Scritto di Geometria. Anno Accademico 2009–2010. 22 Gennaio 2010

Cognome:______________ Nome:______________ Matricola:_________ Immatricolato nel _______

ISTRUZIONI: Prima di tutto, su **ogni** *foglio che consegnerai devi scrivere nome, cognome e numero di matricola. Devi riconsegnare anche il testo dell'esame (cioè questo foglio).*

Le soluzioni degli esercizi non vanno scritte qui, ma su fogli protocollo a quadretti. Dev'essere **ben** *chiaro dove comincia e dove finisce la soluzione di ciascun esercizio; se possibile, evita di consegnare la brutta copia.*

Le prime tre domande qui di seguito sono un filtro: se **più di una** *risposta è sbagliata, lo scritto è considerato insufficiente (due risposte mezze giuste contano quanto una risposta interamente giusta). Le risposte devono essere* **giustificate:** *non basta rispondere "Si" o "No". Se ritieni che l'affermazione proposta sia sempre vera (o sempre falsa), devi spiegare perchè; se invece pensi sia talvolta falsa (o talvolta vera), devi indicare un esempio concreto in cui lo è.*

Indica con a l'ultima cifra del tuo numero di matricola.

1. È sempre vero che $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$?

2. Al variare dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$, stabilisci se il sistema $\begin{cases} x+y+z=1, \\ hx+hy+hz=k-a \end{cases}$ è compatibile.

3. È possibile completare $t-a, t^2+1$ a una base di $\mathbb{R}_2[t]$?

Il resto dello scritto consiste nei tre esercizi qui di seguito. Leggi attentamente i testi, e poi risolvili nell'ordine che preferisci, scrivendo la soluzione quanto più chiaramente possibile. Buon lavoro!

A. Considera l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}^2$ tale che $T(p(t)) = \begin{pmatrix} p(1) \\ p'(2) \end{pmatrix}$

(i) Calcola la dimensione del nucleo e dell'immagine di T;

(ii) trova una base ortonormale di $V = \operatorname{Ker} T$, rispetto al prodotto scalare standard su $\mathbb{R}_3[t]$;

(iii) trova equazioni cartesiane e parametriche dello spazio $V^\perp$;

(iv) scrivi la matrice associata alla proiezione ortogonale $P_V : \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}_3[t]$ rispetto ad una base di $\mathbb{R}_3[t]$ a tua scelta.

B. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considera la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1+a-k & a+4 & a-k-1 \\ 0 & k-a & 0 \\ a-k-1 & 3 & 1+a-k \end{pmatrix}$$

(i) Trova gli autovalori di A_k;

(ii) stabilisci per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile;

(iii) per i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile trovane una base di autovettori.

C. Data l'applicazione $\langle\, ,\, \rangle : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$\langle v, w\rangle = 2v_1w_1 - v_1w_2 - v_2w_1 - v_1w_3 - v_3w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 + (a+1)v_4w_4$$

(i) Dimostra che $\langle\, ,\, \rangle : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$;

(ii) scrivi la matrice associata a tale prodotto scalare rispetto a una base a tua scelta;

(iii) stabilisci se è degenere;

(iv) determina se è (semi)-definito positivo, negativo o indefinito.

Corso di laurea Ingegneria: __________________ **Scelta turno orale:**__________________