Soluzione della prova scritta di Analisi Matematica II dell'11 Febbraio 2009 (Ingegneria Edile e Architettura)

1. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la porzione di superficie di equazione $z = x^2 + y^2$ e contenuta nel paraboloide $z \leq 6 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Calcolare $\iint_S z\, d\sigma$.

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z \leq 6 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \end{cases} \iff \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z \leq 6 - \frac{1}{2}z \end{cases} \iff \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z \leq 4 \end{cases}$$

si ottiene:

$$S = \{(x, y, z) \mid x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = r^2,\ 0 \leq r \leq 2,\ -\pi \leq \theta \leq \pi\}$$

Posto $\varphi(r, \theta) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ r^2)$ si ha

$$\varphi_r(r, \theta) \wedge \varphi_\theta(r, \theta) = (-2r^2\cos\theta)\vec{\imath} - (2r^2\sin\theta)\vec{\jmath} + r\vec{k}$$

e quindi:

$$\iint_S z d\sigma = \int_0^2 \left[\int_{-\pi}^{\pi} r^3\sqrt{1 + 4r^2} d\theta\right] dr = 2\pi \int_0^2 r^3\sqrt{1 + 4r^2} dr$$

Posto $\sqrt{1 + 4r^2} = t$ si ha $r^2 = \frac{t^2 - 1}{4}$ e $4rdr = tdt$. Pertanto:

$$\iint_S z d\sigma = \frac{\pi}{8}\int_1^{\sqrt{17}} (t^2 - 1)t^2 dt = \frac{\pi}{8}\left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right]_1^{\sqrt{17}} = \frac{\pi}{8}\left(\frac{782}{15}\sqrt{17} + \frac{2}{15}\right)$$
$$= \frac{\pi}{60}\left(391\sqrt{17} + 1\right)$$

2. Determinare massimi e minimi assoluti della funzione $f(x, y, z) = xy + 4z$ nella regione limitata $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ definita da $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 3, \quad 2z \geq x^2 + y^2\}$.

Dato che $f(x, y, z)$ è continua e Ω è chiuso e limitato (chiuso nella sfera di centro l'origine e raggio $\sqrt{3}$), f ammette certamente max e min. Inoltre, essendo

$\nabla f = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 4 \end{pmatrix}$, non esistono max, min interni. Ricerchiamo max e min sula frontiera. Scriviamo:

$$\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Gamma$$

dove

$$\begin{array}{l} \Sigma_1 = \{x^2+y^2+z^2 = 3 \mid 2z > x^2+y^2\} \\ \Sigma_2 = \{2z = x^2+y^2 \mid x^2+y^2+z^2 < 3\} \\ \Gamma = \{2z = x^2+y^2 \mid x^2+y^2+z^2 = 3\} \end{array}$$

2a. *Ricerca di* max*,* min *su* Σ_1. Parametrizziamo la sfera $x^2+y^2+z^2 = 3$ nel modo seguente:[1]

$$\begin{array}{l} x = \sqrt{3}\cos\theta\cos\varphi \\ y = \sqrt{3}\sin\theta\cos\varphi \\ z = \sqrt{3}\sin\varphi \end{array}$$

con $-\pi \le \theta \le \pi$ e $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Sostituendo nell'espressione di $f(x,y,z)$ otteniamo:

$F_1(\theta,\varphi) = f(\sqrt{3}\cos\theta\cos\varphi, \sqrt{3}\sin\theta\cos\varphi, \sqrt{3}\sin\varphi) = 3\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi + 4\sqrt{3}\sin\varphi.$

Si ha:

$$\nabla F_1(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} 3\cos 2\theta\cos^2\varphi \\ 4\sqrt{3}\cos\varphi - 3\sin 2\theta\sin\varphi\cos\varphi \end{pmatrix}$$

e quindi $\nabla F_1(\theta,\varphi) = 0$ se e solo se (θ,φ) soddisfano il sistema:

$$\begin{cases} \cos 2\theta\cos^2\varphi = 0 \\ (4-\sqrt{3}\sin 2\theta\sin\varphi)\cos\varphi = 0 \end{cases}$$

Dato che $4-\sqrt{3}\sin 2\theta\sin\varphi \ge 4-\sqrt{3} > 0$ le uniche soluzioni del sistema sono $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ e θ qualsiasi che corrispondono ai punti:

$$P_+ = (0,0,\sqrt{3}) \quad P_- = (0,0,-\sqrt{3})$$

dei quali però soltanto P_+ soddisfa la condizione $2z > x^2+y^2$. Si ha

$$f(0,0,\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}.$$

2b. *Ricerca di* max*,* min *su* Σ_2. Questa volta utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.[2] Dato che $\nabla[x^2+y^2-2z] = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2 \end{pmatrix}$ il vincolo è regolare.

[1] Altre parametrizzazioni sono possibili. Ad esempio si può scrivere $z = \sqrt{3-x^2-y^2}$ (ma non $z = -\sqrt{3-x^2-y^2}$, perché?). Oppure su può usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Si osservi che il vincolo $x^2+y^2+z^2 = 3$ è regolare.

[2] Sarebbe possibile ragionare come nel punto 2a scegliendo, ad esempio, la parametrizzazione (cartesiana)

$$\begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ z = \frac{1}{2}(x^2+y^2) \end{array}$$

La Lagrangiana è:

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = xy + 4z - \lambda(x^2 + y^2 - 2z)$$

e $\nabla\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = 0$ equivale al sistema:

$$\begin{cases} y - 2\lambda x = 0 \\ x - 2\lambda y = 0 \\ 4 + 2\lambda = 0 \\ x^2 + y^2 = 2z \end{cases}$$

da cui si ottiene subito $\lambda = -2$ e

$$\begin{cases} y + 4x = 0 \\ x + 4y = 0 \\ x^2 + y^2 = 2z \end{cases}$$

che ha l'unica soluzione $x = y = z = 0$. Dato che $0^2 + 0^2 + 0^2 < 3$ il punto appartiene a Σ_2 e si ha

$$f(0, 0, 0) = 0.$$

2c. *Ricerca di* max, min *su* Γ. Cerchiamo una parametrizzazione di Γ risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} z^2 + 2z - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

(perché $z = -3$ non va bene?). Una possibile parametrizzazione di Γ è quindi:

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = \sqrt{2}\sin t \\ z = 1 \end{cases}$$

Sostituendo nell'espressione di $f(x, y, z)$ si ottiene

$$u(t) := f(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t, 1) = \sin 2t + 4$$

che ha un max pari a 5 per $t = \frac{\pi}{4} + k\pi$ e un min $= 3$ per $t = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ corrispondenti ai punti:

$$P_1 = (1,\ 1,\ 1) \quad P_2 = (-1,\ -1,\ 1) \quad P_3 = (-1,\ 1,\ 1) \quad P_4 = (1,\ -1,\ 1).$$

Si ha:

$$f(1, 1, 1) = 5, \quad f(-1, -1, 1) = 5, \quad f(-1, 1, 1) = 3, \quad f(1, -1, 1) = 3.$$

In conclusione: $\max_\Omega f(x, y, z) = 4\sqrt{3}$ e viene assunto in $P_+ = (0,\ 0,\ \sqrt{3})$ mentre $\min_\Omega f(x, y, z) = 0$ e viene assunto in $O = (0,\ 0,\ 0)$.

3. Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 2, x^2 + y^2 \leq 5, x \geq 0, y \geq 0\}$**. Calcolare** $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$**.**

Cerchiamo i punti di intersezione dell'iperbole $xy = 2$ con la circonferenza $x^2 + y^2 = 5$ risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} xy = 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} xy = 2 \\ x^2 + y^2 + 2xy = 5 + 4 \end{cases} \iff \begin{cases} xy = 2 \\ (x + y)^2 = 9 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} xy = 2 \\ x + y = \pm 3 \end{cases}$$

Dato che $x > 0$ e $y > 0$ la soluzione $x + y = -3$ non è accettabile. Occorre quindi trovare due numeri (x e y) il cui prodotto sia uguale a 2 e la cui somma sia pari a 3. Questi due numeri soddisfano l'equazione $T^2 - 3T + 2 = 0$, ossia $T = \frac{3\pm1}{2}$. Perciò la circonferenza e l'iperbole si intersecano nei punti $A = (1,\ 2)$ e $B = (2,\ 1)$. Si ha quindi:

$$\iint_D xydxdy = \int_1^2 \left[\int_{2/x}^{\sqrt{5-x^2}} ydy \right] xdx = \int_1^2 \frac{x}{2} \left(5 - x^2 - \frac{4}{x^2} \right) dx$$
$$= \frac{1}{2} \int_1^2 \left(5x - x^3 - \frac{4}{x} \right) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{5}{2} x^2 - \frac{1}{4} x^4 - 4 \log x \right]_1^2 = \frac{15}{8} - \log 4.$$

4. Risolvere le equazioni differenziali

a) $y'(x) - \frac{x+1}{x+2} y(x) = x + 1$ **(per** $x + 2 > 0$**);**

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2+2y^2}$ **(per** $x > 0$**).**

4a. Si ha:

$$\int \frac{x+1}{x+2} dx = \int 1 - \frac{1}{x+2} dx = x - \log(x+2)$$

e quindi, dalla formula di integrazione delle equazioni lineari del primo ordine:

$$\begin{aligned}
&y(x) = e^{x-\log(x+2)} \left\{ c + \int e^{\log(x+2)-x} (x+1) dx \right\} \\
&= \frac{e^x}{x+2} \left\{ c + \int e^{-x} (x^2 + 3x + 2) dx \right\} \\
&= \frac{e^x}{x+2} \left\{ c - e^{-x} (x^2 + 3x + 2) + \int e^{-x} (2x + 3) dx \right\} \\
&= \frac{e^x}{x+2} \left\{ c - e^{-x} (x^2 + 3x + 2 + 2x + 3) + \int 2e^{-x} dx \right\} \\
&= \frac{e^x}{x+2} \left\{ c - e^{-x} (x^2 + 3x + 2 + 2x + 3 + 2) \right\} \\
&= \frac{e^x}{x+2} \left\{ c - e^{-x} (x^2 + 5x + 7) \right\} = \frac{ce^x}{x+2} - \frac{x^2 + 5x + 7}{x+2}
\end{aligned}$$

4b. Posto $y(x) = xz(x)$ si ottiene: $z + xz' = y' = \frac{z}{1+2z^2}$ ossia

$$xz' = -\frac{2z^3}{1+2z^2}$$

e quindi separando le variabili:

$$\left(\frac{1}{2z^3} + \frac{1}{z}\right) dz = -\frac{dx}{x}.$$

Integrando termine a termine si ottiene:

$$-\frac{1}{4z^2} + \log z = -\log x \Longleftrightarrow \log(xz) = \frac{1}{4z^2}$$

e tornando alla variabile y:

$$\log y = \frac{x^2}{4y^2} \Longleftrightarrow 4y^2 \log y = x^2.$$