Stabilità di Lyapunov

Flaviano Battelli

Dipartimento di Scienze Matematiche

Università Politecnica delle Marche

Ancona

Introduzione.

In queste note presentiamo i primi elementi della teoria della stabilità delle soluzioni di un equazione differenziale ordinaria le cui origini sono da attribuirsi a Lyapunov che ne diede la prima definizione e dimostrò i primi importanti teoremi alla fine del 1800 (Lyapunov discusse la sua tesi di PhD, contenente i suoi risultati sulla teoria della stabilità, nel 1892).

Euristicamente il concetto di stabilità descrive il comportamento di un'equazione differenziale nelle vicinanze di una assegnata soluzione. Intuitivamente una soluzione di una equazione differenziale è stabile se non risente di piccole perturbazioni: se si *parte vicino* ad una soluzione stabile il sistema continuerà a rimanere anche in futuro nelle vicinanze di quella soluzione. L'esempio più semplice è quello di una pallina disposta esattamente nel fondo di una valle, se la spostiamo di poco dal fondo può rotolare in basso ed oscillare ma non aumenta la sua distanza dal punto di equilibrio.

Stabilità e instabilità.

Consideriamo un equazione differenziale in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (t, x) \in I \times \Omega \tag{1}$$

dove I è un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ e Ω un sottinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$. È noto (*Teorema di esistenza ed unicità di Cauchy*) che se $f(t, x)$ è continua e localmente Lipschitziana in x uniformemente rispetto a t[1] allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \quad (t, x) \in I \times \Omega \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2}$$

ha un'*unica* soluzione $\varphi(t, t_0, x_0)$ definita in un intervallo (α, β) tale che $\alpha < t_0 < \beta$. Dall'unicità delle soluzioni segue che è possibile determinare, per ogni coppia $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, un intervallo (α, β) contenente t_0 e tale che la soluzione $\varphi(t, t_0, x_0)$ non possa estendersi ad una soluzione di (2) definita in un intervallo contenente propriamente (α, β). L'intervallo (α, β) si dice *intervallo massimale* della soluzione $\varphi(t, t_0, x_0)$.

Sia allora $\varphi(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$ una soluzione di (1) il cui intervallo massimale contenga (t_0, ∞). Diamo la seguente

Definizione. Dico che $\varphi(t)$ è *stabile* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni coppia $(t_1, x_1) \in I \times \Omega$ che soddisfa

$$|t_1 - t_0| + |x_1 - x_0| < \delta$$

[1] ossia per ogni sottinsieme chiuso e limitato $K \subset \Omega$ esiste una costante $L = L(K)$ tale che per ogni $t \in I$ ed ogni coppia di punti $x', x'' \in K$, risulta:

$$|f(t, x') - f(t, x'')| \leq L|x' - x''|,$$

la soluzione $\varphi(t, t_1, x_1)$ esiste per ogni $t \geq t_1$ ed inoltre

$$\sup_{t \geq \max\{t_0, t_1\}} |\varphi(t, t_1, x_1) - \varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon \tag{3}$$

Una soluzione $\varphi(t, t_0, x_0)$ di (1) si dice *instabile* se non è stabile ossia se *esiste* $\varepsilon > 0$ tale che *per ogni* $\delta > 0$ *esistono* t_1 ed x_1 con $|t_1 - t_0| + |x_1 - x_0| < \delta$ tali che *per ogni* $t^* \geq \max\{t_0, t_1\}$ *esiste* $t > t^*$ tale che $|\varphi(t, t_1, x_1) - \varphi(t, t_0, x_0)| \geq \varepsilon$.

Esempio Consideriamo il sistema in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -3y \\ \dot{y} = \frac{1}{3}x \end{cases}$$

che ha l'equilibrio $(x, y) = (0, 0)$ e la cui soluzione generale è $(x(t), y(t)) = c(3\cos t, \sin t)$. Infatti $\dot{x} = -3c\sin t = -3y$ e $\dot{y} = c\cos t = \frac{1}{3}x$. Le orbite sono quindi delle ellissi con centro in $(0, 0)$ e semiassi di lunghezza $3c$ e c. Pertanto $\sup_{t \in \mathbb{R}} |c(3\cos t, \sin t) - (0, 0)| = 3c$ e quindi

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |c(3\cos t, \sin t) - (0, 0)| < \varepsilon$$

se e solo se $c < \delta := \frac{\varepsilon}{3}$. Quindi se $|(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ risulta

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |c(3\cos t, \sin t) - (0, 0)| < \varepsilon$$

ma non si può scegliere un δ *migliore.*

Osservazione

I) Sia $I_{(t_0, x_0)} := (\alpha, \beta)$ l'intervallo massimale di una fissata soluzione $\varphi(t)$ di (1). La seguente proprietà è nota. Per ogni fissato compatto (i.e.*chiuso e limitato*) $K \subset \Omega$ esistono $\alpha_K > \alpha$ e $\beta_K < \beta$ tali che per ogni $t \in (\alpha, \beta)$ con $t < \alpha_K$ oppure $t > \beta_K$ risulta $\varphi(t) \notin K$. Tale proprietà si enuncia dicendo che per t che tende agli estremi del suo intervallo massimale, una soluzione esce *definitivamente* dai compatti. Se Ω e limitato ciò significa che la distanza di $\varphi(t)$ dalla frontiera $\partial\Omega$ di Ω tende a zero quando $t \to \alpha$ o $t \to \beta$. Da ciò segue che, se anche $\varphi(t, t_0, x_0)$ è definita per $t \geq t_0$ non è detto che $\varphi(t, t_1, x_1)$ sia definita per ogni $t \geq t_1$. Infatti per $t \to \infty$ la distanza di $\varphi(t, t_0, x_0)$ da $\partial\Omega$ potrebbe risultare $< \varepsilon$ e quindi $\varphi(t, t_0, x_0)$ potrebbe *raggiungere* $\partial\Omega$ in un tempo finito. Se invece

$$\operatorname{dist}(\varphi(t, t_0, x_0), \partial\Omega) = \inf\{|\varphi(t, t_0, x_0) - y| \mid y \in \partial\Omega\} > \varepsilon_0 > 0,$$

(ossia $\varphi(t, t_0, x_0)$ resta *distante* da $\partial\Omega$), e vale la (3) per ogni $t \in I_{(t_1,x_1)}$, allora scegliendo $\varepsilon < \varepsilon_0$ si deduce che, per $\delta > 0$ sufficientemente piccolo $\varphi(t, t_1, x_1)$ è definita per ogni $t \geq t_1$. Se invece $\Omega = \mathbb{R}^n$ allora la (3) implica che $\varphi(t, t_1, x_1)$ è definita per ogni $t \geq t_1$ (e anche $t \geq t_0$ se $t_1 > t_0$), purché $|t_1 - t_0| + |x_1 - x_0| < \delta$.

II) Il teorema di Cauchy dice che è definita una *funzione*, detta *flusso*

$$\Phi : I \times \Omega \to C^0(I_{(t_0,x_0)}, \Omega)$$

$\Phi(t_0, x_0)(t) := \varphi(t, t_0, x_0)$, dove $C^0(I_{(t_0,x_0)}, \Omega)$ è lo spazio delle funzioni continue definite nell'intervallo massimale $I_{(t_0,x_0)}$ di esistenza della soluzione di (2), e a valori in Ω. Si noti che Φ non è una vera funzione perché il codominio cambia al variare del punto del dominio. Tuttavia dal teorema di esistenza e unicità segue

$$\Phi(s, \Phi(\bar{t}, \bar{x})(s))(t) = \Phi(\bar{t}, \bar{x})(t) \tag{4}$$

per ogni $(\bar{t}, \bar{x}) \in I \times \Omega$ e $(t, s) \in I \times I$ per i quali $\Phi(s, \bar{t}, \bar{x})$ e $\Phi(t, \bar{t}, \bar{x})$ sono definiti (ossia per ogni $s, t \in I_{(\bar{t},\bar{x})}$). La (4) si scrive in modo più significativo come:

$$\varphi(t, s, \varphi(s, \bar{t}, \bar{x})) = \varphi(t, \bar{t}, \bar{x}).$$

Se $\Omega = \mathbb{R}^n$ e $\varphi(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$ è stabile, allora Φ è definita in un intorno U_δ di (t_0, x_0) e

$$\Phi : U_\delta \to C^0([t_0, \infty), \mathbb{R}^n)$$

è continua rispetto alla distanza della convergenza uniforme in $C^0([t_0, \infty), \mathbb{R}^n)$. Ossia se $\Omega = \mathbb{R}^n$ e $\varphi(t)$ è stabile allora

$$\lim_{(\bar{t},\bar{x})\to(t_0,x_0)} \varphi(t, \bar{t}, \bar{x}) = \varphi(t, t_0, x_0)$$

uniformemente rispetto a $t \geq t_0$. Ricordiamo che dal teorema di dipendenza continua, segue invece che

$$\lim_{(\bar{t},\bar{x})\to(t_0,x_0)} \varphi(t, \bar{t}, \bar{x}) = \varphi(t, t_0, x_0)$$

uniformemente nei sottinsiemi *compatti* di $[t_0, \infty)$. La condizione di stabilità corrisponde quindi ad un diverso *concetto di limite*, più forte rispetto a quello della convergenza uniforme sui compatti.

III) Supponiamo che $\varphi(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$ abbia la seguente proprietà:

s) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $|\bar{x} - x_0| < \delta$ allora $|\varphi(t, t_0, \bar{x}) - \varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$.

È chiaro che se $\varphi(t)$ è stabile allora $\varphi(t)$ ha la proprietà s). Viceversa supponiamo che $\varphi(t)$ abbia la proprietà s). Dalla (4) sappiamo che

$$\varphi(t, t_1, x_1) = \varphi(t, t_0, \varphi(t_0, t_1, x_1)).$$

Sia allora $\varepsilon > 0$ e scegliamo δ in modo che valga s). Posto $\bar{x} = \varphi(t_0, t_1, x_1)$, dal teorema di dipendenza continua segue che esiste $\delta_1 > 0$ tale che se $|t_1 - t_0| < \delta_1$ allora $|\bar{x} - x_1| < \frac{\delta}{2}$ (si noti che $x_1 = \varphi(t_0, t_0, x_1)$) e quindi, valendo s)

$$|\varphi(t, t_1, x_1) - \varphi(t)| = |\varphi(t, t_0, \bar{x}) - \varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon.$$

purché $|t_1 - t_0| < \delta_1$ e $|x_0 - x_1| < \frac{\delta}{2}$. In conclusione possiamo dire che $\varphi(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$ è stabile se e solo se vale la condizione s).

La definizione di stabilità risulta un po' troppo generale per molti scopi concreti. Risulta allora utile dare una definizione più forte.

Definizione. Una soluzione $\varphi(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$ di (1) si dice *asintoticamente stabile* se **è stabile** ed esiste $\delta_0 > 0$ tale che

$$\lim_{t \to \infty} |\varphi(t, t_1, x_1) - \varphi(t, t_0, x_0)| = 0 \tag{5}$$

quando $|t_1 - t_0| + |x_1 - x_0| < \delta_0$.

Osservazione. a) La definizione di stabilità asintotica è veramente restrittiva. Infatti supponiamo che $\varphi(t, t_0, x_0)$ sia una soluzione periodica non costante di periodo $T > 0$ di (1).[2] Sia $x_1 = \varphi(t_1, t_0, x_0)$. Dalla dipendenza continua segue che se $|t_1 - t_0| < \delta' < \frac{\delta}{2}$

[2] Un argomento simile si applica alle soluzioni *quasi periodiche* ossia con la seguente proprietà: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $L = L_\varepsilon$ tale che in ogni intervallo I di lunghezza $\mu(I) \geq L$ esiste $\tau \in I$ tale che

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t + \tau) - \varphi(t)| < \varepsilon.$$

Ovviamente soluzioni periodiche sono anche quasi periodiche. Basta prendere $L = T$ e scegliere $\tau = mT \in I$ con m opportuno.

allora $|x_1 - x_0| < \frac{\delta}{2}$. Avremo però:

$$\varphi(t, t_1, x_1) = \varphi(t, t_1, \varphi(t_1, t_0, x_0)) = \varphi(t, t_0, x_0)$$

e quindi

$$\varphi(t_1 + mT, t_1, x_1) = \varphi(t_1 + mT, t_0, x_0) = \varphi(t_1, t_0, x_0) = x_1$$

mentre

$$\varphi(t_0 + mT, t_0, x_0) = x_0$$

e pertanto (5) non può valere.

b) Consideriamo l'equazione (di Bernouilli) $\dot{x} = -x + x^2$ che ha le soluzioni costanti $x_0 = 0$ e $\hat{x}_0 = 1$. Ogni altra soluzione si scrive $x(t) = \frac{k}{k+e^t}$ con $k \in \mathbb{R}$. Più precisamente $\varphi(t, 0, x) = \frac{x}{x+(1-x)e^t}$ e

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t, 0, x) = 0 = x_0$$

qualunque sia $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, ma

$$\lim_{t\to\log\left(\frac{x}{x-1}\right)^{\pm}} \varphi(t, 0, x) = \pm\infty.$$

In altre parole: se $\log\left(\frac{x}{x-1}\right) > 0$ la soluzione $\varphi(t, 0, x)$ tende a x_0 per $t \to \infty$ ma non resta in un intorno di x_0 per ogni $t \geq 0$. Notiamo che questo accade solo se $x > 1$ (altrimenti $\log\left(\frac{x}{x-1}\right) \leq 0$) e quindi questo non esclude che $x_0 = 0$ sia stabile (né esclude che sia asintoticamente stabile).

c) Nell'esempio precedente le soluzioni che non restano in un intorno dell'equilibrio diventano illimitate per $t \to t^* = \log\left(\frac{x}{x-1}\right) \in \mathbb{R}$. È possibile dare esempi di sistemi dinamici le cui soluzioni sono definite per ogni $t \in \mathbb{R}$ e con un punto di equilibrio attrattivo ma non stabile. Ad esempio si consideri il sistema dinamico espresso dall' equazione differenziale sulla circonferenza data da:

$$\dot{\theta} = 1 - \cos\theta$$

[questa equazione descrive il flusso di un campo vettoriale sulla circonferenza che la percorra tutta in senso orario e si annulla nel solo punto di equilibrio $\theta = 0$.] Ovviamente $\theta = 0$ un punto di equilibrio e le orbite che partono da qualsiasi altro punto della circonferenza vi convergono "dal basso" girando in senso orario. Quindi $\lim_{t\to\infty} \theta(t) = 0$ e

$0 \leq \theta(t) < 2\pi$ qualunque sia la soluzione $\theta(t)$ che si considera ma $\theta = 0$ è instabile visto che tutte le orbite che partono da punti $\theta_0 \in (0, \pi/2)$ (arbitrariamente vicini) si allontanano uscendo da qualsiasi intorno prefissato di raggio sufficientemente piccolo.

L'osservazione a) precedente porta naturalmente a dare altre definizioni di stabilità utili nel caso di soluzioni periodiche quali ad esempio la *stabilità orbitale* e la *stabilità orbitale asintotica*, concetti sui quali non ci addentriamo in queste note.

Consideriamo ora il caso che il sistema (1) sia autonomo (ossia $f(t,x) = f(x)$ è indipendente dal tempo). In tal caso si ha $\varphi(t, \bar{t}, \bar{x}) = \varphi(t - \bar{t}, 0, \bar{x}) = \phi(t - \bar{t}, \bar{x})$. D'ora in avanti ci occuperemo della stabilità delle soluzioni costanti di

$$\dot{x} = f(x) \tag{6}$$

dette anche *equilibri* del sistema. Ovviamente una soluzione costante $\phi(t, x_0) = x_0$ soddisfa $f(x_0) = 0$ e viceversa se $f(x_0) = 0$ allora $\phi(t, x_0) = x_0$. Sia $x_0 \in \Omega$ un equilibrio di (6). Diamo la seguente

Definizione. a) Una funzione $V : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice *semidefinita positiva* se per ogni $x \in \Omega$ risulta $V(x) \geq 0$. Si dice *definita positiva* se $V(x) \geq 0$ e $V(x) = 0$ se e solo se $x = x_0$ (ossia $V(x)$ ha un minimo stretto in $x = x_0$). $V : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice *semidefinita negativa* se $-V(x)$ è semidefinita positiva, si dice *definita negativa* se $-V(x)$ è definita positiva.
b) Una funzione di classe C^1, $V : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice *funzione di Lyapunov* di (6) (in Ω) se

1) è definita positiva in Ω;

2) $\dot{V}(x) := \langle \nabla V(x), f(x) \rangle$ è semidefinita negativa in Ω.

Consideriamo la funzione composta $V(\phi(t, x_0))$. Dal teorema della derivata totale si ha

$$\frac{d}{dt} V(\phi(t, x_0)) = \langle \nabla V(\phi(t, x_0)), f(\phi(t, x_0)) \rangle$$

e quindi $V(\phi(t, x_0))$ è una funzione decrescente di t fintanto che $\phi(t, x_0) \in \Omega$. La funzione $\dot{V}(x)$ definita in 2) si dice *derivata di $V(x)$ lungo le traiettorie di* (6). Nel seguito con $B(x_0, r)$ indicheremo la palla di raggio r centrata in x_0. Si ha il seguente importante teorema.

Teorema. (di Lyapunov) *Supponiamo che* $V : \Omega \to \mathbb{R}$ *sia una funzione di Lyapunov per (6). Allora* x_0 *è un equilibrio stabile di (6). Se poi* $\dot{V}(x)$ *è definita negativa, allora* x_0 *è asintoticamente stabile.*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$ (tale che $B(x_0, \varepsilon) \subset \Omega$) e poniamo

$$c_\varepsilon = \min\{V(x) \mid |x - x_0| = \varepsilon\}.$$

Dato che $V(x)$ è definita positiva si ha $c_\varepsilon > 0$. Per la continuità di $V(x)$, in corrispondenza di c_ε esisterà $\delta > 0$ tale che se $|x - x_0| < \delta$ allora $0 \leq V(x) < c_\varepsilon$. Sia allora $x_1 \in B(x_0, \delta)$. Supponiamo che $\phi(t, x_1) \notin B(x_0, \varepsilon)$ per qualche $t > 0$ e sia $T = \inf\{t > 0 \mid \phi(t, x_1) \notin B(x_0, \varepsilon)\}$. Si ha $T > 0$, $\phi(t, x_1) \in B(x_0, \varepsilon)$ per $0 \leq t < T$ e $|\phi(T, x_1) - x_0| = \varepsilon$. Ma da:

$$V(\phi(T, x_1)) - V(x_1) = \int_0^T \dot{V}(\phi(s, x_1)) ds \leq 0$$

otteniamo $c_\varepsilon \leq V(\phi(T, x_1)) \leq V(x_1) < c_\varepsilon$: assurdo. Quindi l'equilibrio x_0 è stabile. Supponiamo ora che $\dot{V}(x)$ sia definita negativa e sia $x_0 \neq x_1 \in B(x_0, \delta)$ ($\delta = \delta(r/2)$). La funzione $V(\phi(t, x_1))$ ha derivata negativa, quindi è decrescente ed esiste finito $c = \lim\limits_{t\to\infty} V(\phi(t, x_1)) = \inf\limits_{t \geq 0} V(\phi(t, x_1)) \geq 0$. Supponiamo $c > 0$, allora esiste $\rho > 0$ (e $< \delta$) tale che $|\phi(t, x_1) - x_0| > \rho$ per ogni $t \geq 0$ ed anzi $\rho < |\phi(t, x_1) - x_0| < \varepsilon$ per ogni $t \geq 0$. Sia $\sigma = \max\{\dot{V}(x) \mid \rho \leq |x - x_0| \leq \varepsilon\} < 0$. Si ha

$$V(\phi(t, x_1)) = V(x_1) + \int_0^t \dot{V}(\phi(s, x_1)) ds \leq V(x_1) + \sigma t \to -\infty$$

quando $t \to \infty$: assurdo perché $V(\phi(t, x_1)) \geq 0$ per ogni $t \geq 0$. Di conseguenza

$$\lim_{t\to\infty} V(\phi(t, x_1)) = 0.$$

Supponiamo che $\lim_{t\to\infty} \phi(t, x_1) \neq x_0$. Allora si può trovare una successione crescente $t_n \to \infty$ tale che $0 < \inf\{|\phi(t_n, x_1) - x_0|\} \leq \sup\{|\phi(t_n, x_1) - x_0|\} < \frac{r}{2}$. Dal Teorema di Bolzano–Weierstrass possiamo supporre (passando eventualmente ad una sottosuccessione) che $\lim\limits_{n\to\infty} \phi(t_n, x_1) = \bar{x}$. Si ha: $|\bar{x} - x_0| > 0$ e quindi $0 < V(\bar{x}) = \lim\limits_{n\to\infty} V(\phi(t_n, x_1)) = 0$: assurdo. Con ciò la dimostrazione del Teorema è completa.

Il teorema di Lyapunov non permette talvolta di dimostrare la stabilità asintotica di una soluzione di (6). Se ad esempio consideriamo il sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\sin x_1 - \kappa x_2 \end{aligned}$$

la funzione $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + 1 - \cos x_1$ è una funzione di Lyapunov ma $\dot{V}(x_1; x_2) = -\kappa x_2^2 \leq 0$ e quindi $\dot{V}$ è solo *semidefinita negativa* ma non è definita negativa. Il sistema dell'esempio descrive il comportamento di un pendolo smorzato dove x_1 rappresenta lo spostamento (angolo) dalla posizione di equilibrio e $x_2 = \dot{x}_1$ la velocità angolare. Dal punto di vista fisico, quindi, l'equilibrio $x_1 = x_2 = 0$ deve essere asintoticamente stabile. È chiaro che il problema risiede nella scelta della funzione di Lyapunov. Tuttavia dal punto di vista pratico è meglio se riusciamo a provare la stabilità asintotica utilizzando la funzione $V(x_1, x_2)$ invece di cercarne un'altra (si noti che $V(x_1, x_2)$ non è altro che l'*energia meccanica* del sistema).
Diamo la seguente
Definizione. Un sottinsieme $S \subset \Omega$ si dice *localmente positivamente invariante* se per ogni $x \in S$ esiste $T > 0$ tale che $\phi(t, x) \in S$ per ogni $t \in [0, T)$. Si dice *positivamente invariante* se si può prendere $T = T''_x := \sup I_x$ (dove $I_x := I_{(0,x)}$ è l'intervallo massimale della soluzione $\phi(t, x) = \varphi(t, 0, x)$). $S \subset \Omega$ si dice *localmente negativamente invariante* se per ogni $x \in S$ esiste $T > 0$ tale che $\phi(t, x) \in S$ per ogni $t \in (-T, 0]$. Si dice *negativamente invariante* se si può prendere $T = T'_x := \inf I_x$. Si dice *localmente invariante* se è sia localmente positivamente invariante che localmente negativamente invariante. Si dice *invariante* se è sia positivamente che negativamente invariante.
Osservazione.

a) Sia $S \subset \Omega$ un sottinsieme localmente positivamente invariante. Se $\phi(T, x) \in S$ continuerà ad aversi $\phi(t, x) \in S$ per $0 \leq t < T_1$ con $T_1 > T$. Posto $T_{\max} := \max\{T \mid \phi(t, x) \in S \text{ per ogni } 0 \leq t < T\}$, si hanno i seguenti casi

   $T_{\max} < T''_x$. Ciò significa che $\phi(T_{\max}, x) \in \Omega$ ma $\phi(T_{\max}, x) \notin S$ ossia[3] $\phi(T_{\max}, x) \in \partial S \setminus S$ ed esiste un punto $(\phi(T_{\max}, x))$ in $\Omega \cap \partial S$. In altre parole

[3]Qui c'è un problema perché occorre definire la frontiera di S come spazio topologico a sé stante e non come sottinsieme di Ω. Preferiamo evitare di entrare nei dettagli confidando che il lettore riesca

$\phi(t,x)$ può *uscire* da S solo attraverso la sua frontiera.

$T_{\max} = T''_x$. In questo caso S è positivamente invariante. Inoltre se S è compatto allora $T_{\max} = \infty$.

b) Un'osservazione analoga vale quando si considerino insiemi localmente negativamente invarianti.

c) Se S è un sottinsieme invariante e compatto, allora per ogni $x \in S$, $\phi(t,x)$ è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$ e $\phi(t,x) \in S$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Sia $\phi(t)$ una soluzione *limitata* di (6) (e quindi definita per ogni $t \geq 0$). Definiamo

$$\omega_\phi = \{x \in \Omega \mid \text{esiste una successione } t_n \text{ divergente a } \infty \text{ tale che } \lim_{n\to\infty} \phi(t_n) = x\}.$$

Si ha il seguente importante risultato:

Teorema. *Sia* Ω_0 *tale che* $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$ *e sia* $\phi(t)$ *una soluzione limitata di (6) tale che* $\phi(t) \in \Omega_0$ *per ogni* $t \geq 0$. *Allora* ω_ϕ *è un sottinsieme non vuoto, compatto e invariante di* $\overline{\Omega}_0$.

Dimostrazione. 1) Proviamo che ω_ϕ è non vuoto. Sia t_n una successione tale che $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$. Dato che $\phi(t)$ è limitata, dal teorema di Bolzano–Weierstrass segue che possiamo trovare una sottosuccessione t_{n_k} tale che $\phi(t_{n_k})$ converge. Ovviamente $\lim_{k\to\infty} \phi(t_{n_k}) \in \omega_\phi$. Quindi ω_ϕ è non vuoto. È anche ovvio che ω_ϕ è un sottinsieme limitato di $\overline{\Omega}_0$. 2) Proviamo che ω_ϕ è chiuso (questo prova anche che è compatto visto che è limitato). Sia $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$ con $x_k \in \omega_\phi$. Sia $t_n^{(k)}$ una successione divergente a ∞ tale che

$$\lim_{n\to\infty} \phi(t_n^{(k)}) = x_k.$$

Possiamo quindi trovare $t_k := t_{n_k}^{(k)}$ tale che $t_k > k$ (e quindi $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$) e $|\phi(t_k) - x_k| < \frac{1}{k}$. Si ha poi

$$|\phi(t_k) - x| \leq |\phi(t_k) - x_k| + |x_k - x| \leq \frac{1}{k} + |x_k - x| \to 0$$

quando $k \to \infty$. Pertanto $x \in \omega_\phi$. 3) Proviamo infine che ω_ϕ è invariante. Supponiamo, per fissare le idee che $t > 0$ (una dimostrazione analoga vale per $t < 0$) e sia $x \in \omega_\phi$. Sia

comunque a capire il senso dell'osservazione. In fondo qualcosa di simile il lettore l'ha incontrato quando ha parlato di superfici e di Teorema di Stokes.

t_n una successione divergente a ∞ tale che $\lim_{n\to\infty} \phi(t_n) = x$. Dal teorema di dipendenza continua segue che per ogni $s \in [0,t]$ si ha

$$\sup_{s\in[0,t]} |\varphi(s,\phi(t_n)) - \varphi(s,x)| \to 0$$

quando $n \to \infty$. La conclusione segue osservando che $\varphi(s,\phi(t_n)) = \phi(s+t_n)$ e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \phi(t+t_n) = \varphi(t,x)$$

con $t + t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$.

Supponiamo che $\phi(t)$ sia una soluzione di (6) tale che $\phi(t) \in \Omega_0 \subset \overline{\Omega}_0 \subset \Omega$ per ogni $t \geq 0$ dove Ω_0 e Ω sono come nel Teorema precedente. Vale il seguente risultato:

Teorema. *Sia $V : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $\dot{V}(x) \leq 0$ per ogni $x \in \overline{\Omega}_0$. Allora $\dot{V}(x) = 0$ per ogni $x \in \omega_\phi$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\bar{x} \in \omega_\phi \subset \overline{\Omega}_0$ (v. Teorema precedente) e che $\dot{V}(\bar{x}) = -2\kappa < 0$. Siano $\rho > 0$ tale che $\dot{V}(x) = -\kappa < 0$ per ogni $x \in B(\bar{x},\rho) \cap \overline{\Omega}_0$, $\tau > 0$ tale che $\varphi(t,\bar{x}) \in B(\bar{x},\frac{\rho}{2}) \cap \Omega_0$ per ogni $t \in [0,\tau]$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione crescente tale che

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \phi(t_n) = \bar{x}.$$

Dato che $t_n \to \infty$ possiamo supporre che $t_{n+1} - t_n > \tau$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dal teorema di dipendenza continua dai dati segue che esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \nu$ risulta:

$$\sup_{s\in[0,\tau]} |\varphi(s,\phi(t_n)) - \varphi(s,\bar{x})| < \frac{\rho}{2}.$$

Dato che $\varphi(t,\phi(t_n)) = \phi(t+t_n)$, si ha, per ogni $t \in [0,\tau]$ e $n > \nu$:

$$|\phi(t+t_n) - \bar{x}| \leq |\phi(t+t_n) - \varphi(t,\bar{x})| + |\varphi(t,\bar{x}) - \bar{x}| < \rho.$$

Di conseguenza $\phi(t+t_n) \in B(\bar{x},\rho) \cap \Omega_0$ e pertanto $\dot{V}(\phi(t+t_n)) < -\kappa$ per ogni $t \in [0,\tau]$ e $n > \nu$. Quindi:

$$V(\phi(t_{n+1})) - V(\phi(t_n)) = \int_0^{t_{n+1}-t_n} \dot{V}(\phi(s+t_n))ds \leq \int_0^{\tau} \dot{V}(\phi(s+t_n))ds < -\kappa\tau$$

dove si è usato il fatto che $t_{n+1} - t_n > \tau$, $\dot{V}(x) \leq 0$ per ogni $x \in \Omega$ e $\dot{V}(x) < -\kappa$ per ogni $x \in B(\bar{x}, \rho)$. Passando al limite per $n \to \infty$ otteniamo $0 \leq -\kappa\tau$: assurdo.
Osservazione: Cambiando $V(x)$ con $-V(x)$ si prova che se $\dot{V}(x) \geq 0$ su $\overline{\Omega}_0$ allora $\dot{V}(x) = 0$ su ω_ϕ.
Possiamo ora provare il seguente teorema
Teorema. (Krasovsky) *Sia $V(x)$ una funzione di Lyapunov per il sistema* (6). *Se $\{x_0\}$ è l'unico sottinsieme invariante di Ω contenuto in $\mathcal{M} := \{x \in \Omega \mid \dot{V}(x) = 0\}$, allora x_0 è asintoticamente stabile.*
Dimostrazione. Sappiamo già che x_0 è stabile. Siano $\varepsilon, \delta > 0$ tale che se $x \in B(x_0, \delta)$ allora $\phi(t) := \varphi(t, x) \in B(x_0, \varepsilon) \subset \overline{B(x_0, \varepsilon)} \subset \Omega$ per ogni $t \geq 0$. Quindi $\varphi(t, x)$ è limitata ed il suo insieme $\omega-$limite ω_ϕ è non vuoto, compatto ed invariante. Dal teorema precedente sappiamo anche che $\omega_\phi \subset \mathcal{M}$. Dato che non esistono insiemi invarianti contenuti in $\mathcal{M}$ e diversi da $\{x_0\}$ risuta: $\omega_\phi = \{x_0\}$. Ossia per ogni successione $t_n \to \infty$ tale che $\lim_{n\to\infty} \varphi(t_n, x)$ converge, risulta:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(t_n, x) = x_0.$$

Quindi $\lim_{t\to\infty} \varphi(t, x) = x_0$. Ciò prova il teorema.

Dimostriamo infine un teorema di stabilità globale:
Teorema. (Krasovsky) *Supponiamo che* (1) *sia definito per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e che $V(x)$ sia una funzione di Lyapunov di* (1) *tale che*

- $\{x_0\}$ *è l'unico sottinsieme invariante di $\mathbb{R}^n$ contenuto in $\mathcal{M} := \{x \in \Omega \mid \dot{V}(x) = 0\}$*
- $\lim\limits_{x\to\infty} V(x) = \infty$

Allora per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha $\lim\limits_{t\to\infty} \phi(t, x) = x_0$.
Dimostrazione. Sia $x \in \mathbb{R}^n$ e scegliamo $r > 0$ tale che per ogni $z \notin B(x_0, r)$ risulti $V(z) > V(x)$. L'esistenza di un tale $r > 0$ segue dall'ipotesi $\lim_{x\to\infty} V(x) = \infty$. Dato che $V(\phi(t, x))$ è decrescente e $V(\phi(0, x)) = V(x)$ avremo $\phi(t, x) \in B(x_0, r)$ per ogni $t \geq 0$. $\phi(t, x)$ è quindi limitata e il suo insieme $\omega-$limite è non vuoto e contenuto in $\mathcal{M}$. La tesi segue subito dal fatto che $\{x_0\}$ è l'unico sottinsieme invariante di $\mathbb{R}^n$ contenuto in $\mathcal{M}$.

Proviamo ora un teorema di *instabilità.*

Teorema. (Četaev) *Siano $x_0 \in \Omega$ un equilibrio di (6) e $U \subset \Omega$ un sottinsieme positivamente invariante di (6) contenuto in Ω avente x_0 come punto di accumulazione. Sia poi $V : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che $V(x_0) = 0$ e*

$$V(x) > 0 \text{ per ogni } x \in U \text{ e } \dot{V}(x) > 0 \text{ per ogni } x \in \overline{U} \setminus \{x_0\}.$$

Allora x_0 è un equilibrio instabile di (6).

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $\overline{B(x_0, \varepsilon)} \subset \Omega$ e sia $\delta < \varepsilon$. Dato che x_0 è un punto di accumulazione di U possiamo trovare $\bar{x} \in U \cap B(x_0, \delta)$, $\bar{x} \neq x_0$. Sia $0 < \delta' < \delta$ tale che per ogni $x \in B(x_0, \delta')$ risulti $V(x) < V(\bar{x})$. Supponiamo, per assurdo, che $\phi(t, \bar{x}) \in B(x_0, \varepsilon)$ per ogni $t \geq 0$. Dato che U è positivamente invariante avremo anche $\phi(t, \bar{x}) \in B(x_0, \varepsilon) \cap U$ per ogni $t \geq 0$ e quindi $\frac{d}{dt} V(\phi(t, \bar{x})) > 0$. Pertanto $V(\phi(t, \bar{x}))$ è strettamente crescente e $V(\phi(t, \bar{x})) \geq V(\bar{x})$ per ogni $t \geq 0$. Di conseguenza $\delta' \leq |\phi(t, \bar{x}) - x_0| \leq \varepsilon$. L'insieme $\omega-$limite ω_ϕ di $\phi(t, \bar{x})$ è quindi contenuto nell'insieme compatto $[\overline{B(x_0, \varepsilon)} \setminus B(x_0, \delta')] \cap \overline{U}$. Su questo compatto $\dot{V}(x)$ avrebbe un minimo positivo mentre, in base al Teorema precedente il primo dei due teoremi di Krasowky, su ω_ϕ dovrebbe aversi $\dot{V}(x) = 0$: assurdo.

Osservazione. Per poter applicare il teorema di Četaev occorre costruire un insieme positivamente invariante U dove una certa funzione $V(x)$ soddisfa le condizioni del teorema precedente. A tal scopo, di solito, si costruisce una funzione $V : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che

l'insieme $U := \{x \in \Omega \mid V(x) > 0\}$ è non vuoto e ha x_0 come punto di accumulazione;

$\dot{V}(x) > 0$ per ogni $x \in \Omega \setminus \{x_0\}$.

In tal caso U è invariante e, chiaramente, le condizioni del Teorema di Četaev sono soddisfatte. Per provare l'invarianza di U, supponiamo che $x \in U$ e che $V(\phi(t, x)) > 0$ per $0 \leq t < \bar{t}$ e $V(\phi(\bar{t}, x)) = 0$ allora $\phi(t, x) \in U$ per $0 \leq t < \bar{t}$ e quindi $\dot{V}(\phi(t, x)) > 0$ per $0 \leq t < \bar{t}$. Pertanto $V(\phi(t, x))$ è crescente in $[0, \bar{t}]$ e $V(\phi(\bar{t}, x)) > V(x) > 0$ che è in contraddizione con $V(\phi(\bar{t}, x)) = 0$.

Forme quadratiche e funzioni di Lyapunov

Ricordiamo che assegnata una matrice $A \in \mathcal{M}^{n\times n}$, esiste una matrice invertibile $P \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{C})$ a coefficienti complessi tale che

$$P^{-1}AP = D := \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & D_p \end{pmatrix} \tag{7}$$

dove D_k è una matrice quadrata $n_k \times n_k$, $n_1 + \dots n_p = n$ e $D_k = \lambda_k \mathbb{I} + J_k$, dove λ_k è un autovalore (complesso) di A, $\mathbb{I}$ è la matrice identità di ordine n_k e

$$J_k := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Se A è a coefficienti reali e i suoi autovalori sono reali allora anche la matrice P è a coefficienti reali. Consideriamo la matrice $D = \lambda\mathbb{I} + J$, dove $\mathbb{I}, J \in \mathcal{M}^{d\times d}$ è come in (8), e $\lambda \in \mathbb{C}$. Vale il seguente risultato:

Lemma. *Supponiamo che $\Re e\lambda < 0$. Allora esistono $\delta > 0$ e una matrice hermitiana*[4] *Q tale che per ogni $z \in \mathbb{C}^d$ si ha*[5]

a) $\langle Qz, z\rangle \geq \delta|z|^2$,

b) $\langle (D^*Q + QD)z, z\rangle \leq -2\delta|z|^2$.

Dimostrazione. Per induzione sul numero delle componenti di z. Se $z \in \mathbb{C}$ poniamo $Q = 1$ ossia $\langle Qz, z\rangle = |z|^2$. È chiaro che a) è soddisfatta con $\delta = 1$. D'altronde si ha (si

[4]ossia, posto $Q = [q_{ij}]$ si ha $q_{ji} = \overline{q_{ij}}$. Qui e nel seguito data una matrice $M = [m_{ij}]$ poniamo $M^* = [\overline{m_{ji}}]$, cosicché Q è hermitiana se e solo se $Q^* = Q$.

[5]Ricordiamo che dati $z, \zeta \in \mathbb{C}^d$ si definisce $\langle z, \zeta\rangle = \sum_{i=1}^{d} z_j\overline{\zeta_i}$.

noti che in questo caso $D = (\lambda) \in \mathcal{M}^{1\times1}$ e $D^* = (\bar{\lambda}) \in \mathcal{M}^{1\times1}$):

$$\langle (D^*Q + QD)z, z\rangle = 2(\Re e\lambda)|z|^2 \leq -2|\Re e\lambda||z|^2$$

e quindi a) e b) seguono con $\delta = \min\{1, |\Re e\lambda|\}$. Supponiamo ora che il risultato valga se $z \in \mathbb{C}^{d-1}$. Scriviamo $z = (z_1, z_2)$ dove $z_1 \in \mathbb{C}$ e $z_2 \in \mathbb{C}^{d-1}$ e siano $\delta_2 > 0$ e Q_2 una matrice hermitiana definita positiva tali che

$$\langle Q_2 z_2, z_2\rangle \geq \delta_2 |z_2|^2$$

e

$$\langle (D_2^* Q_2 + Q_2 D_2) z_2, z_2\rangle \leq -2\delta_2 |z_2|^2$$

dove $D_2 = \lambda \mathbb{I}_2 + J_2$ e $\mathbb{I}_2, J_2 \in \mathcal{M}^{(d-1)\times(d-1)}$. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e poniamo

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0^* \\ 0 & \alpha^2 Q_2 \end{pmatrix}$$

dove $0 \in \mathbb{R}^{m-1}$. In altre parole: $\langle Qz, z\rangle = |z_1|^2 + \alpha^2 \langle Q_2 z_2, z_2\rangle$ (si noti che se Q_2 è a coefficienti reali anche Q lo è). Si ha:

$$\langle Qz, z\rangle \geq |z_1|^2 + \alpha^2 \delta_2 |z_2|^2 \geq \min\{1, \alpha^2\delta_2\}|z|^2.$$

Ora calcoliamo $\langle (D^*Q + QD)z, z\rangle$. Si ha:

$$QD = \lambda Q + \begin{pmatrix} 1 & 0^* \\ 0 & \alpha^2 Q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e_1^* \\ 0 & J_2 \end{pmatrix} = \lambda Q + \begin{pmatrix} 0 & e_1^* \\ 0 & \alpha^2 Q_2 J_2 \end{pmatrix}$$

e

$$D^*Q = \bar{\lambda} Q + \begin{pmatrix} 0 & 0^* \\ e_1 & J_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^2 Q_2 \end{pmatrix} = \bar{\lambda} Q + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_1 & \alpha^2 J_2^* Q_2 \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$D^*Q + QD = 2(\Re e\lambda)Q + \begin{pmatrix} 0 & e_1^* \\ e_1 & \alpha^2(J_2^* Q_2 + Q_2 J_2) \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{aligned}
&\langle (D^*Q + QD)z, z\rangle = 2(\Re e\lambda)\langle Qz, z\rangle + 2\Re e(z_1\langle e_1, z_2\rangle) + \alpha^2\langle (J_2^* Q_2 + Q_2 J_2) z_2, z_2\rangle \\
&= 2(\Re e\lambda)[|z_1|^2 + \alpha^2\langle Q_2 z_2, z_2\rangle] + 2\Re e(z_1\langle e_1, z_2\rangle) + \alpha^2[\langle (D_2^* Q_2 + Q_2 D_2)) z_2, z_2\rangle - 2(\Re e\lambda)\langle Q_2 z_2, z_2\rangle] \\
&\leq 2(\Re e\lambda)|z_1|^2 + 2\Re e(z_1\langle e_1, z_2\rangle) - 2\alpha^2\delta_2|z_2|^2 \leq 2(\Re e\lambda)|z_1|^2 + 2|z_1||z_2| - 2\alpha^2\delta_2|z_2|^2 \\
&\leq 2(\Re e\lambda)(|z_1| + \tfrac{1}{2(\Re e\lambda)}|z_2|)^2 - 2\left(\alpha^2\delta_2 - \tfrac{1}{4|(\Re e\lambda)|}\right)|z_2|^2.
\end{aligned}$$

Quindi scegliendo α in modo che

$$\alpha^2 > \frac{1}{4|\Re e\lambda|\delta_2}$$

si ha $\langle (D^*Q + QD)z, z\rangle < 0$ se $z \neq 0$ e trattandosi di una forma quadratica reale, da ciò segue l'esistenza di $\delta > 0$ che soddisfa la tesi del teorema. Notiamo, per inciso, che se $\delta > 0$ soddisfa la tesi del Teorema allora ogni $\delta' \in (0, \delta]$ la soddisfa ugualmente.

Teorema. (esistenza di forme quadratiche definite positive e con derivata lungo le traiettorie definita negativa.) *Sia $A \in \mathcal{M}^{n\times n}$ una matrice a coefficienti reali che abbia solo autovalori con parte reale negativa. Allora esiste una matrice simmetrica $Q = Q^* \in \mathcal{M}^{n\times n}$ tale che*

a) $\langle Qx, x\rangle \geq \delta |x|^2$,

b) $\langle (A^*Q + QA)x, x\rangle \leq -2\delta |z|^2$.

Dimostrazione. Sia $P \in \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{C})$ (ossia una matrice $n \times n$ a coefficienti complessi) tale che $P^{-1}AP$ sia nella forma (7). Poniamo $z = (z_1, z_2, ..., z_p)$ dove $z_j = R_j x$ e

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_p \end{pmatrix} = P^{-1}.$$

Dal lemma precedente segue l'esistenza di $\delta_j > 0$ e di una matrice hermitiana $Q_j = Q_j^*$ tale che

c) $\langle Q_j z_j, z_j\rangle \geq \delta_j |z_j|^2$,

d) $\langle (D_j^* Q_j + Q_j D_j)z_j, z_j\rangle \leq -2\delta_j |z_j|^2$.

Per ogni $i = 1, ...p$, poniamo $V_i(x) = \langle Q_i R_i x, R_i x\rangle$ e:

$$\begin{aligned} V(x) &:= V_1(x) + \ldots + V_p(x) \\ &= \langle Q_1 R_1 x, R_1 x\rangle + ... + \langle Q_p R_p x, R_p x\rangle \\ &= \langle R_1^* Q_1 R_1 x, x\rangle + ... + \langle R_p^* Q_p R_p x, x\rangle \end{aligned}$$

È chiaro che $V(x)$ definita come sopra è una forma quadratica definita positiva perché tutti gli addendi sono forme quadratiche non negative che si annullano se e solo se $R_1 x = ... = R_p x = 0$ ossia se e solo se $x = 0$. Esiste quindi una matrice simmetrica $Q = Q^*$, a coefficienti reali, tale che $V(x) = \langle Qx, x\rangle$ (basta porre $q_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$). Per provare la b) osserviamo che $\langle (D_j^* Q_j + Q_j D_j) z_j, z_j\rangle$ è la derivata lungo le traiettorie del sistema lineare $\dot z_j = D_j z_j$ della funzione $V_j(z_j) = \langle Q_j z_j, z_j\rangle$, e d) significa che tale derivata è definita negativa. L'espressione $\langle (A^* Q + QA)x, x\rangle$ rappresenta invece la derivata della funzione $V(x) = V_1(R_1 x) + ... + V_p(R_p x)$ lungo le traiettorie di $\dot x = Ax$. Si ha quindi

$$\langle (A^* Q + QA)x, x\rangle = \langle \nabla V(x), Ax\rangle = \sum_{i=1}^{p} \langle \nabla V_i(R_i x), R_i A x\rangle.$$

Ora, dalla (7) si vede che $R_i A$ è l'i-esimo blocco della matrice $P^{-1}A = DP^{-1}$ ossia $R_i A = D_i R_i$ e pertanto

$$\begin{aligned} \langle (A^* Q + QA)x, x\rangle &= \sum_{i=1}^{p} \langle \nabla V_i(R_i x), D_i R_i x\rangle = \\ = \sum_{i=1}^{p} \langle \nabla V_i(z_i), D_1 z_i\rangle &= \sum_{i=1}^{p} \langle (D_j^* Q_j + Q_j D_j) z_j, z_j\rangle \le 0 \end{aligned}$$

e il segno uguale vale se e solo se $R_i x = z_i = 0$ per ogni $i = 1, ..., p$ ossia se e solo se $x = 0$ e quindi $\langle (A^* Q + QA)x, x\rangle$ è una forma quadratica definita negativa. Ciò conclude la dimostrazione.

Teorema. (Stabilità in prima approssimazione.) *Sia x_0 un equilibrio del sistema (6). Allora se gli autovalori della matrice Jacobiana $f'(x_0)$ di $f(x)$ in x_0 hanno tutti parte reale negativa, x_0 è un equilibrio asintoticamente stabile di (6).*

Dimostrazione. Poniamo $\xi = x + x_0$ e scriviamo $\dot x = f(x)$ nella forma

$$\dot \xi = f'(x_0)\xi + g(\xi) \tag{9}$$

dove $g(\xi) = f(\xi + x_0) - f(x_0) - f'(x_0)\xi$. Osserviamo che $\lim_{\xi \to 0} \dfrac{g(\xi)}{|\xi|} = 0$, quindi per ogni $\rho > 0$ esiste $\varepsilon = \varepsilon(\rho) > 0$ tale che se $|\xi| < \varepsilon$ allora $|g(\xi)| \le \rho|\xi|$. Sia Q una forma quadratica tale che $V(\xi) := \langle Q\xi, \xi\rangle \ge \delta |x|^2$ e $\langle (f'(x_0)^* Q + Qf'(x_0)^*)\xi, \xi\rangle \le -2\delta|\xi|^2$.

Calcolando $\dot{V}(\xi)$ lungo le traiettorie di (9) si ha:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\xi) &= [\xi^* f'(x_0)^* + g(\xi)^*]Q\xi + \xi^* Q[f'(x_0)\xi + g(\xi)] \\ &= \langle (f'(x_0)^* Q + Qf'(x_0))\xi, \xi\rangle + \langle Q\xi, g(\xi)\rangle + \langle Qg(\xi), \xi\rangle \\ &\leq 2|\xi|^2 \left(-\delta + \|Q\| \frac{|g(\xi)|}{|\xi|}\right) \leq 2|\xi|^2 \left(-\delta + \|Q\|\rho\right)\end{aligned}$$

Scegliendo $\rho = \frac{\delta}{2\|Q\|}$ si ha allora:

$$\dot{V}(\xi) \leq -\delta|\xi|^2$$

per ogni $\xi \in B(0, \varepsilon)$, $\varepsilon = \varepsilon\left(\frac{\delta}{\|Q\|}\right)$. La conclusione segue dal teorema di stabilità di Lyapunov.

Dal Teorema di Četaev otteniamo invece il seguente teorema:

Teorema. (Instabilità in prima approssimazione.) *Sia x_0 un equilibrio del sistema (6). Allora se esiste un autovalore della matrice Jacobiana $f'(x_0)$ di $f(x)$ in x_0 con parte reale positiva, x_0 è un equilibrio instabile di (6).*

Dimostrazione. Scriviamo ancora (6) nella forma (9) e poniamo $x = Py$. (9) si scrive:

$$\dot{y} = P^{-1} f'(x_0)Py + P^{-1}g(Py). \tag{10}$$

Scegliamo la matrice invertibile P in modo che

$$P^{-1} f'(x_0) P = \begin{pmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{pmatrix}$$

dove $A_+ \in \mathcal{M}^{k \times k}$ ($k \geq 1$) ha solo autovalori con parte reale positiva e $A_- \in \mathcal{M}^{(n-k)\times(n-k)}$ solo autovalori con parte reale negativa. Scriviamo (10) come

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = A_+ y_1 + g_1(y_1, y_2) \\ \dot{y}_2 = A_- y_2 + g_2(y_1, y_2) \end{cases} \tag{11}$$

dove $y_1 \in \mathbb{R}^k$, $y_2 \in \mathbb{R}^{n-k}$ e

$$P^{-1} g(Py) = \begin{pmatrix} g_1(y_1, y_2) \\ g_2(y_1, y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(y) \\ g_2(y) \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che $g_1(y) = o(|y|)$ e $g_2(y) = o(|y|)$. Dato che $-A_+$ e A_- hanno autovalori con $\Re e < 0$ esistono due matrici simmetriche $Q_\pm$ tale che

$$\begin{array}{lcl} \langle Q_+ y_1, y_1\rangle > \delta |y_1|^2 & \text{e} & \langle (A_+^* Q_+ + Q_+ A_+ y_1, y_1\rangle > 2\delta |y_1|^2 \\ \langle Q_- y_2, y_2\rangle > \delta |y_2|^2 & \text{e} & \langle (A_-^* Q_- + Q_- A_- y_2, y_2\rangle < -2\delta |y_2|^2 \end{array}$$

Poniamo $V(y) = V(y_1, y_2) := \langle Q_+ y_1, y_1\rangle - \langle Q_- y_2, y_2\rangle$. Ovviamente $V(y_1, y_2) > 0$ se $y_2 = 0$ e $y_1 \neq 0$. Quindi l'insieme

$$U = \{y = (y_1, y_2) \mid V(y) > 0\}$$

è non vuoto e ha $x_0 = 0$ come punto di accumulazione. Inoltre

$$\begin{aligned} \dot V(y) &= \langle (A_+^* Q_+ + Q_+ A_+) y_1, y_1\rangle - \langle (A_-^* Q_- + Q_- A_- y_2), y_2\rangle \\ &\quad + \langle Q_+ y_1, g_1(y)\rangle + \langle Q_+ g_1(y), y_1\rangle - \langle Q_- y_2, g_2(y)\rangle - \langle Q_- g_2(y), y_2\rangle \\ &\quad \geq 2\delta |y|^2 - 2\|Q_+\|\,|y_1|\,|g_1(y)| - 2\|Q_-\|\,|y_2|\,|g_2(y)| \geq 2\left(\delta - (\|Q_+\| + \|Q_-\|\rho)\right)|y|^2 \end{aligned}$$

dove

$$\rho = \max\left\{\frac{|g_1(y)|}{|y|}, \frac{|g_2(y)|}{|y|}\right\}.$$

Sia allora $\varepsilon > 0$ tale che se $|y| < \varepsilon$ si ha $\rho < \frac{\delta}{\|Q_+\| + \|Q_-\|}$ e poniamo $\Omega = B(y, \varepsilon)$. Da quanto precede segue che, in $U \cap \Omega$, $V(y)$ soddisfa le condizioni del Teorema di Četaev e quindi la soluzione $y = 0$ e instabile ossia esiste $\widetilde{\varepsilon} > 0$ tale che per ogni $\widetilde{\delta} > 0$ esiste $y_0 \in B(0, \widetilde{\delta})$ tale che la soluzione $y(t, y_0)$ di (11) soddisfa $|y(T, y_0)| \geq \widetilde{\varepsilon}$ per qualche $T > 0$. Siano allora $\varepsilon = \frac{\widetilde{\varepsilon}}{\|P^{-1}\|}$, e $\delta > 0$. Preso $\widetilde{\delta} = \frac{\delta}{\|P\|}$ e y_0 come sopra poniamo $x_0 = P y_0$. Si ha $|x_0| \leq \|P\|\,|y_0| < \delta$ ed essendo $x(t, x_0) = P y(t, y_0)$, se fosse $|x(T, x_0)| < \varepsilon$ si avrebbe anche $|y(T, y_0)| = |P^{-1} x(T, x_0)| \leq \|P^{-1}\|\varepsilon = \widetilde{\varepsilon}$: assurdo. $x = 0$ è quindi instabile. Ciò completa la dimostrazione.

Esempio. Consideriamo ancora l'equazione del pendolo smorzato: $\ddot x + 2\delta \dot x + \sin x = 0$ o, in forma di sistema:

$$\begin{cases} \dot x_1 = x_2 \\ \dot x_2 = -\sin x_1 - 2\delta x_2 \end{cases} \tag{12}$$

dove $\delta > 0$. Vogliamo costruire una funzione di Lyapunov per questo sistema la cui derivata sia definita negativa, ossia vogliamo provare la stabilità asintotica dell'equilibrio $x_1 = x_2 = 0$ senza ricorrere al Teorema di Krasowsky. A questo scopo utilizziamo il teorema di stabilità in prima approssimazione di questo paragrafo, quindi, come primo passo, linearizziamo il sistema attorno all'equilibrio:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2\delta x_2 \end{cases} \tag{13}$$

e cerchiamo una forma quadratica che sia una funzione di Lyapunov. La matrice dei coefficienti è

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\delta \end{pmatrix}$$

ed ha gli autovalori $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 1}$, con autovettori: $v_1 = (1 \ \sqrt{\delta^2 - 1} - \delta)$, e $v_1 = (-1 \ \sqrt{\delta^2 - 1} + \delta)$. Si noti che autovalori e autovettori sono diversi se $\delta \neq 1$. Se invece $\delta = 1$ allora

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

ha l'autovalore $\lambda = -1$ con autovalore

$$v_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

e autovalore generalizzato

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ossia $(A + \mathbb{I})^2 v_1 = 0$. Si noti che v_0 e v_1 sono stati scelti in modo che

$$Av_1 = -v_1 + v_0.$$

Distinguiamo diversi casi

- $0 < \delta < 1$.

Poniamo $\sqrt{1 - \delta^2} = \omega$, con $\omega > 0$ e sia

$$P := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\delta + \imath\omega & \delta + \imath\omega \end{pmatrix}$$

Si ha

$$P^{-1} := \frac{1}{2\imath\omega}\begin{pmatrix} \delta + \imath\omega & 1 \\ \delta - \imath\omega & 1 \end{pmatrix}$$

e posto

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\imath\omega}\begin{pmatrix} (\delta + \imath\omega)x_1 + x_2 \\ (\delta - \imath\omega)x_1 + x_2 \end{pmatrix} \tag{14}$$

si ottiene il sistema in forma diagonale

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = (-\delta + \imath\omega)z_1 \\ \dot{z}_2 = (-\delta - \imath\omega)z_2 \end{cases}$$

del quale una funzione di Lyapunov è $V(z_1, z_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 = z_1\bar{z_1} + z_2\bar{z_2}$. Dalla (14) si ottiene una funzione di Lyapunov per il sistema lineare (13)

$$\begin{aligned} &V(x_1, x_2) \\ &= \frac{1}{2\imath\omega}[(\delta + \imath\omega)x_1 + x_2]\frac{\imath}{2\omega}[(\delta - \imath\omega)x_1 + x_2] + \frac{1}{2\imath\omega}[(\delta - \imath\omega)x_1 + x_2]\frac{\imath}{2\omega}[(\delta + \imath\omega)x_1 + x_2] \\ &= \frac{1}{2\omega^2}[(\delta + \imath\omega)x_1 + x_2][(\delta - \imath\omega)x_1 + x_2] = \frac{1}{2\omega^2}[(\delta^2 + \omega^2)x_1^2 + 2\delta x_1x_2 + x_2^2] \\ &= \frac{1}{2\omega^2}(x_1^2 + 2\delta x_1x_2 + x_2^2) \geq \frac{(1-\delta)}{2\omega^2}(x_1^2 + x_2^2) > 0 \end{aligned}$$

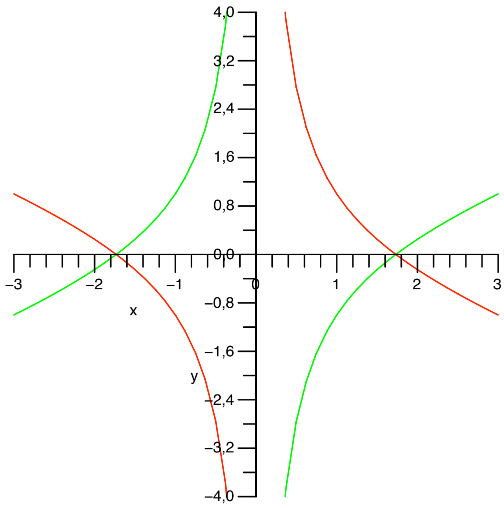
perché $0 < \delta < 1$. Si ha poi:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= \frac{1}{\omega^2}[x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 + \delta\dot{x}_1x_2 + \delta x_1\dot{x}_2] \\ &= \frac{1}{\omega^2}[(x_1 + \delta x_2)x_2 - (x_2 + \delta x_1)(x_1 + 2\delta x_2)] \\ &= -\frac{\delta}{\omega^2}[x_1^2 + x_2^2 + 2\delta x_1x_2] = -2\delta V(x_1, x_2) < 0. \end{aligned}$$

Calcolando, invece, $\dot{V}(x_1, x_2)$ lungo le orbite del sistema (12) si ottiene:

$$\begin{aligned} &\dot{V}(x_1, x_2) = \frac{1}{\omega^2}[x_1x_2 + \delta x_2^2 - (\delta x_1 + x_2)(\sin x_1 + 2\delta x_2)] \\ &= \frac{1}{\omega^2}[x_1x_2 + \delta x_2^2 - \delta x_1 \sin x_1 - x_2 \sin x_1 - 2\delta^2 x_1x_2 - 2\delta x_2^2] \\ &= \frac{1}{\omega^2}[(x_2 + \delta x_1)(x_1 - \sin x_1) - 2\delta\omega^2 V(x_1, x_2)] \\ &\leq \frac{1}{\omega^2}\left[\frac{1}{6}|x_2 + \delta x_1||x_1|\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} - \delta(1-\delta)\right](x_1^2 + x_2^2) < 0 \end{aligned}$$

purché
$$|x_2 + \delta x_1||x_1| \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} < 6\delta(1-\delta).$$
[Nota: si è usata l'eguaglianza: $\sin x = x - \frac{\cos \bar{x}}{6} x^3$ da cui si è dedotto: $|x - \sin x| \leq \frac{1}{6}|x|^3$]
Ora si ha $\frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2} < 1$ e quindi $V(x_1, x_2)$ è una funzione di Lyapunov per il sistema (12) nel dominio:
$$\Omega := \{(x_1, x_2) \mid |x_1 x_2 + \delta x_1^2| < 6\delta(1-\delta)\}$$



Ω è la regione connessa contenente l'origine e compresa fra le curve rossa e verde. Si è scelto $\delta = \frac{1}{2}$.

- $\delta = 1$.

In questo caso la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ ha solo l'autovalore $\lambda = -1$. Scegliamo P in modo che le sue colonne siano i vettori v_0 e v_1 ossia
$$P := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$
Si ha
$$P^{-1} := \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

e posto

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \tag{15}$$

si ottiene il sistema in forma triangolare:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 = -z_2 \end{cases} \tag{16}$$

Ricerchiamo una funzione di Lyapunov della forma: $W(z_1, z_2) = z_1^2 + \alpha^2 z_2^2$ (si noti che $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ perché P è a coefficienti reali). Dato che $W(z_1, z_2) \geq \min\{1, \alpha^2\}(z_1^2 + z_2^2)$ basta calcolare la derivata lungo le traiettorie di (16). Si ha:

$$\dot{W}(z_1, z_2) = -2[z_1^2 - z_1 z_2 + \alpha^2 z_2^2]$$

ed osserviamo che, per $\alpha = 1$ si ha:

$$z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2 \geq \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2)$$

Quindi una funzione di Lyapunov per il sistema (16) è $W(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$ dalla quale ricaviamo una funzione di Lyapunov del sistema (13) con $\delta = 1$:

$$V(x_1, x_2) = \left[(x_1 - x_2)^2 + 4(x_1 + x_2)^2\right] = (5x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1 x_2).$$

(ottenuta considerando $16W(z_1, z_2)$). La verifica della diseguaglianza $\dot{V}(x_1, x_2) < 0$ sia per il sistema lineare (13) che per quello nonlineare (12), e lo studio del caso $\delta > 1$ vengono lasciati al lettore.