Scritto di Geometria. Anno Accademico 2009–2010. 8 Luglio 2010

Cognome:______________ Nome:______________ Matricola:_________ Immatricolato nel _______

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su **ogni** *foglio che consegnerai devi scrivere nome, cognome e numero di matricola. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio).*

Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma su fogli protocollo a quadretti. Dev'essere **ben** *chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.*

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se **più di una** *risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere* **giustificate:** *non basta rispondere "Si" o "No". Se ritieni che l'affermazione proposta sia sempre vera (o sempre falsa), devi spiegare perché; se invece pensi sia talvolta falsa (o talvolta vera), devi indicare un esempio concreto in cui lo è.*

Poni a uguale all'ultima cifra del tuo numero di matricola: $a =$____

1. Esistono applicazioni lineari iniettive da $\mathbb{R}_9[t]$ in $M_{a,2}(\mathbb{R})$?

2. Esistono $h, k \in \mathbb{R}$ tali che $\left\{ \begin{pmatrix} -k \\ a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k+1 \\ h \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$?

3. Esistono matrici quadrate A tali che A e A^T siano congruenti?

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvili nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ studia il seguente sistema lineare e, quando possibile, determinane le soluzioni:

$$\begin{cases} x + ky + z + 3w = 5 \\ x + (k+2)y + (k+1)z + 5w = k + a \\ 2x + 2(k-1)y + 7z + 2w = 12 - k \\ 2x + 2z + (6-2k)w = 20 \end{cases}$$

B. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x - 7y + z \\ (a+3)x + (a+6)y + z \\ (a+3)x + (a-1)y + 8z \end{pmatrix}$.

(i) Scrivi la matrice che rappresenta T rispetto a una base a tua scelta.

(ii) Calcola la dimensione di nucleo e immagine di T e stabilisci se T è iniettiva e/o suriettiva.

(iii) Trova gli autovalori di T.

(iv) Determina se T è diagonalizzabile.

(v) Se T è invertibile, scrivi la matrice che rappresenta l'inversa T^{-1}.

C. Sia $W = \{A \in M_{2,2}(\mathbb{R}) : \mathrm{tr}(A) = 0\}$ l'insieme della matrici a traccia nulla.

(i) Verifica che W è un sottospazio vettoriale di $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

(ii) Calcola la dimensione e una base di W.

(iii) Trova il sottospazio ortogonale $W^\perp$ rispetto al prodotto scalare standard.

(iv) Verifica che $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(M_{2,2}(\mathbb{R}))$.

Corso di laurea Ingegneria: ______________________________