Geometria (6 crediti). Anno Accademico 2011–2012. 21 Febbraio 2012

Cognome:______________ Nome:______________ Matricola:_________ Immatricolato nel _______

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su ogni foglio che consegnerai devi scrivere nome e cognome. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio). Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma su fogli protocollo a quadretti. Dev'essere ben chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se **più di una** *risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere* **giustificate:** *non basta rispondere "Si" o "No".*

Poni a uguale alla penultima cifra del tuo numero di matricola: $a =$_____

1. Il sottoinsieme $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{3}x \leq y \leq 3x \right\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$?

2. Esiste una forma bilineare simmetrica degenere su $\mathbb{R}_2[t]$ tale che $\langle 1, 1\rangle = 1$, $\langle t, t\rangle = 1$, $\langle t^2, t^2\rangle = a+1$?

3. Esiste una matrice antisimmetrica di ordine 2 con determinante uguale a -1?

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvili nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considera la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k+2 & 4 & -k \\ -k & -k & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(i) Trova gli autovalori di A_k;

(ii) stabilisci per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile;

(iii) per i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile scrivi una base di autovettori e la matrice diagonale a cui A_k è simile.

(iv) Trova tutti i valori di k per cui il vettore $(10-a)e_1 - (10-a)e_3$ è autovettore di A_k.

B. Al variare dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$ discuti la compatibilità del sistema e trovane, quando possibile, le soluzioni:

$$\begin{cases} kx + y - 2z = 0 \\ x - y + z + 3w = 4 \\ -kx - y + z + 3w = |5-a| \\ x + ky + 3w = h \end{cases}$$

C. Data l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}^2$ definita da $T(p(t)) = \begin{pmatrix} p'(1) \\ p''(-1) \end{pmatrix}$:

(i) Scrivi la matrice associata a T rispetto a basi a tua scelta.

(ii) Verifica che T è suriettiva e trova dimensione e base di $U = \ker T$.

(iii) Dato il sottospazio $W = \mathrm{Span}\left(1 + (a+1)t, 1 + (a+1)t + t^2, t^2 + t^3\right)$ di $\mathbb{R}_3[t]$, calcola la dimensione e trova una base di W. Completa poi la base di W a una base di $\mathbb{R}_3[t]$.

(iv) Calcola la dimensione e trova una base di $U + W$ e di $U \cap W$.

Corso di laurea Ingegneria: __________________