di $\mathbb{R}_2[t]$, se sono una base di $\mathbb{R}_2[t]$.

3. Esiste una forma bilineare simmetrica non degenere su $\mathbb{R}^3$ tale che $\langle e_1, e_1\rangle = 0$, $\langle e_2, e_2\rangle = 10-a$, $\langle e_2, e_3\rangle = 1$?

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvili nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Data l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}^3$, tale che $T(p(t)) = \begin{pmatrix} p(-1) \\ p'(0) \\ p(1) \end{pmatrix}$

(i) scrivi la matrice associata a T, rispetto a basi a tua scelta;

(ii) calcola dimensione e base di $\operatorname{Ker} T$ e $\operatorname{Im} T$;

(iii) stabilisci se T è iniettiva, suriettiva, invertibile.

(iv) Dato il sottospazio $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0 \right\}$, calcola la dimensione di U e verifica che $U = \operatorname{Im} T$.

B. Al variare dei parametri $k, h \in \mathbb{R}$ discuti la compatibilità del seguente sistema e, quando è possibile, trovane le soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 + (a+1)x_2 + kx_3 = k \\ -x_1 - (a+1)x_2 - 3x_3 + hx_4 = -k \\ -x_1 - (a+1)x_2 - kx_3 + hx_4 = a \end{cases}$$

C. Dato il sottospazio $W = \{x \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0, \ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$,

(i) trova una base di W e una base ortonormale di W;

(ii) trova una base di $W^\perp$.

(iii) Stabilisci per ciascuno dei seguenti vettori se appartiene a W, a $W^\perp$ o a nessuno dei due sottospazi: $v_1 = (1,5,-6,7)$, $v_2 = (1,2,2,-3)$, $v_3 = (6-a, 7, 8+a, 1+a)$.

(iv) Calcolare le proiezioni $P_W(v_1)$, $P_W(v_2)$, $P_W(v_3)$.
Verificare la coerenza con quanto trovato al punto precedente.

Corso di laurea Ingegneria: ______________________________