Il Principio di Piero della Francesca e il volume della volta a padiglione

Flaviano Battelli
Dipartimento di Scienze Matematiche
Università Politecnica delle Marche
Ancona

La volta a padiglione è la regione limitata di spazio compresa fra due cilindri dello stesso diametro i cui assi si attraversano perpendicolarmente e che si trova in una delle due regioni in cui lo spazio è diviso dal piano contenente i due assi. La regione compresa fra i due cilindri (senza la limitazione del semispazio) si dice invece (ovviamente) *doppia volta*. Prendendo un sistema di riferimento (x, y, z) in modo che l'asse x sia l'asse del primo cilindro e l'asse y quello del secondo, i due cilindri avranno equazioni, rispettivamente $y^2 + z^2 = r^2$ e $x^2 + z^2 = r^2$ (r =raggio del cilindro) e quindi la doppia volta V è descritta da:

$$V = \{(x, y, z) \mid x^2 + z^2 \le r^2, y^2 + z^2 \le r^2\}.$$

ossia

$$V = \{(x, y, z) \mid |z| \le \min\{\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - y^2}\}, \max\{|x|, |y|\} \le r\}.$$

Per la simmetria del dominio si ha allora

$$\mathrm{vol}(V) = 8 \int_D \sqrt{r^2 - x^2} dx dy$$

dove

$$D = \{(x, y) \mid 0 \le |y| \le x \le r\}$$

(notiamo che $\sqrt{r^2 - y^2} \leq \sqrt{r^2 - x^2} \iff 0 \leq r^2 - y^2 \leq r^2 - x^2 \iff x^2 \leq y^2 \leq r^2 \iff |x| \leq |y| \leq r$). Quindi, dalle formule di riduzione otteniamo:

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(V) &= 8 \int_0^r \int_{-x}^{x} \sqrt{r^2 - x^2}dy\, dx = 8 \int_0^r 2x\sqrt{r^2 - x^2}dx \\ &= 8 \int_0^{r^2} (r^2 - t)^{1/2}dt = -8\frac{2}{3}(r^2 - t)^{3/2}\Big|_{t=0}^{t=r^2} = \frac{16}{3}r^3 = \frac{2d^3}{3}\end{aligned}$$

essendo $d = 2r$ il diametro del cilindro. Dato che d è la misura dello spigolo del cubo circoscritto alla doppia volta, si ottiene il seguente risultato

Teorema (Piero della Francesca). *Il volume della doppia volta è i due terzi del volume del cubo circoscritto.*

È interessante presentare una dimostrazione sulla falsariga di quella data da Piero della Francesca che fa uso di un risultato *intuito* da Piero stesso e che rappresenta una variante profonda del Principio di Cavalieri, principio enunciato più di 100 anni dopo (Piero della Francesca muore nel 1492, Cavalieri nasce nel 1598).

Teorema (Principio di Cavalieri). *Siano V_1 e V_2 due insiemi misurabili e sia Π_α, $\alpha \in [a, b]$ una famiglia di piani paralleli tale che*

$$\mathrm{area}(V_1 \cap \Pi_\alpha) = k\mathrm{area}(V_2 \cap \Pi_\alpha)$$

per qualche $k \in \mathbb{R}$. Allora

$$\mathrm{vol}(V_1) = k\mathrm{vol}(V_2)$$

Dimostrazione. Prendiamo un sistema di riferimento in modo che $\Pi_\alpha = \{(x, y, z) \mid z = \alpha\}$. Si ha integrando per strati:

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(V_1) &= \int_{V_1} dxdydz = \int_a^b \int_{V_1 \cap \Pi_z} dxdydz = \int_a^b \mathrm{area}(V_1 \cap \Pi_z)dz \\ &= k \int_a^b \mathrm{area}(V_2 \cap \Pi_z)dz = k\mathrm{vol}(V_2).\end{aligned}$$

In altre parole: *Se il rapporto* $\mathrm{area}(V_1 \cap \Pi_\alpha) : \mathrm{area}(V_2 \cap \Pi_\alpha)$ *non dipende da α allora* $\mathrm{vol}(V_1) : \mathrm{vol}(V_2) = \mathrm{area}(V_1 \cap \Pi_\alpha) : \mathrm{area}(V_2 \cap \Pi_\alpha)$.

Consideriamo il piano Π_θ per l'asse z di equazione $x \sin\theta - y\cos\theta = 0$ dove $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ (questa limitazione corrisponde a considerare punti (x, y) con $|x| \geq |y|$). Consideriamo l'intersezione di Π_θ con la volta a padiglione. Il risultato è:

$$\begin{cases} 0 \le z \le \sqrt{r^2 - x^2} \\ x \sin\theta = y \cos\theta \end{cases}$$

Un sistema di riferimento ortonormale nel piano Π_θ è dato dai vettori $w_1 = (\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0) = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$ e $w_2 = (0,\ 0,\ 1) = e_3$. I punti di $\mathbb{R}^3$ che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = r^2 \\ x \sin\theta = y \cos\theta \end{cases}$$

sono del tipo $uw_1 + vw_2 = (u\cos\theta\ u\sin\theta\ v)$ e quindi u, v soddisfano l'equazione: $u^2\cos^2\theta + v^2 = r^2$ che è l'equazione di un'ellisse di semiassi $\frac{r}{\cos\theta}$ e r. L'area di tale ellisse è $\frac{\pi r^2}{\cos\theta}$. L'area del rettangolo circoscritto all'ellisse è invece $\frac{4r^2}{\cos\theta}$. Il rapporto fra queste due aree è:

$$\frac{\pi}{4}$$

ed è quindi *indipendente da θ*. Dal Principio di Cavalieri verrebbe naturale congetturare che anche i volumi stiano nello stesso rapporto ossia:

$$\frac{1}{2}\mathrm{vol}(\mathrm{DoppiaVolta}) : \frac{1}{2}\mathrm{vol}(\mathrm{Cubo}) = \pi : 4.$$

ovvero

$$\mathrm{vol}(\mathrm{DoppiaVolta}) = \frac{\pi}{4}\mathrm{vol}(\mathrm{Cubo}) = \frac{\pi}{4}d^3$$

che però non è vero. La conclusione del Principio di Cavalieri **von vale** se i piani costituiscono un fascio proprio. Si tratta allora di capire come si modifica il Teorema di Cavalieri in questo caso.

Consideriamo la trasformazione in coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} x = u\cos\theta \\ y = u\sin\theta \\ z = v \end{cases}$$

dove $(u,\ v) \in \mathbb{R}^2$ e $-\pi < \theta \le \pi$. Il determinante Jacobiano della trasformazione è:

$$\det\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -u\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & u\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} \cos\theta & -u\sin\theta \\ \sin\theta & u\cos\theta \end{pmatrix} = -u$$

e quindi, posto $V_0 = \{(x, y, z) \mid |z| \leq \sqrt{r^2 - x^2},\ 0 \leq |y| \leq |x| \leq r\}$, si ha

$$\mathrm{vol}(V_0) = \iiint_{V_0} dxdydz = \iiint_{W_0} |u| dudvd\theta$$

dove $W_0 = \{(u, v, \theta) \mid -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},\ (u, v) \in S_\theta\}$ e

$$S_\theta = \{(u, v) \mid u^2 \cos^2\theta + v^2 \leq r^2\}.$$

Dalle formule di riduzione otteniamo allora:

$$\mathrm{vol}(V_0) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \iint_{S_\theta} |u| dudv\ d\theta = 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \iint_{\tilde{S}_\theta} ududv\ d\theta$$

essendo:

$$\tilde{S}_\theta = \{(u, v) \mid u^2 \cos^2\theta + v^2 \leq r^2,\ u \geq 0\}.$$

Di conseguenza:

$$\mathrm{vol}(V_0) = 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} u_\theta^S \mathrm{area}(\tilde{S}_\theta) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} u_\theta^S \mathrm{area}(S_\theta) d\theta.$$

avendo indicato con $G_\theta^S = (u_\theta^S, 0)$ il baricentro di $\tilde{S}_\theta$. Ovviamente la stessa formula vale per ogni superficie $\tilde{S}_\theta$ contenuta nel semipiano $u \geq 0$. Prendendo, invece di $\tilde{S}_\theta$, il rettangolo $\tilde{R}_\theta = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq \frac{r}{\cos\theta}, -r \leq v \leq r\}$ otteniamo

$$\mathrm{vol}(C_0) = 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} u_\theta^R \mathrm{area}(\tilde{R}_\theta) d\theta$$

essendo $G_\theta^R = (u_\theta^R, 0)$ il baricentro del rettangolo $\tilde{R}_\theta$ e $C_0 = \{(x, y, z) \mid |z| \leq r, 0 \leq x \leq |y|\}$.

Abbiamo visto che $\mathrm{area}(\tilde{S}_\theta) = \frac{\pi}{4}\mathrm{area}(\tilde{R}_\theta)$ tuttavia, per confrontare i volumi $\mathrm{vol}(V_0)$ e $\mathrm{vol}(C_0)$ occorre invece stabilire una relazione fra i prodotti $u_\theta^S \mathrm{area}(\tilde{S}_\theta)$ e $u_\theta^R \mathrm{area}(\tilde{R}_\theta)$. Si ha $u_\theta^R = \frac{r}{2\cos\theta}$ e

$$u_\theta^S \mathrm{area}(\tilde{S}_\theta) = \iint_{\tilde{S}_\theta} ududv = \int_{-r}^{r} \int_0^{\frac{\sqrt{r^2 - v^2}}{\cos\theta}} udu\ dv = \frac{1}{2}\int_{-r}^{r} \frac{r^2 - v^2}{\cos^2\theta} dv = \int_0^r \frac{r^2 - v^2}{\cos^2\theta} dv = \frac{2r^3}{3\cos^2\theta}.$$

Pertanto:

$$u_\theta^R \mathrm{area}(\tilde{R}_\theta) = \frac{r}{2\cos\theta} \frac{2r^2}{\cos\theta} = \frac{r^3}{\cos^2\theta} = \frac{3}{2} u_\theta^S \mathrm{area}(\tilde{S}_\theta)$$

quindi

$$\mathrm{vol}(V_0) = 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} u_\theta^S \mathrm{area}(\tilde{S}_\theta)d\theta = \frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} u_\theta^R \mathrm{area}(\tilde{R}_\theta)d\theta = \frac{2}{3}\mathrm{vol}(C_0).$$

Ma come si può calcolare il volume della volta a padiglione *senza* calcolare gli integrali? Ecco l'idea di Piero della Francesca.[1]

Siano $\mathcal{R}_\theta$, $\mathcal{S}_\theta$ regioni misurabili di $\mathbb{R}^2_+ = \{(\xi,\eta) \mid \xi \geq 0\}$ e sia $L_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare (invertibile). Poniamo $\mathcal{R}'_\theta = L_\theta(\mathcal{R}_\theta)$ e $\mathcal{S}'_\theta = L_\theta(\mathcal{S}_\theta)$. Supponiamo che i coefficienti ℓ_θ^{ij} di L_θ varino con continuità rispetto a θ. Si ha:

$$\mathrm{area}(\mathcal{S}'_\theta) = \iint_{\mathcal{S}'_\theta} dudv = \iint_{\mathcal{S}_\theta} |\mathrm{det}L_\theta| d\xi d\eta = |\mathrm{det}L_\theta| \mathrm{area}(\mathcal{S}_\theta)$$

e:

$$\iint_{\mathcal{S}'_\theta} ududv = \iint_{\mathcal{S}_\theta} (\ell_\theta^{11}\xi + \ell_\theta^{12}\eta)|\mathrm{det}L_\theta| d\xi d\eta = (\ell_\theta^{11} u_\theta^{\mathcal{S}} + \ell_\theta^{11} u_\theta^{\mathcal{S}})\mathrm{area}(\mathcal{S}'_\theta).$$

Allo stesso modo si prova che

$$\iint_{\mathcal{S}'_\theta} vdudv = (\ell_\theta^{21} u_\theta^{\mathcal{S}} + \ell_\theta^{22} u_\theta^{\mathcal{S}})\mathrm{area}(\mathcal{S}'_\theta)$$

Di conseguenza indicando con $G_\theta^{\mathcal{S}}$ e $G_\theta^{\mathcal{S}'}$ i baricentri di $\mathcal{S}_\theta$ e $\mathcal{S}'_\theta$:

$$G_\theta^{\mathcal{S}'} = L_\theta(G_\theta^{\mathcal{S}})$$

Formule simili valgono, ovviamente, sostituendo $\mathcal{S}_\theta$ con $\mathcal{R}_\theta$ ed $\mathcal{S}'_\theta$ con $\mathcal{R}'_\theta$. Supponiamo ora che

$$L_\theta(\xi,\eta) = (\ell_\theta^1\xi, \ell_\theta^{12}\xi + \ell_\theta^2\eta).$$

con $\ell_\theta^1 > 0$, $\ell_\theta^2 > 0$. Siano V, V_1 i solidi di $\mathbb{R}^3$ descritti da:

$$V = \{(x,y,z) \mid x = u\cos\theta, y = u\sin\theta, z = v, (u,v) \in \mathcal{S}_\theta, \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1\}$$
$$V' = \{(x,y,z) \mid x = u\cos\theta, y = u\sin\theta, z = v, (u,v) \in \mathcal{S}'_\theta, \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1\}$$
$$W = \{(x,y,z) \mid x = u\cos\theta, y = u\sin\theta, z = v, (u,v) \in \mathcal{R}_\theta, \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1\}$$
$$W' = \{(x,y,z) \mid x = u\cos\theta, y = u\sin\theta, z = v, (u,v) \in \mathcal{R}'_\theta, \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1\}$$

[1]Pare che questa idea risalga ad Archimede, creatore del metodo di esaustione, e che Piero della Francesca ne abbia compreso l'importanza dandone anche una giustificazione. E' da sottolineare che gli scritti di Pitagora erano stati trascritti da altri che spesso non ne comprendevano il contenuto e non davano quindi le dimostrazioni.

Il principio di Piero della Francesca recita: *Risulta:*

$$u_\theta^{\mathcal{R}'}\text{area}(\mathcal{R}'_\theta) : u_\theta^{\mathcal{S}'}\text{area}(\mathcal{S}'_\theta) = u_\theta^{\mathcal{R}}\text{area}(\mathcal{R}_\theta) : u_\theta^{\mathcal{S}}\text{area}(\mathcal{S}'_\theta)$$

e se tale rapporto è indipendente da θ risulta anche:

$$\text{vol}(W') : \text{vol}(V') = \text{vol}(W) : \text{vol}(V)$$

Dimostrazione. Si ha

$$u_\theta^{\mathcal{R}'}\text{area}(\mathcal{R}'_\theta) = \ell^1_\theta|\text{det}L_\theta|u_\theta^{\mathcal{R}}\text{area}(\mathcal{R}_\theta)$$

e, similmente

$$u_\theta^{\mathcal{S}'}\text{area}(\mathcal{S}'_\theta) = \ell^1_\theta|\text{det}L_\theta|u_\theta^{\mathcal{S}}\text{area}(\mathcal{S}_\theta)$$

da cui si ottiene subito:

$$u_\theta^{\mathcal{R}'}\text{area}(\mathcal{R}'_\theta) : u_\theta^{\mathcal{S}'}\text{area}(\mathcal{S}'_\theta) = u_\theta^{\mathcal{R}}\text{area}(\mathcal{R}_\theta) : u_\theta^{\mathcal{S}}\text{area}(\mathcal{S}'_\theta).$$

Supponiamo ora che

$$u_\theta^{\mathcal{R}'}\text{area}(\mathcal{R}'_\theta) : u_\theta^{\mathcal{S}'}\text{area}(\mathcal{S}'_\theta) = u_\theta^{\mathcal{R}}\text{area}(\mathcal{R}_\theta) : u_\theta^{\mathcal{S}}\text{area}(\mathcal{S}_\theta) = \ell$$

sia indipendente da θ. Dalla parte precedente otteniamo:

$$\text{vol}(W') = \int_{\theta_0}^{\theta_1} u_\theta^{\mathcal{R}'}\text{area}(\mathcal{R}'_\theta)d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \ell u_\theta^{\mathcal{S}'}\text{area}(\mathcal{S}'_\theta)d\theta = \ell\text{vol}(V')$$

e similmente:

$$\text{vol}(W) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} u_\theta^{\mathcal{R}}\text{area}(\mathcal{R}_\theta)d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \ell u_\theta^{\mathcal{S}}\text{area}(\mathcal{S}_\theta)d\theta = \ell\text{vol}(V)$$

ossia

$$\text{vol}(W') : \text{vol}(V') = \text{vol}(W) : \text{vol}(V)$$

che è quanto si voleva dimostrare.

Applichiamo il Criterio di Piero della Francesca alle regioni:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R} = \{(\xi,\eta) \mid 0 \le \xi \le r,\ -r \le \eta \le r\}\\
&\mathcal{S} = \{(\xi,\eta) \mid 0 \le \xi \le r,\ \xi^2+\eta^2 \le r^2\}\\
&\mathcal{R}'_\theta = \{(u,v) \mid 0 \le u \le \tfrac{r}{\cos\theta},\ -r \le v \le r\}\\
&\mathcal{S}'_\theta = \{(\xi,\eta) \mid 0 \le u \le \tfrac{r}{\cos\theta},\ u^2\cos^2\theta + v^2 \le r^2\}
\end{aligned}$$

con $-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ e

$$L_\theta(\xi,\eta) = \left(\frac{\xi}{\cos\theta}, \eta\right)$$

Dato che il rapporto $u^{\mathcal{R}}\mathrm{area}(\mathcal{R}) : u^{\mathcal{S}}\mathrm{area}(\mathcal{S})$ è ovviamente indipendente da θ (non c'è bisogno di calcolarlo!) dal principio di Piero della Francesca si ottiene:

$$\mathrm{vol}(W') : \mathrm{vol}(V') = \mathrm{vol}(W) : \mathrm{vol}(V).$$

Ma $W' = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le r, |y| \le x, 0 \le |z| \le r\}$ è un quarto del cubo di spigolo r e V' è un quarto della doppia volta. Invece $W = \{(x,y,z) \mid 0 \le x^2+y^2 \le r^2, |y| \le x, 0 \le |z| \le r\}$ è un quarto del cilindro di base $\{x^2+y^2 \le r^2\}$ e altezza $2r$ e $V = \{(x,y,z) \mid |y| \le x, x^2+y^2 \le x^2+y^2+z^2 \le r^2\}$ è un quarto della sfera di centro l'origine e raggio r. Otteniamo quindi:

$$\mathrm{vol}(W) : \mathrm{vol}(V) = \mathrm{vol}(\mathrm{Cilindro}) : \mathrm{vol}(\mathrm{Sfera}) = 2\pi r^3 : \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{3}{2}.$$

Pertanto

$$\mathrm{vol}(\mathrm{Cubo}) : \mathrm{vol}(\mathrm{DoppiaVolta}) : \mathrm{vol}(W') : \mathrm{vol}(V') = \frac{3}{2}$$

ossia

$$\mathrm{vol}(\mathrm{DoppiaVolta}) = \frac{2}{3}\mathrm{vol}(\mathrm{Cubo}) = \frac{2}{3}d^3.$$

Tutto questo senza calcolare un solo integrale!!!