

Cognome: _____ Nome: _____ Matricola: _____ Immatricolato nel _____

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su ogni foglio che consegnerai devi scrivere nome e cognome. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio). Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma su fogli protocollo a quadretti. Dev'essere ben chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.

*Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se **più di una** risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere **giustificate**: non basta rispondere "Sì" o "No".*

Poni a uguale all'ultima cifra del tuo numero di matricola: $a =$ _____

1. Esiste una matrice $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ con $\det(A) = |5 - a|$ e $\text{tr}(A) = a$?
2. È vero che la matrice associata a un'applicazione lineare $T : M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{3,3}(\mathbb{R})$ è quadrata?
3. Esiste un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\dim \text{Ker } T = \dim \text{Im } T$?

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvi nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Data l'applicazione $\langle , \rangle : \mathbb{R}_3[t] \times \mathbb{R}_3[t] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$\langle p(t), q(t) \rangle = -p'(0)q(1) - q'(0)p(1) + \frac{1}{2}p''(1)q''(1)$$

- (i) Verifica che $\langle , \rangle$ è una forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}_3[t]$;
- (ii) scrivi la matrice S associata a $\langle , \rangle$ rispetto a una base a tua scelta;
- (iii) stabilisci se $\langle , \rangle$ è degenere e determina se è (semi)-definita positiva, negativa o indefinita;
- (iv) stabilisci se S è congruente alla matrice diagonale i cui termini sulla diagonale sono $a + 1, -5, 0, 11$.

B. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considera la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2k & 0 & k-1 \\ 2a+1 & -1 & 1 \\ 1-k & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- (i) Trova gli autovalori di A_k ;
- (ii) stabilisci per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile;
- (iii) per i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile scrivi una base di autovettori e la matrice diagonale a cui A_k è simile.
- (iv) Trova, se ce ne sono, tutti i valori di k per cui A_k non è invertibile.
- (v) Per i valori di k trovati al punto precedente trova la dimensione e una base di $\text{Im } A_k \subseteq \mathbb{R}^3$.

C. Dato il sottospazio $U = \{x + y + 2z = 0, z - w = 0\}$ di $\mathbb{R}^4$:

- (i) Trova una base ortonormale di U .
- (ii) Calcola $P_U(e_1 + e_3 + (9 - a)e_4)$, dove P_U è la proiezione ortogonale su U e $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.
- (iii) Trova una base ortonormale del supplemento ortogonale $U^\perp$.
- (iv) Scrivi la matrice associata a P_U rispetto a una base a tua scelta.