Il valore assoluto

F. Battelli

Università Politecnica delle Marche, Ancona

Il valore assoluto

Si definisce il valore assoluto di un numero reale x e si indica con $|x|$ l'espressione seguente:

$$|x| = \sqrt{x^2} = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Il valore assoluto

Si definisce il valore assoluto di un numero reale x e si indica con $|x|$ l'espressione seguente:

$$|x| = \sqrt{x^2} = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Ovviamente se $x = 0$ si ha $|x| = 0$ in ogni caso.

Il valore assoluto

Si definisce il valore assoluto di un numero reale x e si indica con $|x|$ l'espressione seguente:

$$|x| = \sqrt{x^2} = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Ovviamente se $x = 0$ si ha $|x| = 0$ in ogni caso. L'equivalenza fra le definizioni si verifica facilmente distinguendo i casi $x > 0$ e $x < 0$ e ricordando che, se a è un numero reale non negativo ($a \geq 0$), con $\sqrt{a}$ si intende la radice quadrata aritmetica ossia, per definizione, il più grande fra i numeri reali il cui quadrato è uguale ad a.

Proprietà del valore assoluto

La funzione $|x|$ ha le seguenti importanti proprietà:

$p_1)$ $|x| \geq x$ e $|x| \geq -x$.

Proprietà del valore assoluto

La funzione $|x|$ ha le seguenti importanti proprietà:

$p_1)$ $|x| \geq x$ e $|x| \geq -x$. Infatti $|x| = \max\{x, -x\}$.

Proprietà del valore assoluto

La funzione $|x|$ ha le seguenti importanti proprietà:

$p_1)$ $|x| \geq x$ e $|x| \geq -x$.

$p_2)$ $|x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$.

Proprietà del valore assoluto

La funzione $|x|$ ha le seguenti importanti proprietà:

$p_1)$ $|x| \geq x$ e $|x| \geq -x$.

$p_2)$ $|x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$. Infatti se $x > 0$ allora $-x < 0$ e quindi $|x| = x > 0$. Se invece $x < 0$ allora $-x > 0$ e quindi $|x| = -x > 0$. Infine, se $x = 0 = -x$ segue $|x| = 0$.

Proprietà del valore assoluto

La funzione $|x|$ ha le seguenti importanti proprietà:

$p_1)$ $|x| \geq x$ e $|x| \geq -x$.

$p_2)$ $|x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$.

$p_3)$ $|-x| = |x|$.

Proprietà del valore assoluto

La funzione $|x|$ ha le seguenti importanti proprietà:

$p_1)$ $|x| \geq x$ e $|x| \geq -x$.

$p_2)$ $|x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$.

$p_3)$ $|-x| = |x|$. Infatti

$$|-x| = \max\{-x, x\} = \max\{x, -x\} = |x|.$$

Proprietà del valore assoluto

La funzione $|x|$ ha le seguenti importanti proprietà:

$p_1)$ $|x| \geq x$ e $|x| \geq -x$.

$p_2)$ $|x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$.

$p_3)$ $|-x| = |x|$.

$p_4)$ $|xy| = |x||y|$.

Proprietà del valore assoluto

La funzione $|x|$ ha le seguenti importanti proprietà:

$p_1)$ $|x| \geq x$ e $|x| \geq -x$.

$p_2)$ $|x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$.

$p_3)$ $|-x| = |x|$.

$p_4)$ $|xy| = |x||y|$. Infatti $|xy| = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x|\,|y|$.

Proprietà del valore assoluto

La funzione $|x|$ ha le seguenti importanti proprietà:

$p_1)$ $|x| \geq x$ e $|x| \geq -x$.

$p_2)$ $|x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$.

$p_3)$ $|-x| = |x|$.

$p_4)$ $|xy| = |x||y|$.

$p_5)$ $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Proprietà del valore assoluto

La funzione $|x|$ ha le seguenti importanti proprietà:

$p_1)$ $|x| \geq x$ e $|x| \geq -x$.

$p_2)$ $|x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$.

$p_3)$ $|-x| = |x|$.

$p_4)$ $|xy| = |x||y|$.

$p_5)$ $|x+y| \leq |x| + |y|$. Infatti

$$|x+y| = \sqrt{(x+y)^2} = \sqrt{x^2+y^2+2xy} \leq$$
$$\sqrt{|x|^2+|y|^2+2|x|\,|y|} \leq \sqrt{(|x|+|y|)^2} = |x|+|y|.$$

Proprietà del valore assoluto

La funzione $|x|$ ha le seguenti importanti proprietà:

$p_1)$ $|x| \geq x$ e $|x| \geq -x$.

$p_2)$ $|x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$.

$p_3)$ $|-x| = |x|$.

$p_4)$ $|xy| = |x||y|$.

$p_5)$ $|x+y| \leq |x| + |y|$. Infatti
$|x+y| = \sqrt{(x+y)^2} = \sqrt{x^2+y^2+2xy} \leq$
$\sqrt{|x|^2+|y|^2+2|x|\,|y|} \leq \sqrt{(|x|+|y|)^2} = |x|+|y|$. Si noti che da $p_4)$ e $p_1)$ si ottiene $x^2 = |x|^2$, $y^2 = |y|^2$ e $xy \leq |x|\,|y|$.

Proprietà del valore assoluto

La funzione $|x|$ ha le seguenti importanti proprietà:

$p_1)$ $|x| \geq x$ e $|x| \geq -x$.

$p_2)$ $|x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$.

$p_3)$ $|-x| = |x|$.

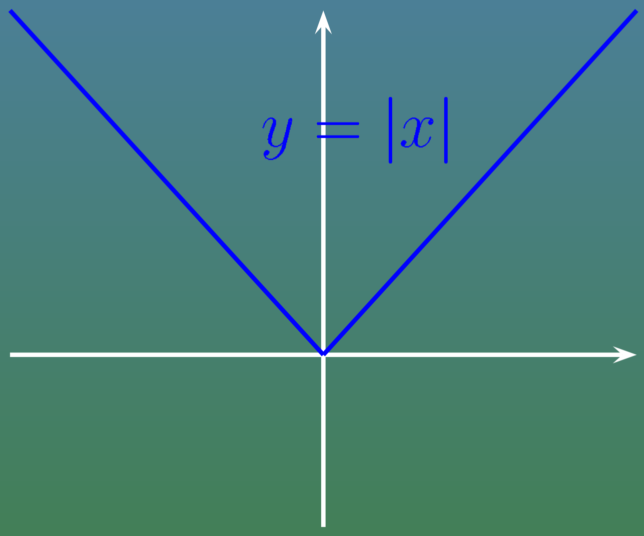
$p_4)$ $|xy| = |x||y|$.

$p_5)$ $|x+y| \leq |x| + |y|$.

Si osservi anche che la disequazione $x \geq -x$ equivale a $x \geq 0$.

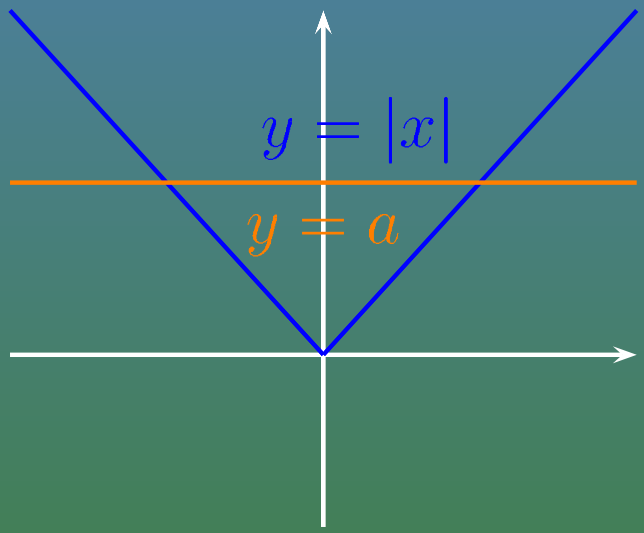
Diseguaglianze col valore assoluto

Cominciamo col disegnare il grafico di $f(x) = |x|$



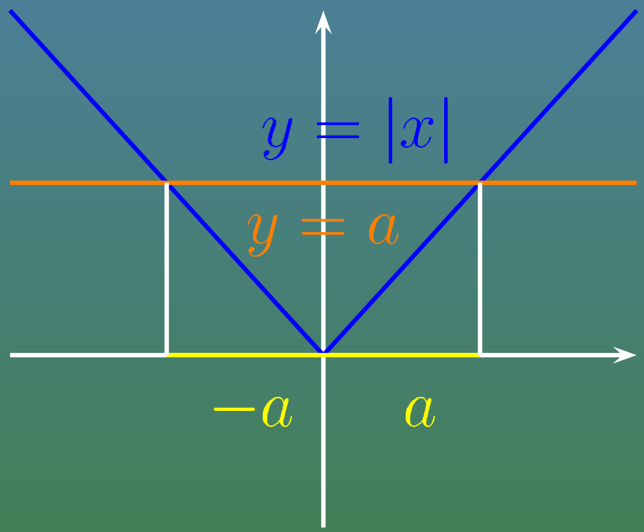
Diseguaglianze col valore assoluto

Cominciamo col disegnare il grafico di $f(x) = |x|$ e confrontiamone il grafico con quello di $y = a > 0$.



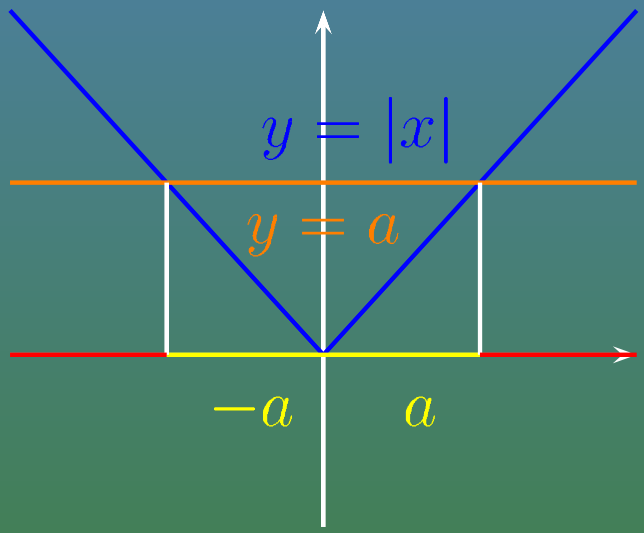
Diseguaglianze col valore assoluto

Cominciamo col disegnare il grafico di $f(x) = |x|$ e confrontiamone il grafico con quello di $y = a > 0$. È semplice convincersi che la disequazione $|x| \leq a$ equivale a $-a \leq x \leq a$,



Diseguaglianze col valore assoluto

Cominciamo col disegnare il grafico di $f(x) = |x|$ e confrontiamone il grafico con quello di $y = a > 0$. È semplice convincersi che la disequazione $|x| \leq a$ equivale a $-a \leq x \leq a$, mentre $|x| \geq a$ equivale a $x \geq a$ oppure $x \leq -a$.



Diseguaglianze col valore assoluto

Ossia, in notazione insiemistica

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq a\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -a \leq x \leq a\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq a\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -a\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}.$$

per ogni $a \geq 0$.

Diseguaglianze col valore assoluto

Ossia, in notazione insiemistica

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq a\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -a \leq x \leq a\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq a\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -a\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}.$$

per ogni $a \geq 0$. Dalla prima uguaglianza si ricava un'altra proprietà del valore assoluto

Diseguaglianze col valore assoluto

Ossia, in notazione insiemistica

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq a\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -a \leq x \leq a\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq a\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -a\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}.$$

per ogni $a \geq 0$. Dalla prima uguaglianza si ricava un'altra proprietà del valore assoluto

$$\big|\, |x| - |y| \,\big| \leq |x - y|.$$

Diseguaglianze col valore assoluto

Ossia, in notazione insiemistica

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq a\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -a \leq x \leq a\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq a\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -a\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}.$$

per ogni $a \geq 0$. Dalla prima uguaglianza si ricava un'altra proprietà del valore assoluto

$$\big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x - y|.$$

Infatti si ha $|x| = |(x-y)+y| \leq |x-y| + |y|$ e, scambiando x con y: $|y| \leq |y-x| + |x| = |x-y| + |x|$.

Diseguaglianze col valore assoluto

Ossia, in notazione insiemistica

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq a\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -a \leq x \leq a\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq a\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -a\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}.$$

per ogni $a \geq 0$. Dalla prima uguaglianza si ricava un'altra proprietà del valore assoluto

$$\big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x - y|.$$

Infatti si ha $|x| = |(x-y)+y| \leq |x-y| + |y|$ e, scambiando x con y: $|y| \leq |y-x| + |x| = |x-y| + |x|$. Quindi $-|x-y| \leq |x| - |y| \leq |x-y|$.

Comporre funzioni col valore assoluto

Se $f(x)$ è una funzione definita in un insieme $D \subseteq \mathbb{R}$ si ha:

$$|f(x)| = \max\{f(x), -f(x)\} = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

Comporre funzioni col valore assoluto

Se $f(x)$ è una funzione definita in un insieme $D \subseteq \mathbb{R}$ si ha:

$$|f(x)| = \max\{f(x), -f(x)\} = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

mentre

$$f(|x|) = f(\max\{x, -x\}) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Comporre funzioni col valore assoluto

Se $f(x)$ è una funzione definita in un insieme $D \subseteq \mathbb{R}$ si ha:

$$|f(x)| = \max\{f(x), -f(x)\} = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

mentre

$$f(|x|) = f(\max\{x, -x\}) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Non c'è quindi alcun motivo per ritenere che $f(|x|)$ sia uguale a $|f(x)|$!

In particolare, mentre $|f(x)|$ è definita nello stesso insieme D di $f(x)$, la funzione $f(|x|)$ ha per dominio $\widetilde{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \in D\} = \{x \geq 0 \mid x \in D\} \cup \{x \leq 0 \mid -x \in D\}$.

In particolare, mentre $|f(x)|$ è definita nello stesso insieme D di $f(x)$, la funzione $f(|x|)$ ha per dominio $\widetilde{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \in D\} = \{x \geq 0 \mid x \in D\} \cup \{x \leq 0 \mid -x \in D\}$. Si osservi anche che

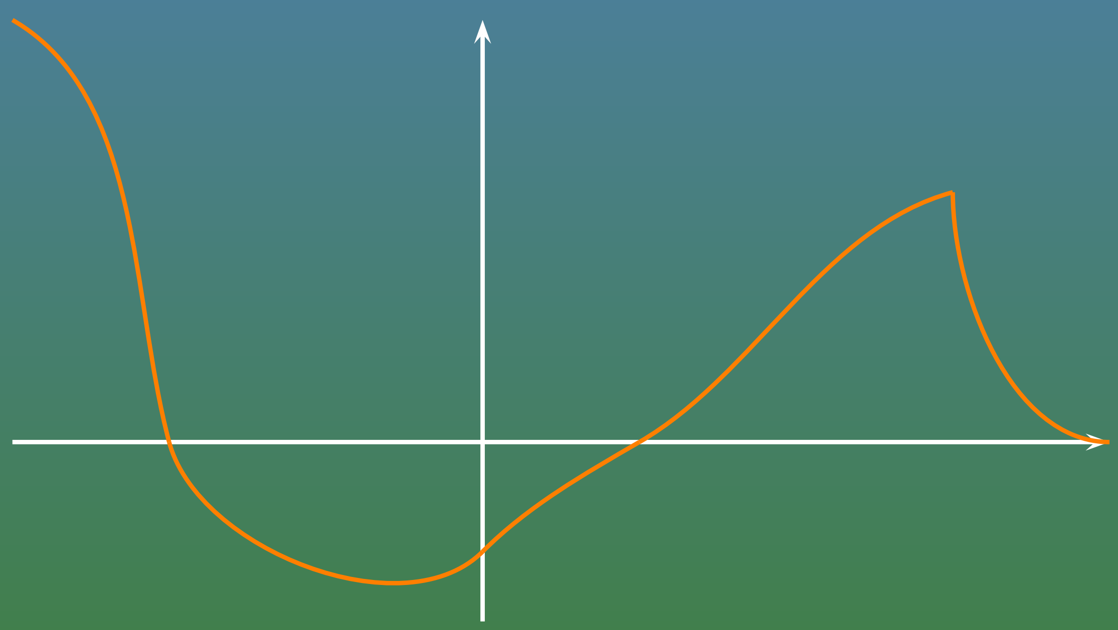
- per calcolare $|f(x)|$ occorre stabilire se $f(x) \geq 0$ o se $f(x) \leq 0$. In altre parole bisogna risolvere in D la disequazione $f(x) \geq 0$
- per calcolare $f(|x|)$ occorre stabilire se $|x| \in D$. In altre parole bisogna risolvere i due sistemi di disequazioni

$$\begin{cases} x \in D \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -x \in D \\ x \leq 0 \end{cases}$$

e prendere l'unione delle soluzioni.

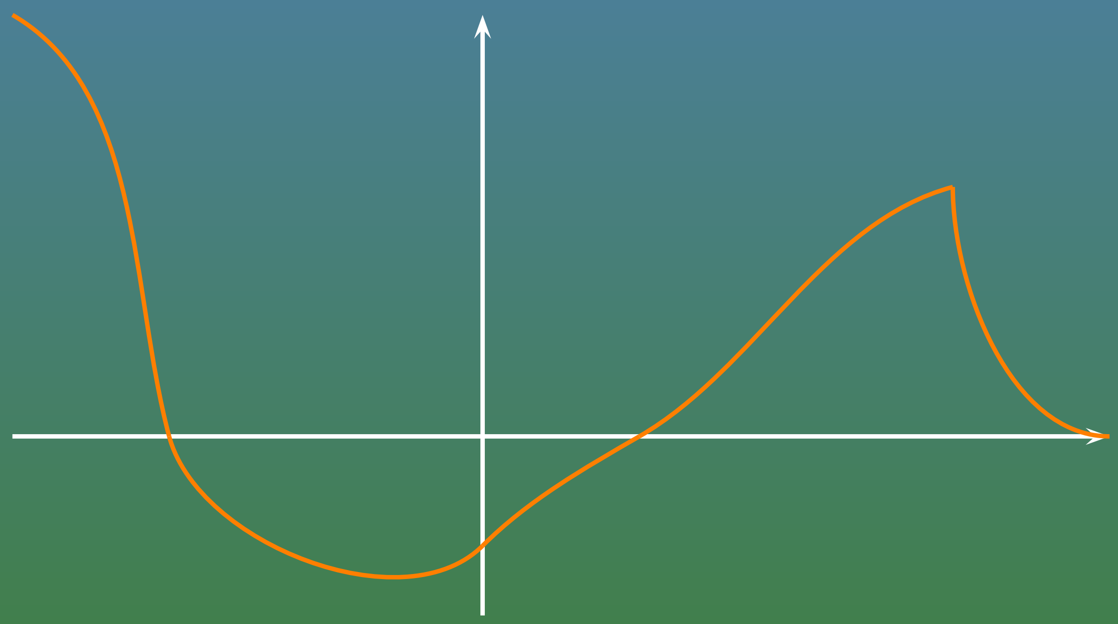
Dal grafico di $f(x)$ a quello di $|f(x)|$

Supponiamo di saper disegnare il grafico della funzione $y = f(x)$ e che questo sia come in figura.



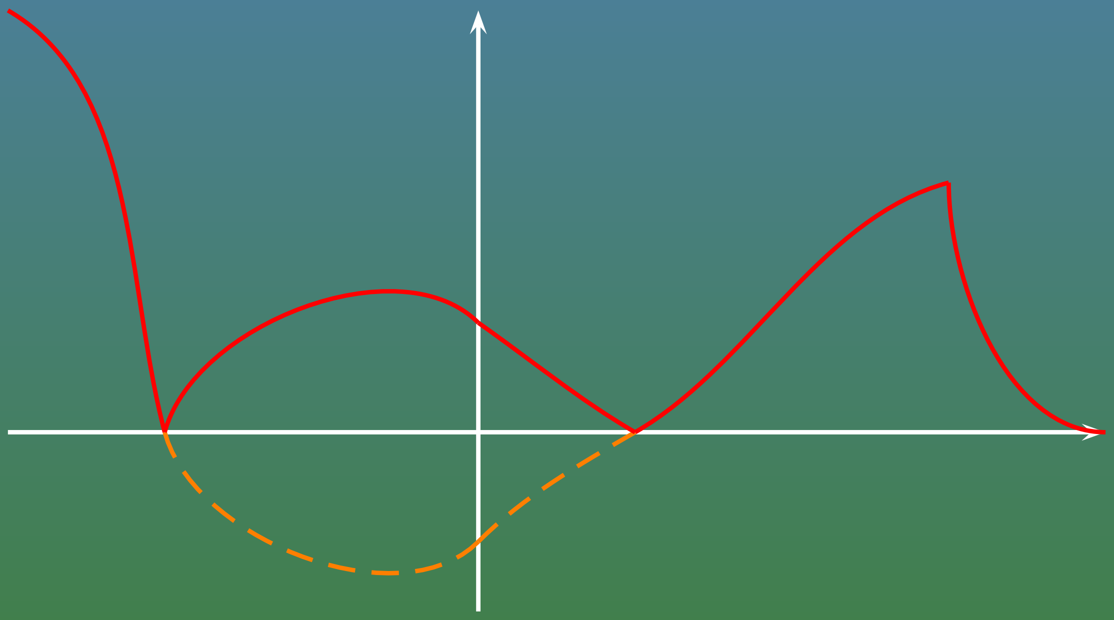
Dal grafico di $f(x)$ a quello di $|f(x)|$

Supponiamo di saper disegnare il grafico della funzione $y = f(x)$ e che questo sia come in figura. Come possiamo ottenere quello di $y = |f(x)|$?



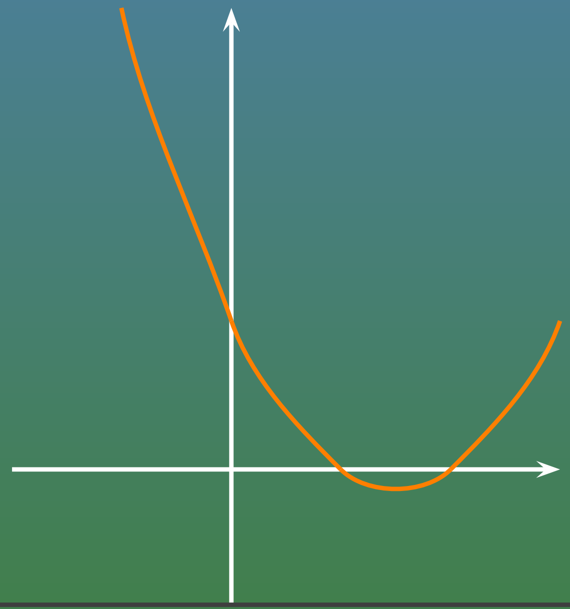
Dal grafico di $f(x)$ a quello di $|f(x)|$

Supponiamo di saper disegnare il grafico della funzione $y = f(x)$ e che questo sia come in figura. Come possiamo ottenere quello di $y = |f(x)|$? Molto semplicemente basta riflettere rispetto all'asse delle x la parte del grafico di $y = f(x)$ che sta sotto l'asse delle x.



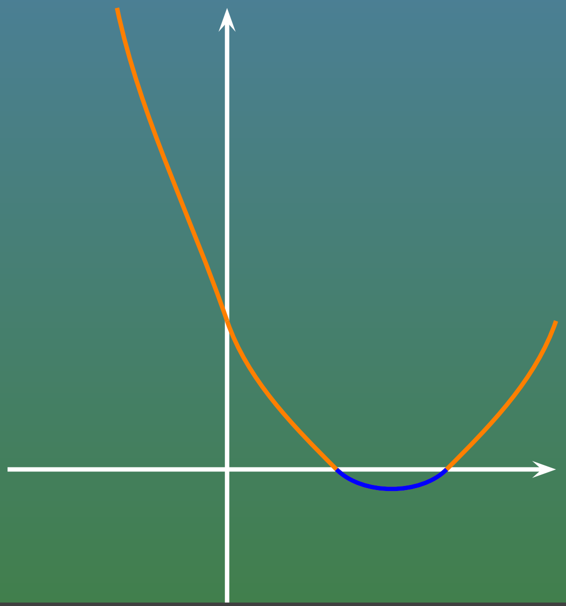
Esempio: il grafico di $|x^2 - 3x + 2|$

Partiamo dal grafico di $y = x^2 - 3x + 2$. Questa è una parabola con concavità rivolta verso l'alto e vertice nel punto $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.



Esempio: il grafico di $|x^2 - 3x + 2|$

Partiamo dal grafico di $y = x^2 - 3x + 2$. Questa è una parabola con concavità rivolta verso l'alto e vertice nel punto $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4})$. La parte di grafico sotto l'asse delle x è quella compresa fra i punti $(1, 0)$ e $(2, 0)$.

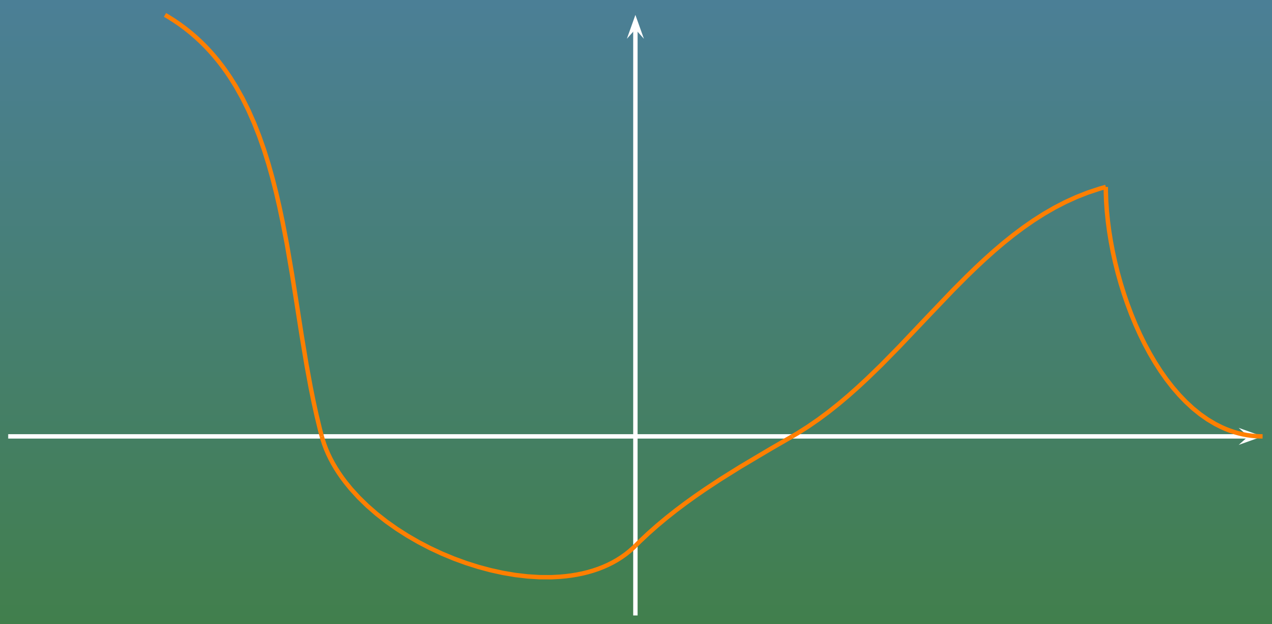


Esempio: il grafico di $|x^2 - 3x + 2|$

Partiamo dal grafico di $y = x^2 - 3x + 2$. Questa è una parabola con concavità rivolta verso l'alto e vertice nel punto $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$. La parte di grafico sotto l'asse delle x è quella compresa fra i punti $(1, 0)$ e $(2, 0)$. Ribaltandola, si ottiene il grafico di $y = |x^2 - 3x + 2|$:

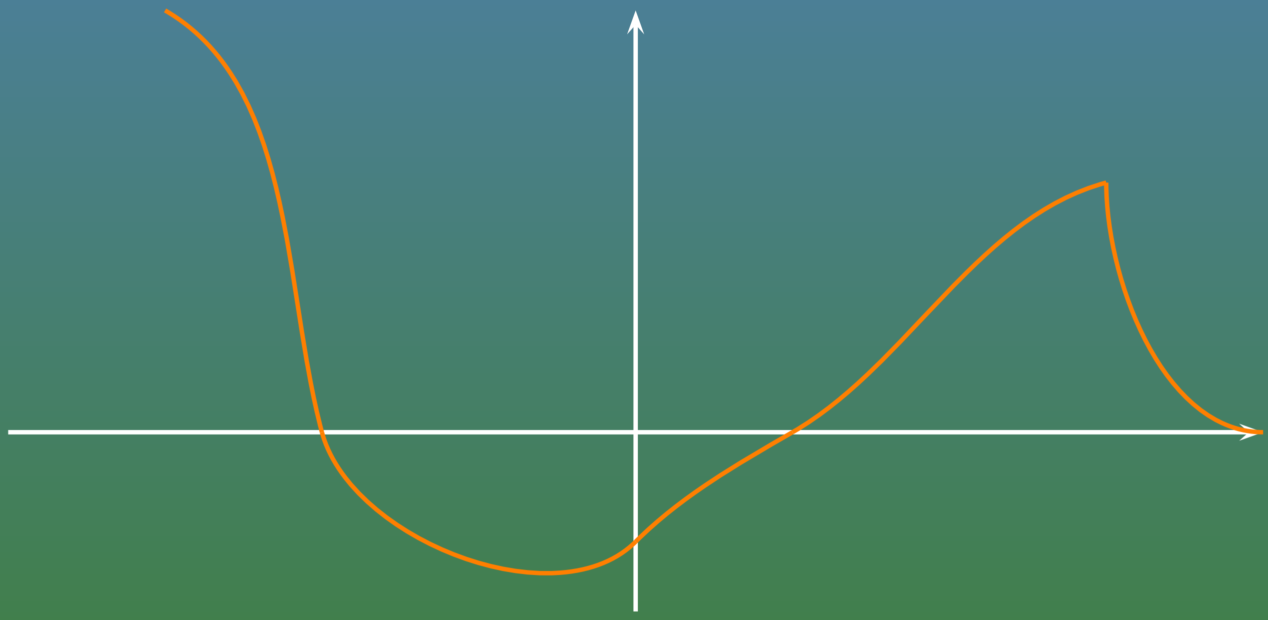
Dal grafico di $f(x)$ a quello di $f(|x|)$

Supponiamo di saper disegnare il grafico della funzione $y = f(x)$ e che questo sia come in figura.



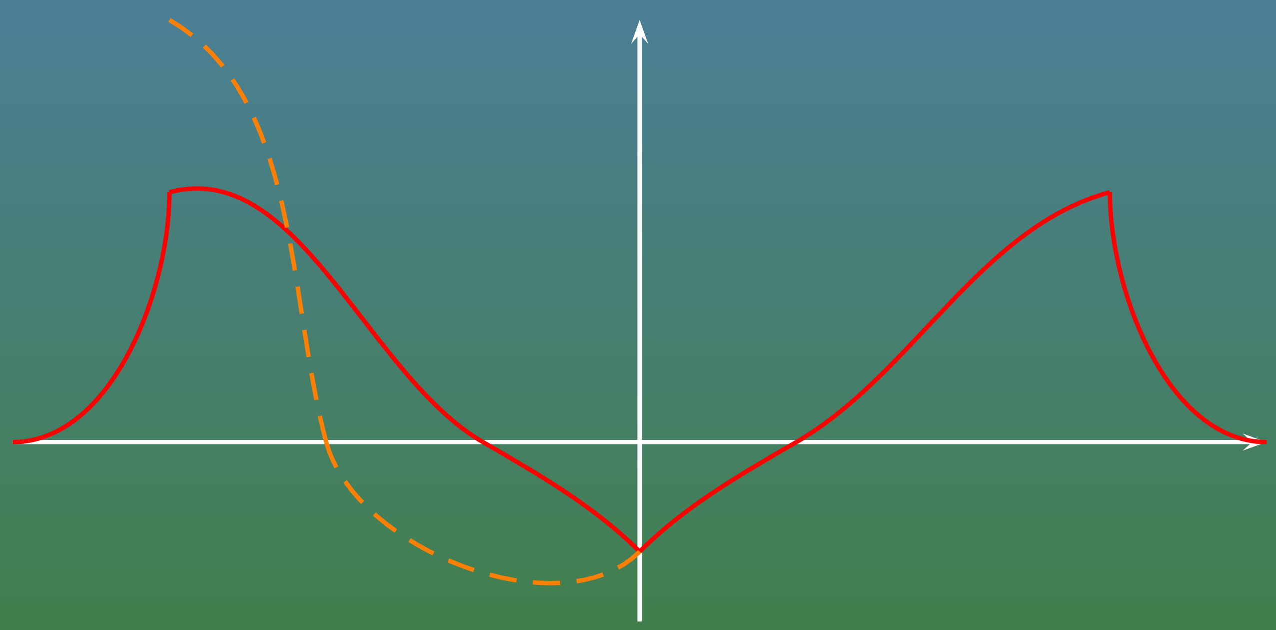
Dal grafico di $f(x)$ a quello di $f(|x|)$

Supponiamo di saper disegnare il grafico della funzione $y = f(x)$ e che questo sia come in figura. Come possiamo ottenere quello di $y = f(|x|)$?



Dal grafico di $f(x)$ a quello di $f(|x|)$

Supponiamo di saper disegnare il grafico della funzione $y = f(x)$ e che questo sia come in figura. Come possiamo ottenere quello di $y = f(|x|)$? Molto semplicemente basta riflettere rispetto all'asse y la parte del grafico di $y = f(x)$ che sta a destra dell'asse delle y.



Osservazioni importanti

- Per tracciare il grafico di $y = f(|x|)$, non conta la parte del grafico di $y = f(x)$ con $x \leq 0$.

Osservazioni importanti

- Per tracciare il grafico di $y = f(|x|)$, non conta la parte del grafico di $y = f(x)$ con $x \leq 0$.
- Posto $D_+ = D \cap \mathbb{R}_+ = \{x \geq 0 \mid x \in D\}$ abbiamo già visto che il dominio $\widetilde{D}$ di $f(|x|)$ è $\widetilde{D} = D_+ \cup \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in D_+\}$. Di conseguenza $\widetilde{D}$ è simmetrico (cioè $x \in \widetilde{D} \Leftrightarrow -x \in \widetilde{D}$).

Osservazioni importanti

- Per tracciare il grafico di $y = f(|x|)$, non conta la parte del grafico di $y = f(x)$ con $x \leq 0$.
- Posto $D_+ = D \cap \mathbb{R}_+ = \{x \geq 0 \mid x \in D\}$ abbiamo già visto che il dominio $\widetilde{D}$ di $f(|x|)$ è $\widetilde{D} = D_+ \cup \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in D_+\}$.
  Di conseguenza $\widetilde{D}$ è simmetrico (cioè $x \in \widetilde{D} \Leftrightarrow -x \in \widetilde{D}$).
  Infatti $x \in D_+ \Rightarrow -x \in \{z \in \mathbb{R} \mid -z \in D_+\} \subset \widetilde{D}$, mentre $x \in \{z \in \mathbb{R} \mid -z \in D_+\} \Rightarrow -x \in D_+ \subset \widetilde{D}$.

Osservazioni importanti

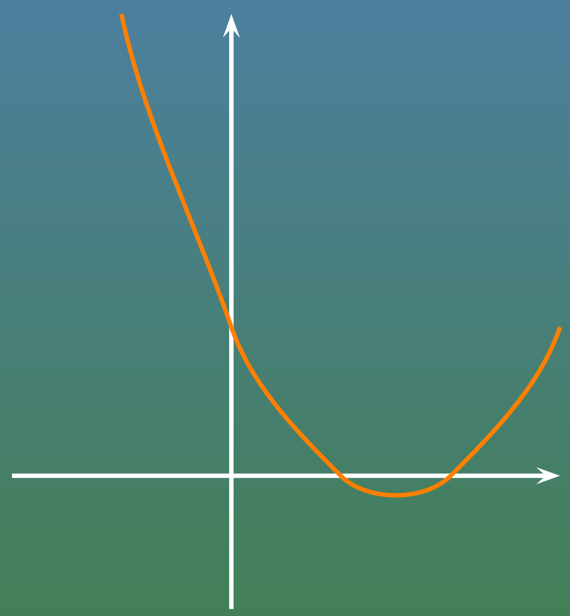
- Per tracciare il grafico di $y = f(|x|)$, non conta la parte del grafico di $y = f(x)$ con $x \leq 0$.
- Posto $D_+ = D \cap \mathbb{R}_+ = \{x \geq 0 \mid x \in D\}$ abbiamo già visto che il dominio $\widetilde{D}$ di $f(|x|)$ è $\widetilde{D} = D_+ \cup \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in D_+\}$. Di conseguenza $\widetilde{D}$ è simmetrico (cioè $x \in \widetilde{D} \Leftrightarrow -x \in \widetilde{D}$).
- $f(|x|)$ è una funzione pari. Ossia cambiando x con $-x$ il risultato non cambia.

Osservazioni importanti

- Per tracciare il grafico di $y = f(|x|)$, non conta la parte del grafico di $y = f(x)$ con $x \leq 0$.
- Posto $D_+ = D \cap \mathbb{R}_+ = \{x \geq 0 \mid x \in D\}$ abbiamo già visto che il dominio $\widetilde{D}$ di $f(|x|)$ è $\widetilde{D} = D_+ \cup \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in D_+\}$. Di conseguenza $\widetilde{D}$ è simmetrico (cioè $x \in \widetilde{D} \Leftrightarrow -x \in \widetilde{D}$).
- $f(|x|)$ è una funzione pari. Ossia cambiando x con $-x$ il risultato non cambia. Infatti $f(|-x|) = f(|x|)$ (si ricordi che $|-x| = |x|$).

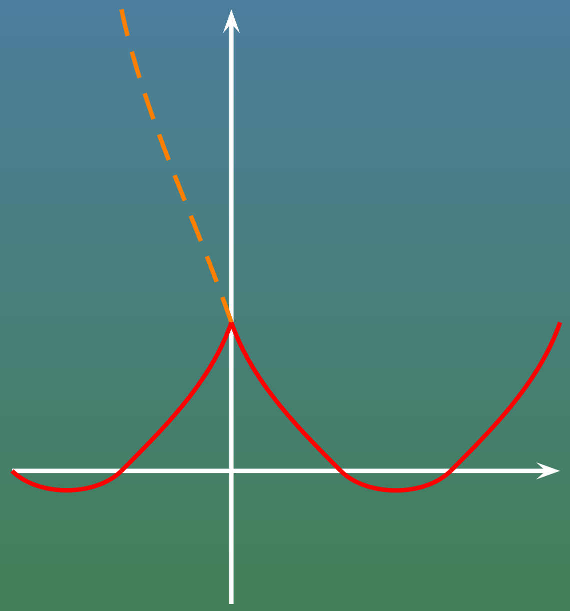
Esempio: il grafico di $x^2 - 3|x| + 2$

Osserviamo che $x^2 - 3|x| + 2 = f(|x|)$ dove $f(x) = x^2 - 3x + 2$.
Abbiamo già visto che il grafico di $y = f(x)$ è :



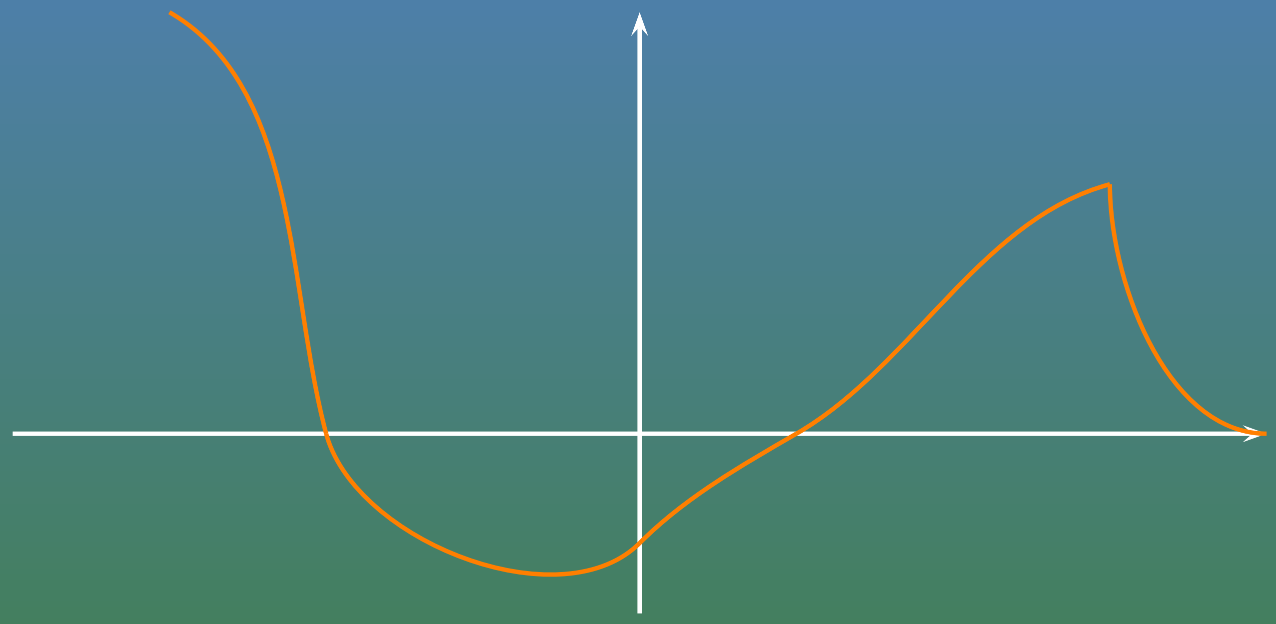
Esempio: il grafico di $x^2 - 3|x| + 2$

Osserviamo che $x^2 - 3|x| + 2 = f(|x|)$ dove $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Abbiamo già visto che il grafico di $y = f(x)$ è ... quindi, in base a quanto detto in precedenza, il grafico di $y = x^2 - 3|x| + 2$ è:



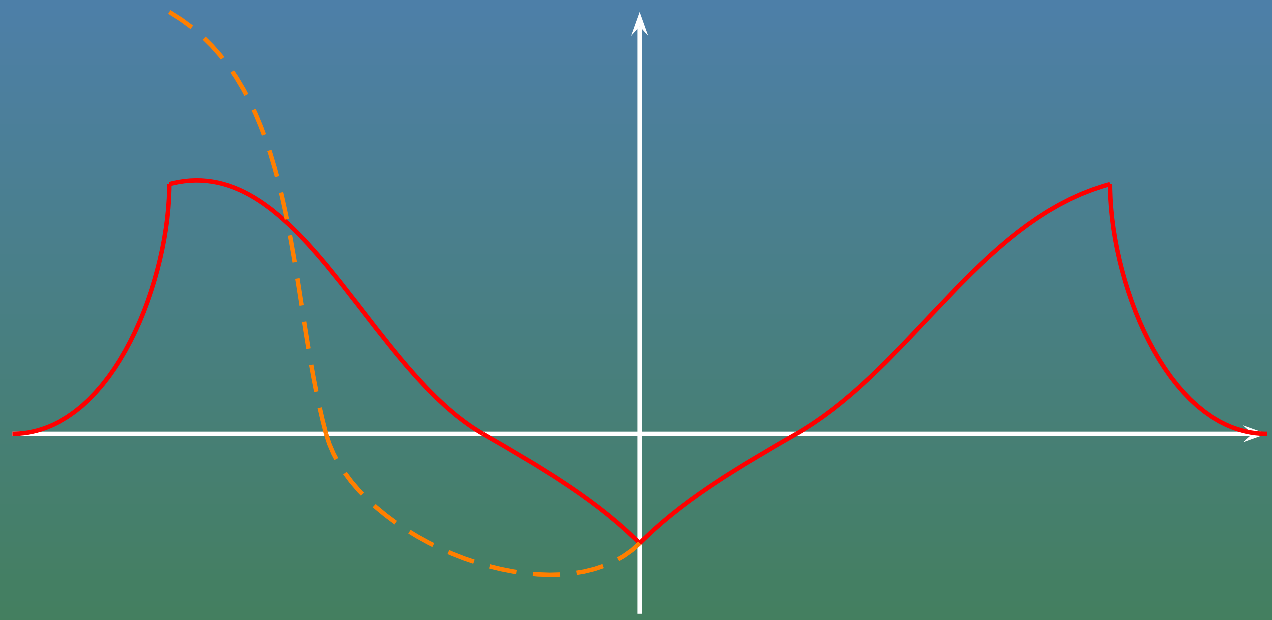
Sempre più difficile: il grafico di $y = |f(|x|)|$

Partendo dal grafico di $y = f(x)$,



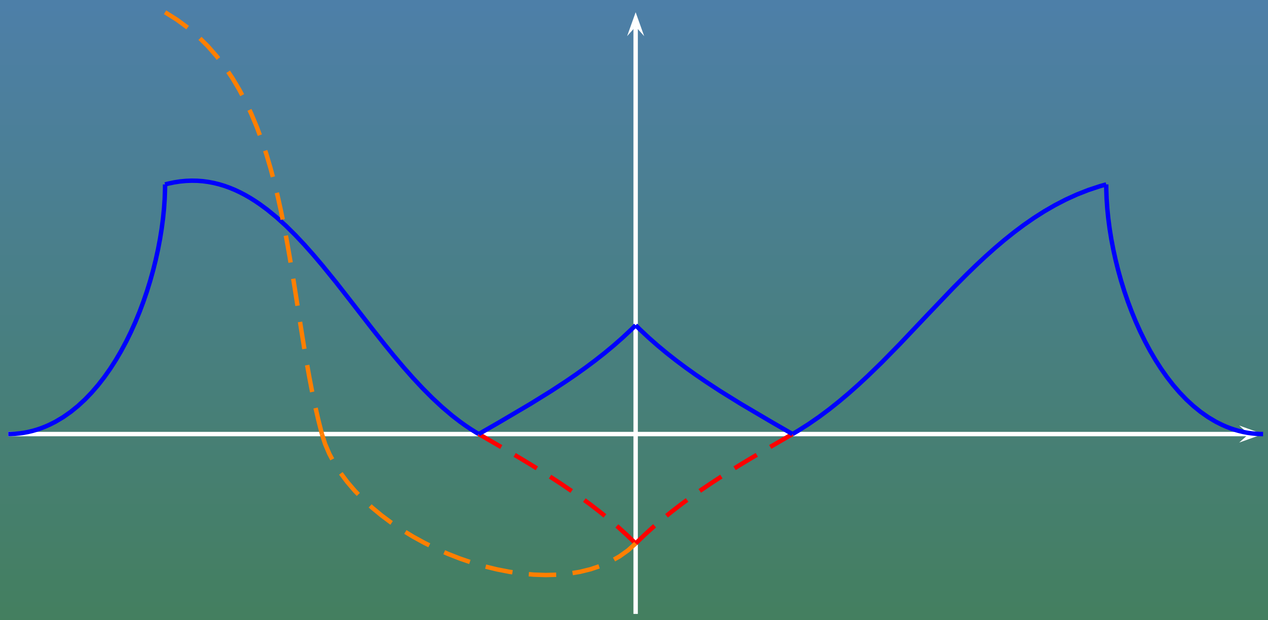
Sempre più difficile: il grafico di $y = |f(|x|)|$

Partendo dal grafico di $y = f(x)$, si disegna quello di $y = f(|x|)$



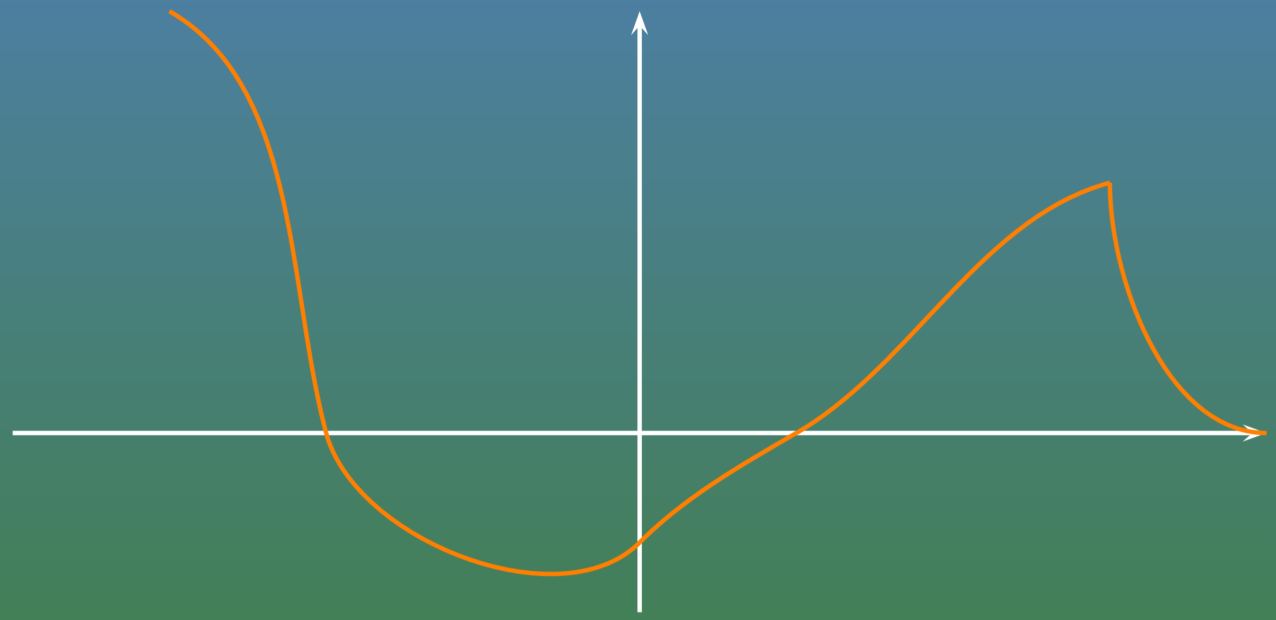
Sempre più difficile: il grafico di $y = |f(|x|)|$

Partendo dal grafico di $y = f(x)$, si disegna quello di $y = f(|x|)$ e quindi quello di $y = |f(|x|)|$.



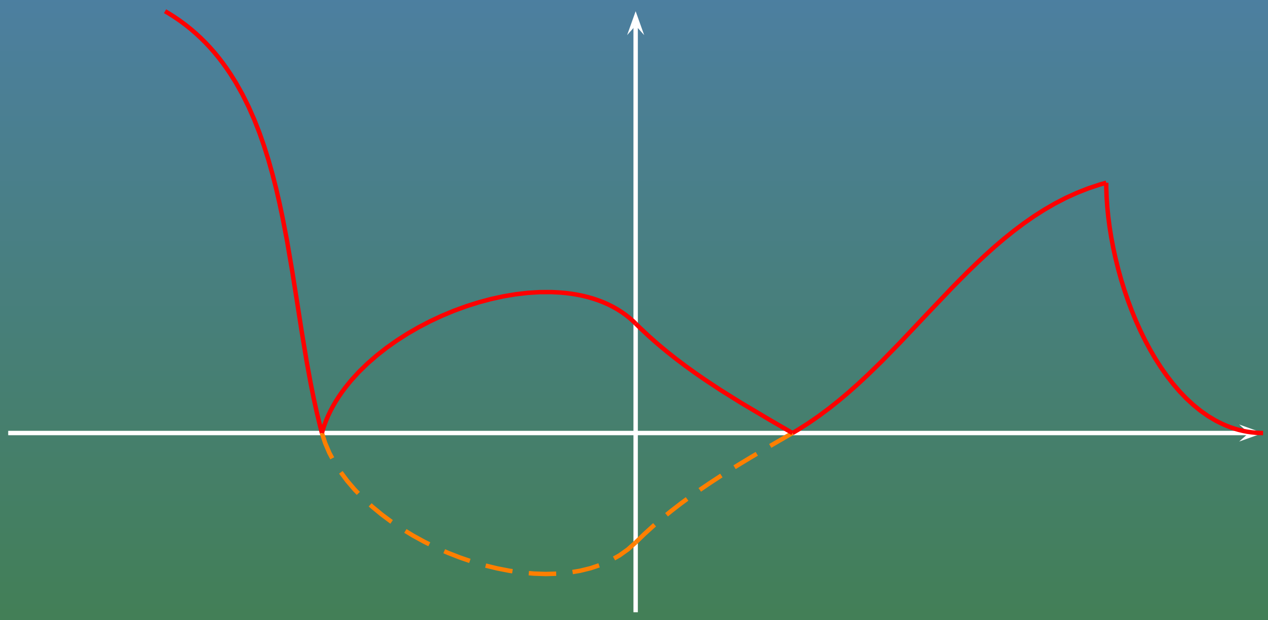
oppure...

Alternativamente, partendo dal grafico di $y = f(x)$,



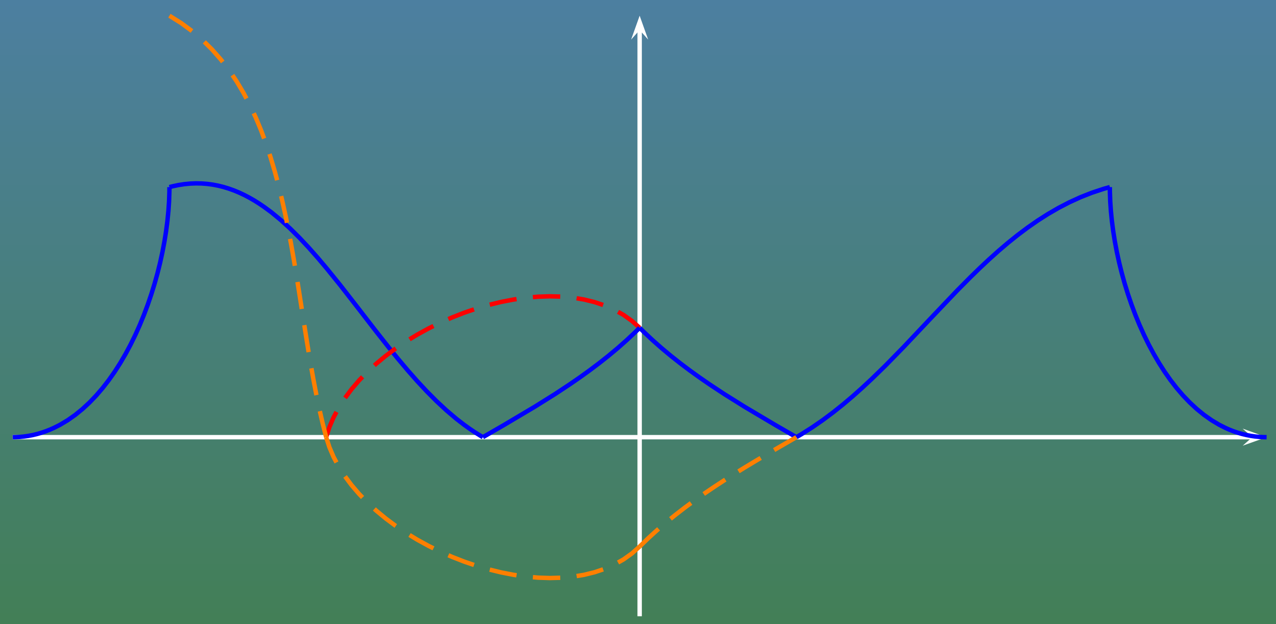
oppure...

Alternativamente, partendo dal grafico di $y = f(x)$, si disegna quello di $y = |f(x)|$



oppure...

Alternativamente, partendo dal grafico di $y = f(x)$, si disegna quello di $y = |f(x)|$ e poi quello di $y = |f(|x|)|$. Ovviamente si ottiene lo stesso risultato di prima.



Osservazione importante

È importante sottolineare l'ordine delle operazioni da effettuare per calcolare $\left|f\left(|x|\right)\right|$.

Osservazione importante

È importante sottolineare l'ordine delle operazioni da effettuare per calcolare $|f(|x|)|$. Una volta che si conosca il valore di x, occorre prima calcolare $|x|$, poi $f(|x|)$ ed infine $|f(|x|)|$.

Osservazione importante

È importante sottolineare l'ordine delle operazioni da effettuare per calcolare $|f(|x|)|$. Una volta che si conosca il valore di x, occorre prima calcolare $|x|$, poi $f(|x|)$ ed infine $|f(|x|)|$.

$$x \mapsto |x|$$

Osservazione importante

È importante sottolineare l'ordine delle operazioni da effettuare per calcolare $|f(|x|)|$. Una volta che si conosca il valore di x, occorre prima calcolare $|x|$, poi $f(|x|)$ ed infine $|f(|x|)|$.

$$x \mapsto |x| \mapsto f(|x|)$$

Osservazione importante

È importante sottolineare l'ordine delle operazioni da effettuare per calcolare $|f(|x|)|$. Una volta che si conosca il valore di x, occorre prima calcolare $|x|$, poi $f(|x|)$ ed infine $|f(|x|)|$.

$$x \mapsto |x| \mapsto f(|x|) \mapsto |f(|x|)|$$

Osservazione importante

È importante sottolineare l'ordine delle operazioni da effettuare per calcolare $|f(|x|)|$. Una volta che si conosca il valore di x, occorre prima calcolare $|x|$, poi $f(|x|)$ ed infine $|f(|x|)|$.

$$x \mapsto |x| \mapsto f(|x|) \mapsto |f(|x|)|$$

Per esempio, per calcolare $|\cos(|-\pi|)|$ ($x = -\pi$ e $f(x) = \cos x$), occorre prima calcolare $|-\pi| = \pi$, poi $\cos(|-\pi|) = \cos\pi = -1$ e solo alla fine $|\cos(|-\pi|)| = |-1| = 1$.

Esempio

Vogliamo tracciare il grafico di $f(x) = \left|\dfrac{2|x|-1}{|x|+1}\right|$.

Esempio

Vogliamo tracciare il grafico di $f(x) = \left| \dfrac{2|x| - 1}{|x| + 1} \right|$. Scrivendo $y = \frac{2x-1}{x+1}$ si ha

Esempio

Vogliamo tracciare il grafico di $f(x) = \left| \dfrac{2|x| - 1}{|x| + 1} \right|$. Scrivendo $y = \frac{2x-1}{x+1}$ si ha

$$y = 2\frac{x + 1 - \frac{3}{2}}{x + 1} = 2 - \frac{3}{x + 1}$$

Esempio

Vogliamo tracciare il grafico di $f(x) = \left| \dfrac{2|x|-1}{|x|+1} \right|$. Scrivendo $y = \frac{2x-1}{x+1}$ si ha

$$y = 2\frac{x+1-\frac{3}{2}}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1}$$

ossia

$$(y-2)(x+1) = -3.$$

Esempio

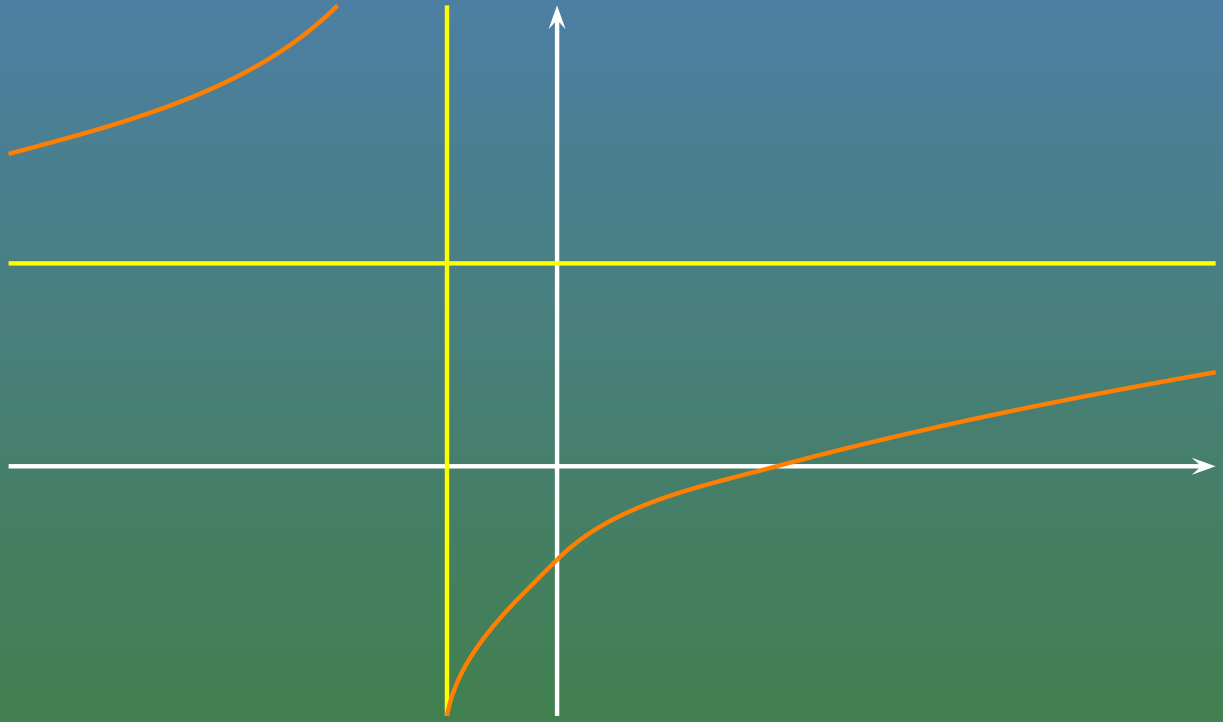
Vogliamo tracciare il grafico di $f(x) = \left| \dfrac{2|x| - 1}{|x| + 1} \right|$. Scrivendo $y = \frac{2x-1}{x+1}$ si ha

$$y = 2\frac{x + 1 - \frac{3}{2}}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1}$$

ossia

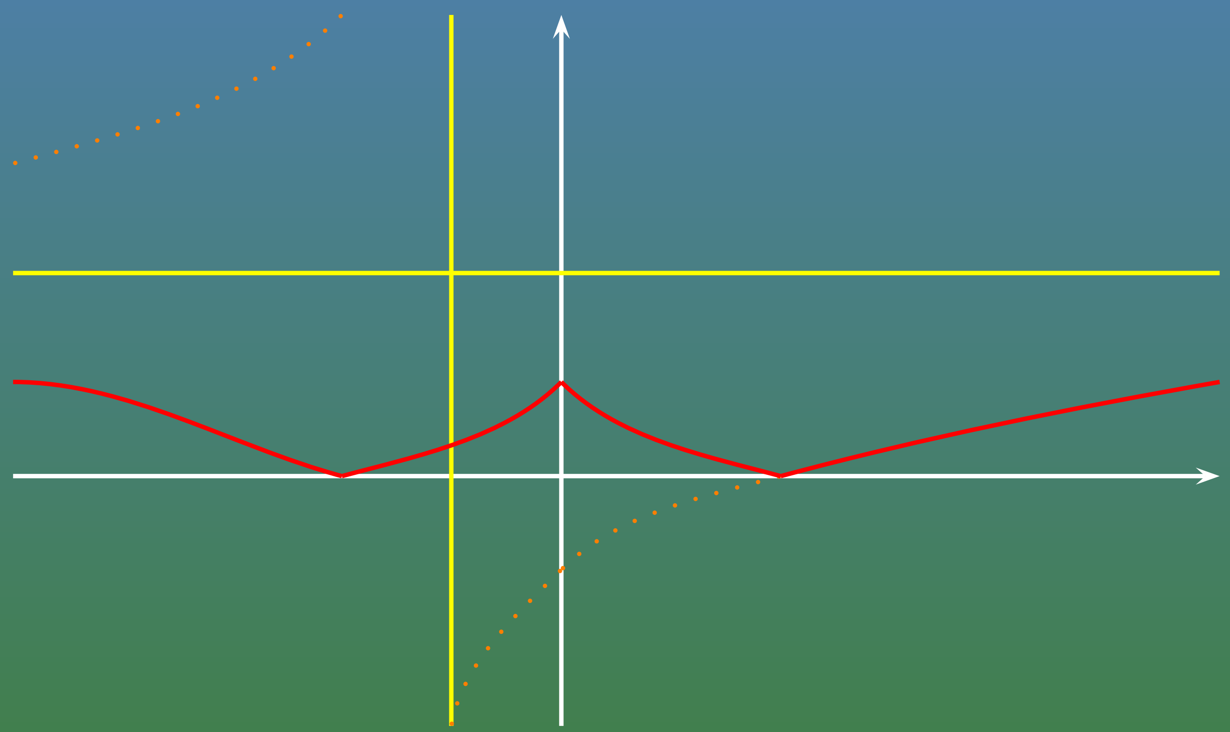
$$(y-2)(x+1) = -3.$$

La curva $y = \frac{2x-1}{x+1}$ rappresenta quindi un'iperbole equilatera avente per asintoti le rette $y = 2$ e $x = -1$.



Perciò, in base a quanto detto in precedenza, il grafico di

$f(x) = \left|\frac{2|x|-1}{|x|+1}\right|$ è:

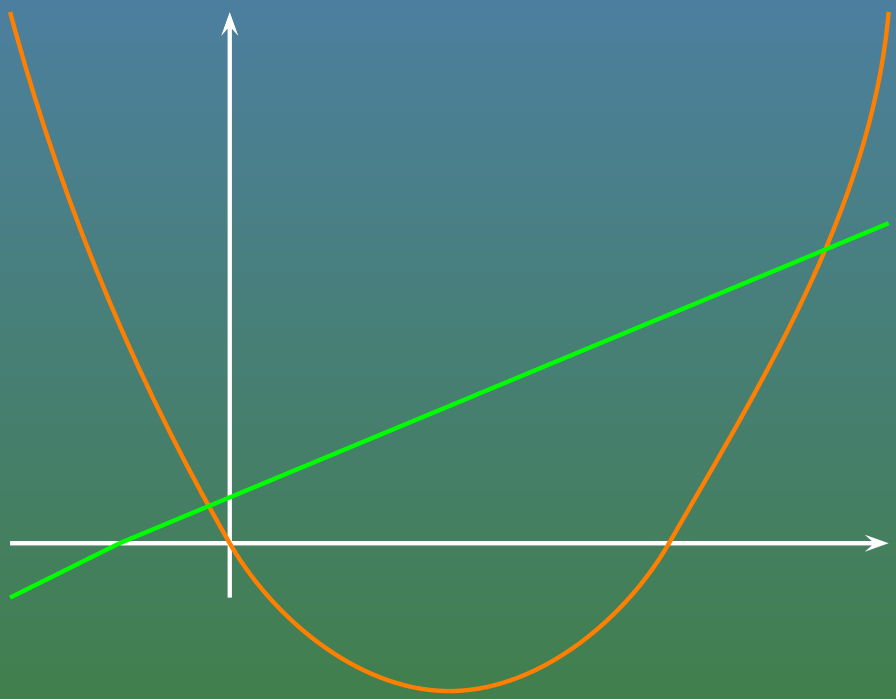


Disequazioni col valore assoluto

Risolviamo la disequazione $\left|x^2 - 2x\right| \leq \left|\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right|$.

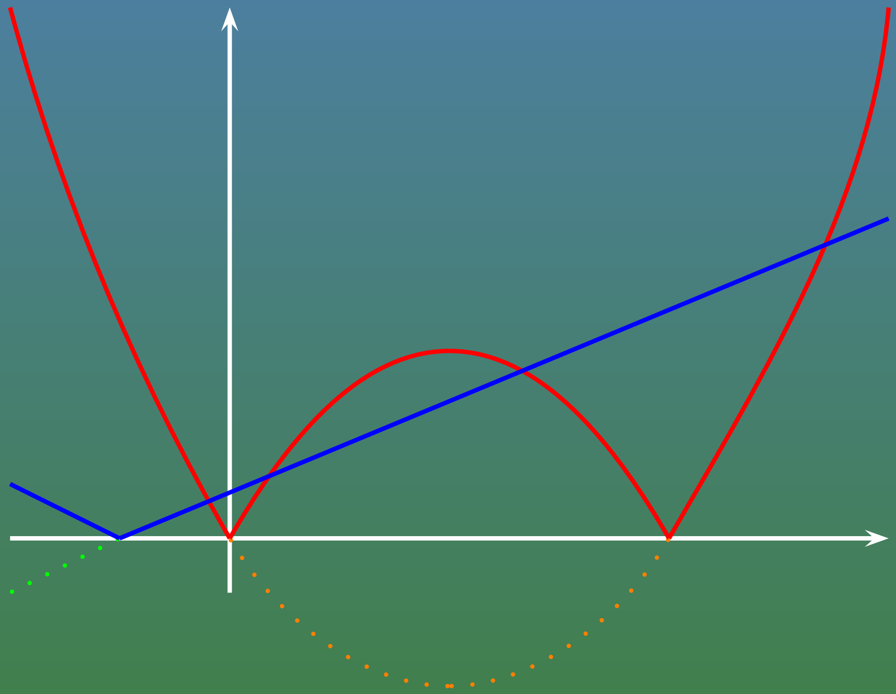
Disequazioni col valore assoluto

Risolviamo la disequazione $\left|x^2 - 2x\right| \leq \left|\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right|$. Tracciamo contemporaneamente i grafici delle funzioni senza il valore assoluto



Disequazioni col valore assoluto

Risolviamo la disequazione $\left|x^2 - 2x\right| \leq \left|\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right|$. Tracciamo contemporaneamente i grafici delle funzioni senza il valore assoluto e quindi i grafici delle funzioni con il valore assoluto.



Quindi la disequazione $|x^2 - 2x| \leq \left|\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right|$ ha le soluzioni $\{x_1 \leq x \leq x_2\} \cup \{x_3 \leq x \leq x_4\}$, dove x_1, x_4 sono le soluzioni dell'equazione $x^2 - 2x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$, mentre x_1, x_3 sono le soluzioni dell'equazione $2x - x^2 = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$.

Quindi la disequazione $\left|x^2 - 2x\right| \leq \left|\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right|$ ha le soluzioni $\{x_1 \leq x \leq x_2\} \cup \{x_3 \leq x \leq x_4\}$, dove x_1, x_4 sono le soluzioni dell'equazione $x^2 - 2x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$, mentre x_1, x_3 sono le soluzioni dell'equazione $2x - x^2 = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$. La prima equazione equivale a

$$x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 10x - 1 = 0.$$

e ha le soluzioni

$$x_{1,4} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{4}$$

Invece l'equazione $2x - x^2 = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ equivale a

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 6x + 1 = 0.$$

e ha le soluzioni

$$x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Invece l'equazione $2x - x^2 = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ equivale a

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 6x + 1 = 0.$$

e ha le soluzioni

$$x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Pertanto la disequazione $\left|x^2 - 2x\right| \leq \left|\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right|$ è soddisfatta per

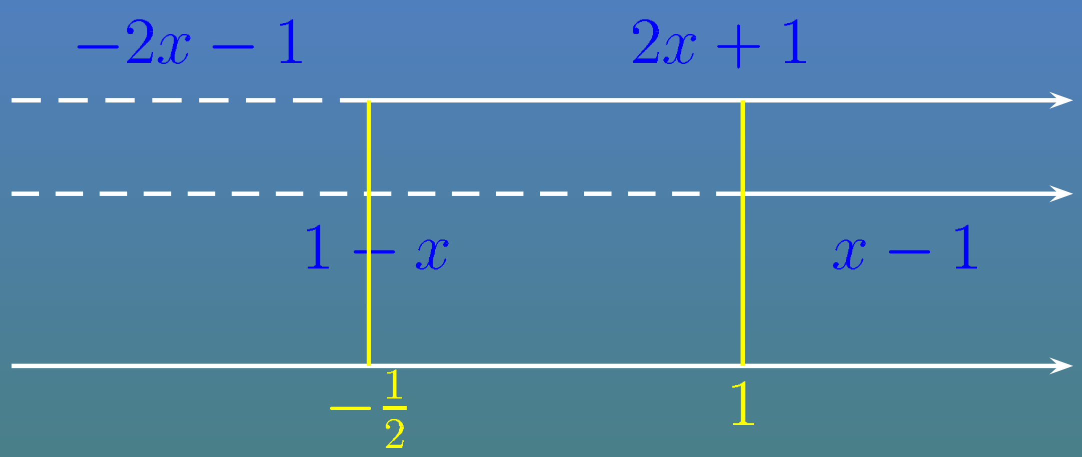
$$\frac{5-\sqrt{29}}{4} \leq x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{4}, \text{ oppure } \frac{3+\sqrt{5}}{4} \leq x \leq \frac{5+\sqrt{29}}{4}.$$

Risolvere la disequazione $|x-1|+|2x+1|\leq 5$

Conviene avvalersi dello schema seguente

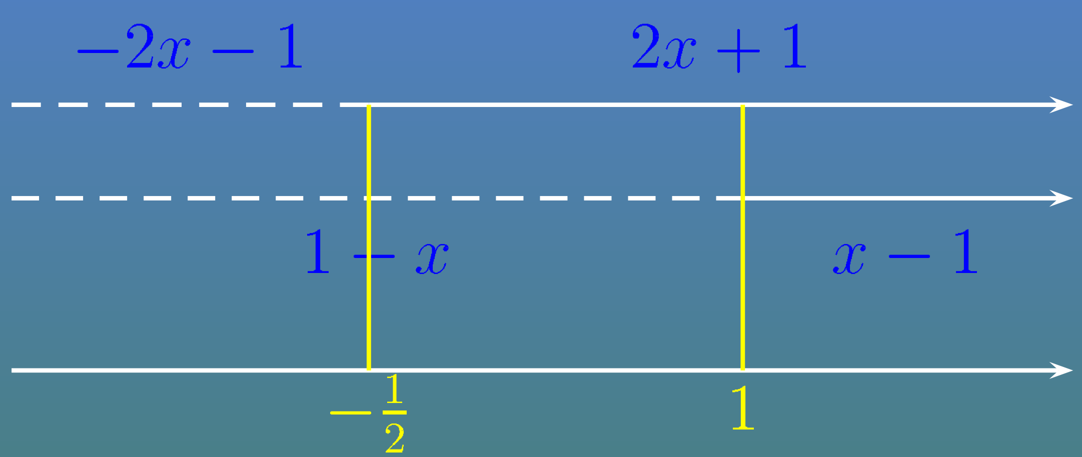
Risolvere la disequazione $|x-1| + |2x+1| \leq 5$

Conviene avvalersi dello schema seguente



Risolvere la disequazione $|x-1|+|2x+1|\le 5$

Conviene avvalersi dello schema seguente



Pertanto

$$|x-1|+|2x+1|=\begin{cases} 1-x-2x-1 & \text{se } x\le -\frac{1}{2} \\ 1-x+2x+1 & \text{se } -\frac{1}{2}\le x\le 1 \\ x-1+2x+1 & \text{se } x\ge 1 \end{cases}$$

La disequazione $|x-1|+|2x+1|\leq 5$

Ossia $|x-1|+|2x+1| = \begin{cases} -3x & \text{se } x \leq -\frac{1}{2} \\ x+2 & \text{se } -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 3x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

La disequazione $|x-1|+|2x+1| \leq 5$

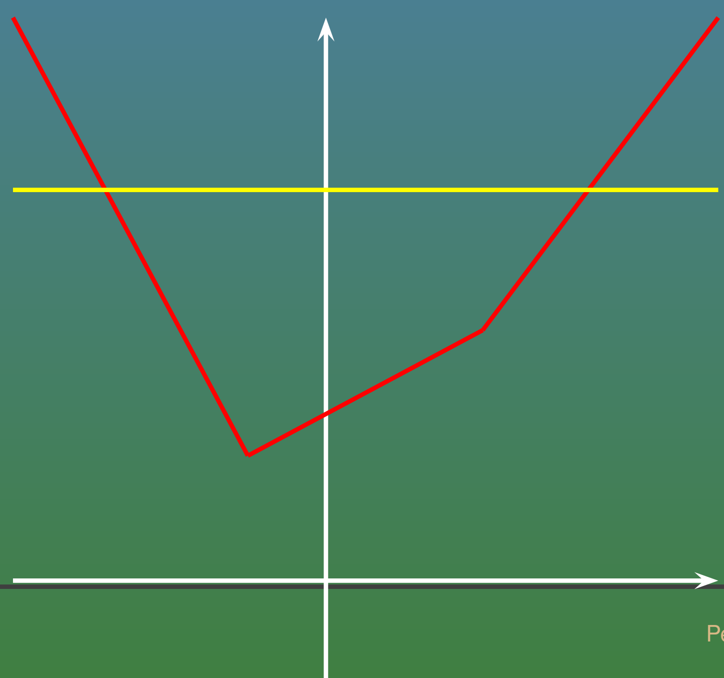
Ossia $|x-1|+|2x+1| = \begin{cases} -3x & \text{se } x \leq -\frac{1}{2} \\ x+2 & \text{se } -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 3x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

Risolviamo la disequazione graficamente

La disequazione $|x-1|+|2x+1| \leq 5$

Ossia $|x-1|+|2x+1| = \begin{cases} -3x & \text{se } x \leq -\frac{1}{2} \\ x+2 & \text{se } -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 3x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

Risolviamo la disequazione graficamente



Quindi la disequazione $|x-1|+|2x+1| \leq 5$ è soddisfatta per $x_1 \leq x \leq x_2$ dove x_1 risolve il sistema

$$\begin{cases} y = -3x \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$$

e x_2 risolve il sistema

$$\begin{cases} y = 3x \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}.$$

Concludendo: la disequazione è soddisfatta per $-\frac{5}{3} \leq x \leq \frac{5}{3}$.