Scritto di Geometria. Anno Accademico 2011–2012. 18 Giugno 2012

Cognome:______________ Nome:______________ Matricola:_________ Immatricolato nel _______

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su ogni foglio che consegnerai devi scrivere nome e cognome. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio). Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma su fogli protocollo a quadretti. Deve essere ben chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se **più di una** *risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere* **giustificate:** *non basta rispondere "Si" o "No".*

Poni a uguale alla ultima cifra del tuo numero di matricola: $a =$_____

1. Esiste un endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che e_1 appartiene sia a $\operatorname{Ker} T$ che a $\operatorname{Im} T$?

2. E' vero che $W = \{p(t) \in \mathbb{R}_2[t] : p'(3) - 3p(0) = 3\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_2[t]$?

3. Per quali valori del parametro k l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+1)x + ky \\ kx + (a+1)y \end{pmatrix}$ è iniettiva?

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvili nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A.

(i) Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ studia il seguente sistema omogeneo, trovandone le soluzioni:

$$\begin{cases} (k-1)x_1 + 2x_2 - 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2(k-1)x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 + (k+5)x_5 = 0 \\ (k-1)x_1 + 2x_2 + kx_4 + (k+5)x_5 = 0 \end{cases}$$

(ii) Sia W_k il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ delle soluzioni del sistema precedente e sia

$$U = \operatorname{Span}\{(1+a)e_1, (10-a)e_2, e_3 - e_4 + e_5\}.$$

Determina, al variare di k, dimensione e base di $U \cap W_k$.

B. Data l'applicazione $\langle\, , \rangle : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$\langle v, w\rangle = v_1w_1 + v_1w_2 + v_2w_1 + 2v_2w_2 + v_3w_3 + (a+1)v_2w_4 + (a+1)v_4w_2 + (a+1)^2v_4w_4$$

(i) Verifica che $\langle\, , \rangle$ è una forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^4$;

(ii) scrivi la matrice S associata a $\langle\, , \rangle$ rispetto a una base a tua scelta;

(iii) stabilisci se $\langle\, , \rangle$ è degenere;

(iv) determina se $\langle\, , \rangle$ è (semi)-definita positiva, negativa o indefinita.

C. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considera la matrice $A_k = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & a+2 \\ 0 & k & k+2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(i) Trova gli autovalori di A_k;

(ii) stabilisci per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile;

(iii) per tutti i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile scrivi una base di autovettori e la matrice diagonale a cui A_k è simile.

(iii) Stabilisci per quali valori di k il vettore e_3 appartiene a $\operatorname{Im} A_k$.

Corso di laurea Ingegneria: ________________________________