Soluzione della prova scritta di Analisi Matematica II del 15 Aprile 2009 (Ingegneria Edile e Architettura)

1. Calcolare $J = \displaystyle\int_\gamma \frac{x}{1+y^2}\,ds$ **essendo** γ **la curva ottenuta intersecando il cilindro di equazione** $x^2+y^2=4$ **con il piano di equazione** $x+z=3$**.**

Una possibile parametrizzazione di γ è

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = 3 - 2\cos t \end{cases}$$

con $-\pi \le t \le \pi$, da cui si ottiene:

$$ds = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}dt = 2\sqrt{1+\sin^2 t}dt$$

Si ha quindi

$$\int_\gamma \frac{x}{1+y^2}\,ds = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{4\cos t}{1+4\sin^2 t}\sqrt{1+\sin^2 t}\,dt = 4\int_0^0 \frac{\sqrt{1+\theta^2}}{1+4\theta^2}d\theta = 0$$

avendo posto $\theta = \sin t$. Alternativamente, ponendo $t = \frac{\pi}{2} - \tau$ si ottiene:[1]

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{4\cos t}{1+4\sin^2 t}\sqrt{1+\sin^2 t}\,dt = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \frac{4\sin\tau}{1+4\cos^2\tau}\sqrt{1+\cos^2\tau}\,d\tau$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{4\sin\tau}{1+4\cos^2\tau}\sqrt{1+\cos^2\tau}\,d\tau = 0$$

la seconda eguaglianza derivando dalla periodicità (periodo 2π uguale all'ampiezza dell'intervallo di integrazione) e l'ultima dalla disparità della funzione integranda.

[1] In pratica è come considerare la parametrizzazione di γ:

$$\begin{cases} x = 2\sin\tau \\ y = 2\cos\tau \\ z = 3 - 2\sin\tau \end{cases}$$

2. Determinare, se esistono, massimi e minimi assoluti della funzione $f(x,y,z) = x^2 + 6yz$ nel dominio $\Omega = \{(x,y,z) \mid \frac{9}{2}z \le x^2 + y^2 \le 1 - 9z^2\}$.

Dato che $f(x,y,z)$ è continua e Ω è chiuso e limitato (chiuso nell'ellissoide $x^2 + y^2 + 9z^2 \le 1$), f ammette certamente max e min. Inoltre, essendo $\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 6z \\ 6y \end{pmatrix}$, si ha $\nabla f = 0$ se e solo se $x = y = z = 0$ che però non è un punto interno ad Ω. Ricerchiamo max e min sula frontiera. Scriviamo:

$$\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Gamma$$

dove

$$\begin{aligned} &\Sigma_1 = \{2x^2 + 2y^2 - 9z = 0 \mid x^2 + y^2 + 9z^2 < 1\} \\ &\Sigma_2 = \{x^2 + y^2 + 9z^2 - 1 = 0 \mid 9z - 2x^2 - 2y^2 < 0\} \\ &\Gamma = \{x^2 + y^2 + 9z^2 - 1 = 0 \mid 2x^2 + 2y^2 - 9z = 0\} \end{aligned}$$

2a. *Ricerca di* max*,* min *su* Σ_1. Utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.[2] Si osservi che il vincolo di equazione $2x^2 + 2y^2 - 9z = 0$ è regolare. La Lagrangiana è

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = x^2 + 6yz - \lambda(2x^2 + 2y^2 - 9z)$$

Si ha:

$$\nabla\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = \begin{pmatrix} 2x - 4\lambda x \\ 6z - 4\lambda y \\ 6y + 9\lambda \\ 2x^2 + 2y^2 - 9z \end{pmatrix}$$

e quindi $\nabla\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = 0$ se e solo se (x,y,z,λ) soddisfano il sistema:

$$\begin{cases} x(1-2\lambda) = 0 \\ 3z - 2\lambda y = 0 \\ 2y = -3\lambda \\ 2x^2 + 2y^2 - 9z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(1-2\lambda) = 0 \\ z = -\lambda^2 \\ 2y = -3\lambda \\ 4x^2 + 9\lambda^2 + 18\lambda^2 = 0 \end{cases}$$

che ha la sola soluzione:

$$x = 0 \quad \lambda = 0 \quad z = 0 \quad y = 0.$$

Dato che $O = (0,0,0)$ soddisfa $x^2 + y^2 + 9z^2 < 1$, il punto è accettabile e si ha

$$f(0,0,0) = 0.$$

2b. *Ricerca di* max*,* min *su* Σ_2. Questa volta sostituiamo $x^2 = 1 - y^2 - 9z^2$ nell'espressione di $f(x,y,z)$ e ricerchiamo massimi e minimi della funzione[3]

$$F_2(y,z) = 1 - y^2 - 9z^2 + 6yz$$

[2] Ovviamente si potrebbe anche studiare max, min della funzione $F_1(x,y) = x^2 + \frac{4}{3}y(x^2+y^2)$ ottenuta sostituendo $z = \frac{2}{9}(x^2+y^2)$ in $f(x,y,z)$.

[3] Anche questa volta si potrebbe utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange dato che l'ellissoide $x^2 + y^2 + 9z^2 - 1 = 0$ è un vincolo regolare.

imponendo la condizione $\nabla F_2(y,z)=0$. Osserviamo però che l'equazione $x^2 = 1-y^2-9z^2$ definisce *due* superfici ossia: $S_1 = \{x = \sqrt{1-y^2-9z^2}\}$ e $S_2 = \{x = -\sqrt{1-y^2-9z^2}\}$ entrambe definite per $y^2+9z^2 \leq 1$ e i punti di ognuna di queste due superfici che soddisfano $y^2+9z^2=1$ non sono interni al loro dominio di definizione (e in questi punti le funzioni non sono differenziabili). Pertanto questi punti vanno trattati separatamente. Consideriamo, per ora i punti che soddisfano $y^2+9z^2<1$.

La condizione $\nabla F_2(y,z)=0$ si scrive:

$$\begin{cases} -y+3z=0 \\ -3z+y=0 \end{cases}$$

ossia $\nabla F_2(y,z)=0$ lungo la retta $y=3z$. Posto $\gamma = \{(x,y,z) \mid y=3z, x^2+y^2+9z^2=1\} = \{(x,y,z) \mid y=3z, x^2+2y^2=1\}$, si ha

$$f(x,y,z)_{|\gamma} = x^2+6yz = x^2+2y^2 = 1$$

Quindi $f(x,y,z)$ è costante lungo la curva γ (contenuta nell'ellissoide di equazione $x^2+y^2+9y^2=1$. Tuttavia di γ bisogna considerare solo i punti che soddisfano la disequazione $9z<2x^2+2y^2$ ossia bisogna verificare che il sistema misto:

$$\begin{cases} y=3z \\ x^2+2y^2=1 \\ 9z<2x^2+2y^2 \end{cases}$$

ammetta soluzioni. Ora si ha:

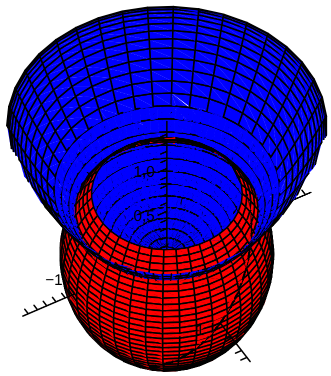
$$\begin{cases} y=3z \\ x^2+2y^2=1 \\ 9z<2x^2+2y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} y=3z \\ x^2=1-2y^2 \\ 3y<2-2y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} y=3z \\ x^2=1-2y^2 \\ -2<y<\frac{1}{2} \end{cases}$$

ossia (perché?):

$$\begin{cases} y=3z \\ x^2+2y^2=1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq y < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Su tutti i punti di questa porzione di γ si ha

$$f(x,y,z)=1.$$



In figura l'ellissoide è disegnato in rosso, il paraboloide in blu e la linea nera che taglia trasversalmente meridiani e paralleli è la curva γ. Per semplicità si è scalata la z sostituendola con $\frac{z}{3}$ ossia si sono disegnate la sfera $x^2+y^2+z^2=1$, il paraboloide $3z = 2(x^2+y^2)$ e la curva $\gamma = \{y = z, \quad x^2+y^2+z^2 = 1\}$.

Consideriamo ora i punti del vincolo che soddisfano l'equazione $y^2+9z^2 = 1$. In tutti questi punti si ha $x = 0$ e $f(0, y, z) = 6yz$. Applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange[4] si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} 6z + 2\mu y = 0 \\ 6y - 18\mu z = 0 \\ y^2 + 9z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3z + \mu y = 0 \\ y - 3\mu z = 0 \\ y^2 + 9z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+\mu^2)z = 0 \\ y = 3\mu z \\ y^2 + 9z^2 = 1 \end{cases}$$

che fornisce la soluzione $y = z = 0$. Otteniamo quindi il punto $(0, 0, 0)$ che non soddisfa la disequazione $9z < 2x^2 + 2y^2$ e pertanto non va considerato.

2c. *Ricerca di* max*,* min *su* Γ. Cerchiamo una parametrizzazione di Γ risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 9z \\ x^2 + y^2 = 1 - 9z^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 18z^2 + 9z - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 - 9z^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z = \frac{-9 \pm \sqrt{81+144}}{36} = -\frac{2}{3}, \frac{1}{6} \\ x^2 + y^2 = 1 - 9z^2 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{3}{4} \\ z = \frac{1}{6} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t \\ z = \frac{1}{6} \end{cases}$$

[4] tanto valeva applicarlo prima!!!

Sostituendo nell'espressione di $f(x,y,z)$ si ottiene la funzione

$$u(t) := f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t, \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t, \frac{1}{6}\right) = \frac{3}{4}\cos^2 t + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t.$$

Derivando rispetto a t si ottiene:

$$u'(t) = -\frac{3}{2}\sin t\cos t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t(1-\sqrt{3}\sin t)$$

che si annulla quando

$$\cos t = 0 \quad \text{oppure} \quad \sin t = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Nel primo caso si ha $\sin t = \pm 1$ e si ottengono i punti:

$$P_\pm = \left(0,\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{6}\right)$$

nel secondo si ha $\cos t = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ e si ottengono i punti:

$$Q_\pm = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{6}\right)$$

Si ha:

$$f\left(0,\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{6}\right) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

e

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

(si osservi che $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{6}\right) \in \gamma$ e soddisfa la condizione $2x^2 + 2y^2 = 9z$).

In conclusione: $\max_\Omega f(x,y,z) = 1$ e viene assunto nella porzione di γ contenuta nel dominio $9z \le 2x^2 + 2y^2$, mentre $\min_\Omega f(x,y,z) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e viene assunto in $P_- = \left(0,\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{6}\right)$.

3. Calcolare $\iint_\Omega (x+y)\,dxdy$, dove $\Omega = \{(x,y) \mid 1 \le xy \le 2,\ \frac{x}{2} \le y \le 2x,\ x > 0\}$.

Per ogni $(x,y) \in \Omega$ poniamo

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}$$

ossia:

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{u}{v}} \\ y = \sqrt{uv} \end{cases}$$

con $(u,v) \in [1,2] \times \left[\frac{1}{2}, 2\right]$. Osserviamo che la trasformazione $\Phi : [1,2] \times \left[\frac{1}{2}, 2\right] \to \Omega$, $\Phi(u,v) = \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right)$ è invertibile. Infatti è chiaramente suriettiva e se $(x', y') = \Phi(u', v') = (x'', y'') = \Phi(u'', v'')$ deve essere

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{u'}{v'}} = \sqrt{\frac{u''}{v''}} \\ \sqrt{u'v'} = \sqrt{u''v''} \end{cases}$$

e quindi moltiplicando (dividendo) le due equazioni:

$$\begin{aligned} u' &= \sqrt{\frac{u'}{v'}}\sqrt{u'v'} = \sqrt{\frac{u''}{v''}}\sqrt{u''v''} = u'' \\ v' &= \frac{u'}{v'\sqrt{u'v'}} = \frac{u''}{v''\sqrt{u''v''}} = u'' \end{aligned}$$

ossia $(u', v') = (u'', v'')$. La matrice Jacobiana della trasformazione è

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2v}\sqrt{\frac{u}{v}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{pmatrix}$$

il cui determinante è $\det J = \frac{1}{2v} > 0$ in $[1,2] \times \left[\frac{1}{2}, 2\right]$. Otteniamo quindi:

$$\begin{aligned} &\iint_\Omega (x+y)\,dxdy = \frac{1}{2}\int_1^2 u^{1/2} \left[\int_{1/2}^2 (v^{-3/2} + v^{-1/2} dv\right] du \\ &= \frac{1}{2}\frac{2}{3}\left[u^{3/2}\right]_1^2 \left(\left[-2v^{-1/2} + 2v^{1/2}\right]_{1/2}^2\right) = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)\left(4\sqrt{2} - \frac{4}{\sqrt{2}}\right) = \\ &= \frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1)\left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{4}{3}\left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{3}(4-\sqrt{2}). \end{aligned}$$

4. Risolvere le equazioni differenziali

a) $y' = \dfrac{2y^3 - xy^2 + 2x^2y - x^3}{x(x^2+y^2)}$ **(equazione di Manfredi);**

b) $y' + y\log x = x\log x + 1$ **(per** $x > 0$**).**

4a. Si ha:

$$y' = \frac{2y^3 - xy^2 + 2x^2y - x^3}{x(x^2+y^2)} = \frac{2y(x^2+y^2) - x(x^2+y^2)}{x(x^2+y^2)} = 2\frac{y}{x} - 1$$

Posto $y = xz$ si ottiene:

$$z + xz' = 2z - 1 \iff xz' = z - 1 \iff \frac{dz}{z-1} = \frac{dx}{x}$$

e quindi (per qualche $c > 0$):

$$\log|z-1| = \log c|x| \iff |z-1| = k|x| \iff z = 1 \pm kx$$

e quindi

$$y(x) = x(1 + kx), \quad k \in \mathbb{R}$$

(si noti che la soluzione $y(x) = x$ corrisponde all'integrale $z = 1$).

4b. Si ha

$$\int \log x dx = x \log x - \int dx = x(\log x - 1) + k$$

e quindi:

$$y(x) = e^{-x(\log x - 1)} \left\{ c + \int e^{x(\log x - 1)}(x \log x + 1) dx \right\}.$$

Ma:

$$\int e^{x(\log x - 1)} x \log x dx = \int x \frac{d}{dx} e^{x(\log x - 1)} dx = x e^{x(\log x - 1)} - \int e^{x(\log x - 1)} dx$$

e quindi:

$$y(x) = e^{-x(\log x - 1)} \left\{ c + x e^{x(\log x - 1)} \right\} = c e^{-x(\log x - 1)} + x.$$