Scritto di Geometria (6 crediti). Anno Accademico 2011–2012. 10 Marzo 2012

Cognome:______________ Nome:______________ Matricola:_________ Immatricolato nel _______

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su ogni foglio che consegnerai devi scrivere nome e cognome. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio). Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma su fogli protocollo a quadretti. Dev'essere ben chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se **più di una** *risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere* **giustificate:** *non basta rispondere "Si" o "No".*

Poni a uguale alla ultima cifra del tuo numero di matricola: $a =$____

1. Esiste una matrice simmetrica in $M_{2,2}(\mathbb{R})$ la cui traccia valga 4 e il cui determinante valga $8 + a$?

2. È vero che $1 + (12 - a)t + t^2$ appartiene a $\mathrm{Span}(1 + t^2, -1 + t^2, 1 - t^2, -1 - t^2) \subseteq \mathbb{R}_2[t]$?

3. Se una matrice 3×3 ha determinante nullo è sempre vero che la terza colonna è combinazione lineare delle prime due?

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvili nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Considera i sottospazi vettoriali U e W di $\mathbb{R}^4$ dati rispettivamente da

$$U = \{x \in \mathbb{R}^4 \ : \ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \ x_1 - x_2 + |6 - a|x_3 - x_4 = 0\}, \quad W = \{x \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 0\}.$$

(i) Trova dimensione e basi di U e di W;

(ii) completa la base di U trovata al punto precedente ad una base di $\mathbb{R}^4$;

(iii) esibisci una base di $U + W$ e una di $U \cap W$;

(iv) completa la base di $U \cap W$ trovata al punto precedente ad una base di W.

B. Date le due matrici $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 13 & -2 & 1 \\ -6 & 12 & -6 \\ -7 & -10 & 5 \end{pmatrix}$

(i) Trova gli autovalori di A e di B e stabilisci se le matrici sono diagonalizzabili.

(ii) Trova, se possibile, una base di autovettori di A e una base di autovettori di B. Se non è possibile spiega perché.

(iii) Trova, se possibile, una base ortonormale di autovettori di A e una base ortonormale di autovettori di B. Se non è possibile spiega perché.

(iv) Verifica che ogni autovettore di B è anche autovettore di A, ma che esiste almeno un autovettore di A che non è autovettore di B.

C. Data l'applicazione $\langle \, , \, \rangle : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$\langle v, w \rangle = v_2w_1 + v_1w_2 + v_2w_3 + v_3w_2 + 2v_3w_3 + 3v_4w_4 + (a+2)v_3w_4 + (a+2)v_4w_3$$

(i) Verifica che $\langle \, , \, \rangle$ è una forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^4$;

(ii) scrivi la matrice S associata a $\langle \, , \, \rangle$ rispetto a una base a tua scelta;

(iii) stabilisci se $\langle \, , \, \rangle$ è degenere e determina se è (semi)-definita positiva, negativa o indefinita.

Corso di laurea Ingegneria: __________________ **Scelta turno orale:**__________________