Svolgimento prova scritta del 24/6/2009

Flaviano Battelli

25 Giugno, 2009

Indice degli argomenti

Testo dell'esercizio

Esercizio n.2

Determinare, se esistono, massimi e minimi assoluti della funzione $f(x, y, z) = xy + z^2$ nel dominio
$D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \leq x + y\}$.

Massimi e minimi interni

Questi si trovano risolvendo il sistema $\nabla f(x, y, z) = 0$ e imponendo che le soluzioni soddisfino le limitazioni $x^2 + y^2 + z^2 < 1 < x + y$.

Massimi e minimi interni

Questi si trovano risolvendo il sistema $\nabla f(x, y, z) = 0$ e imponendo che le soluzioni soddisfino le limitazioni $x^2 + y^2 + z^2 < 1 < x + y$. Si ha $\nabla f(x, y, z) = 0$ se e solo se

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

la cui unica soluzione $x = y = z = 0$ non soddisfa $x + y > 1$. Pertanto non esistono né massimi né minimi interni

Metodo diretto

Poniamo $\Sigma_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 < x + y\}$. Sostituendo $z^2 = 1 - x^2 - y^2$ nell'espressione di $f(x, y, z)$ si ottiene

$$f(x, y, z)_{|\Sigma_1} = \varphi_1(x, y) := xy + 1 - x^2 - y^2.$$

Metodo diretto

Poniamo $\Sigma_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 < x + y\}$. Sostituendo $z^2 = 1 - x^2 - y^2$ nell'espressione di $f(x, y, z)$ si ottiene

$$f(x, y, z)_{|\Sigma_1} = \varphi_1(x, y) := xy + 1 - x^2 - y^2.$$

Imponendo $\nabla\varphi_1(x, y) = 0$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y - 2x = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

che ha l'unica soluzione $x = y = 0$ da cui $z = \pm 1$.

Metodo diretto

Poniamo $\Sigma_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 < x + y\}$. Sostituendo $z^2 = 1 - x^2 - y^2$ nell'espressione di $f(x, y, z)$ si ottiene

$$f(x, y, z)_{|\Sigma_1} = \varphi_1(x, y) := xy + 1 - x^2 - y^2.$$

Imponendo $\nabla\varphi_1(x, y) = 0$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y - 2x = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

che ha l'unica soluzione $x = y = 0$ da cui $z = \pm 1$. I punti $P_\pm = (0,\ 0,\ \pm 1)$ però non soddisfano la disequazione $x + y > 1$ e quindi non sono accettabili.

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Dato che Σ_1 è una porzione di sfera sappiamo che è regolare. Quindi cerchiamo punti critici della funzione $\mathcal{L}_1(x, y, z, \mu) = xy + z^2 - \mu(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ che soddisfano la limitazione $x + y > 1$.

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Dato che Σ_1 è una porzione di sfera sappiamo che è regolare. Quindi cerchiamo punti critici della funzione $\mathcal{L}_1(x, y, z, \mu) = xy + z^2 - \mu(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ che soddisfano la limitazione $x + y > 1$. Questi soddisfano il sistema

$$\begin{cases} y - 2\mu x = 0 \\ x - 2\mu y = 0 \\ 2z(1 - \mu) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Dato che Σ_1 è una porzione di sfera sappiamo che è regolare. Quindi cerchiamo punti critici della funzione $\mathcal{L}_1(x, y, z, \mu) = xy + z^2 - \mu(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ che soddisfano la limitazione $x + y > 1$. Questi soddisfano il sistema

$$\begin{cases} y - 2\mu x = 0 \\ x - 2\mu y = 0 \\ 2z(1 - \mu) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Dalla terza equazione si vede che occorre distinguere i due casi $\mu = 1$ e $\mu \neq 1$

$\mu = 1$

Se $\mu = 1$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y - 2x = 0 \\ x - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

$\mu = 1$

Se $\mu = 1$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y - 2x = 0 \\ x - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

che ha la soluzione $x = y = 0$, $z = \pm 1$. Dato che $(0,\ 0,\ \pm 1)$ non soddisfa la condizione $x + y > 1$ non ci sono soluzioni per $\mu = 1$.

$\mu \neq 1$

Dalla 3a equazione si ottiene $z = 0$ ed $(x,\ y)$ soddisfa il sistema

$$\begin{cases} y - 2\mu x = 0 \\ x - 2\mu y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Se $x = 0$ dalla 1a equazione segue che anche $y = 0$, mentre se $y = 0$ dalla 2a si ottiene $x = 0$. Inoltre deve anche essere $\mu \neq 0$ (perché?). Quindi le soluzioni del sistema soddisfano $x \neq 0$, $y \neq 0$.

$\mu \neq 1$

Dalla 3a equazione si ottiene $z = 0$ ed $(x,\ y)$ soddisfa il sistema

$$\begin{cases} y - 2\mu x = 0 \\ x - 2\mu y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Se $x = 0$ dalla 1a equazione segue che anche $y = 0$, mentre se $y = 0$ dalla 2a si ottiene $x = 0$. Inoltre deve anche essere $\mu \neq 0$ (perché?). Quindi le soluzioni del sistema soddisfano $x \neq 0$, $y \neq 0$. Moltiplicando la 1a equazione per x, la 2a per y e sottraendo otteniamo, grazie anche a $\mu \neq 0$:

$$\begin{cases} y^2 - x^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm x \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$\mu \neq 1$

dove i segni $\pm$ possono essere presi in tutti e 4 i modi possibili. Di queste soluzioni, però, solo $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ soddisfa la limitazione $x + y > 1$

$\mu \neq 1$

dove i segni $\pm$ possono essere presi in tutti e 4 i modi possibili. Di queste soluzioni, però, solo $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$ soddisfa la limitazione $x + y > 1$ e si ha $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right) = \frac{1}{2}$.

$\mu \neq 1$

dove i segni $\pm$ possono essere presi in tutti e 4 i modi possibili. Di queste soluzioni, però, solo $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ soddisfa la limitazione $x + y > 1$ e si ha $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \frac{1}{2}$.
Osserviamo un fatto importante.

$\mu \neq 1$

dove i segni $\pm$ possono essere presi in tutti e 4 i modi possibili. Di queste soluzioni, però, solo $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ soddisfa la limitazione $x + y > 1$ e si ha $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \frac{1}{2}$.
Osserviamo un fatto importante.
Con il metodo diretto non abbiamo trovato il punto
$P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$. *Come mai?*

$\mu \neq 1$

dove i segni $\pm$ possono essere presi in tutti e 4 i modi possibili. Di queste soluzioni, però, solo $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ soddisfa la limitazione $x + y > 1$ e si ha $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \frac{1}{2}$.

Osserviamo un fatto importante.

Con il metodo diretto non abbiamo trovato il punto $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$. *Come mai?* Per capirlo occorre fare un passo indietro.

Metodo diretto o dei moltiplicatori?

Quando si cercano i max e min di una funzione $F(x_1, \ldots, x_n)$, ristretta ad un vincolo di equazione $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$, si sfrutta l'equazione per esplicitare una variabile, ad esempio $x_j = g(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, che poi si sostituisce nell'espressione di F ottenendo una funzione $\varphi(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) :=$ $F(x_1, \ldots, x_{j-1}, g(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n), x_{j+1}, \ldots, x_n))$. Poi si risolve il sistema $\nabla\varphi = 0$.

Metodo diretto o dei moltiplicatori?

Quando si cercano i max e min di una funzione $F(x_1, \dots, x_n)$, ristretta ad un vincolo di equazione $G(x_1, \dots, x_n) = 0$, si sfrutta l'equazione per esplicitare una variabile, ad esempio $x_j = g(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$, che poi si sostituisce nell'espressione di F ottenendo una funzione $\varphi(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) :=$ $F(x_1, \dots, x_{j-1}, g(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n), x_{j+1}, \dots, x_n))$. Poi si risolve il sistema $\nabla\varphi = 0$. Il metodo funziona nei punti *interni* [ossia la funzione g deve essere definita in un *intorno* del punto $(x_1^0, \dots, x_{j-1}^0, x_{j+1}^0, \dots, x_n^0)$ che soddisfa $\nabla\varphi = 0$].

Metodo diretto o dei moltiplicatori?

Quando si cercano i max e min di una funzione $F(x_1, \dots, x_n)$, ristretta ad un vincolo di equazione $G(x_1, \dots, x_n) = 0$, si sfrutta l'equazione per esplicitare una variabile, ad esempio $x_j = g(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$, che poi si sostituisce nell'espressione di F ottenendo una funzione $\varphi(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) :=$ $F(x_1, \dots, x_{j-1}, g(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n), x_{j+1}, \dots, x_n))$. Poi si risolve il sistema $\nabla\varphi = 0$. Il metodo funziona nei punti *interni* [ossia la funzione g deve essere definita in un *intorno* del punto $(x_1^0, \dots, x_{j-1}^0, x_{j+1}^0, \dots, x_n^0)$ che soddisfa $\nabla\varphi = 0$]. Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange lavora *sottotraccia*, ossia non sappiamo quale sia la variabile esplicitata, mentre con il metodo diretto siamo noi a scegliere la variabile da esplicitare.

Metodo diretto o dei moltiplicatori?

Nell'esercizio, ad esempio, abbiamo scelto $z^2 = 1 - x^2 - y^2$, ossia una volta $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e un'altra $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Ciò significa che dovremmo studiare la funzione su *due* vincoli, una volta col segno $+$, un'altra col segno $-$. L'aspetto positivo è che la funzione da studiare non cambia (è sempre $xy + 1 - x^2 - y^2$),

Metodo diretto o dei moltiplicatori?

Nell'esercizio, ad esempio, abbiamo scelto $z^2 = 1 - x^2 - y^2$, ossia una volta $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e un'altra $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Ciò significa che dovremmo studiare la funzione su *due* vincoli, una volta col segno $+$, un'altra col segno $-$. L'aspetto positivo è che la funzione da studiare non cambia (è sempre $xy + 1 - x^2 - y^2$), purtroppo però i punti che soddisfano $x^2 + y^2 = 1$ (ossia $z = 0$) non sono interni (e le funzioni $\pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ in questi punti non sono derivabili). In altre parole con il metodo diretto *escludiamo* a priori i punti $z = 0$.

Metodo diretto o dei moltiplicatori?

Nell'esercizio, ad esempio, abbiamo scelto $z^2 = 1 - x^2 - y^2$, ossia una volta $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e un'altra $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Ciò significa che dovremmo studiare la funzione su *due* vincoli, una volta col segno $+$, un'altra col segno $-$. L'aspetto positivo è che la funzione da studiare non cambia (è sempre $xy + 1 - x^2 - y^2$), purtroppo però i punti che soddisfano $x^2 + y^2 = 1$ (ossia $z = 0$) non sono interni (e le funzioni $\pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ in questi punti non sono derivabili). In altre parole con il metodo diretto *escludiamo* a priori i punti $z = 0$. Questi punti andrebbero analizzati studiando la funzione $f_0(x, y) = xy$ sul vincolo $x^2 + y^2 = 1$ con $x + y > 1$.

Metodo diretto o dei moltiplicatori?

Nell'esercizio, ad esempio, abbiamo scelto $z^2 = 1 - x^2 - y^2$, ossia una volta $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e un'altra $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Ciò significa che dovremmo studiare la funzione su *due* vincoli, una volta col segno $+$, un'altra col segno $-$. L'aspetto positivo è che la funzione da studiare non cambia (è sempre $xy + 1 - x^2 - y^2$), purtroppo però i punti che soddisfano $x^2 + y^2 = 1$ (ossia $z = 0$) non sono interni (e le funzioni $\pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ in questi punti non sono derivabili). In altre parole con il metodo diretto *escludiamo* a priori i punti $z = 0$. Questi punti andrebbero analizzati studiando la funzione $f_0(x, y) = xy$ sul vincolo $x^2 + y^2 = 1$ con $x + y > 1$. Un'equazione parametrica del vincolo è $x = \cos t$, $y = \sin t$, con $0 < t < \frac{\pi}{2}$, sul quale si ha $f_0(x, y) = \frac{1}{2} \sin 2t$ il cui max è $\frac{1}{2}$ e il min non c'è. Il punto di max è proprio il punto escluso P.

$f(x, y, z)_{|\Sigma_2}$

Poniamo $\Sigma_2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1 = x + y\}$. Sostituendo $y = 1 - x$ nell'espressione di $f(x, y, z)$ si ottiene

$$f(x, y, z)_{|\Sigma_2} = \varphi_2(x, z) := x(1 - x) + z^2.$$

$f(x, y, z)_{|\Sigma_2}$

Poniamo $\Sigma_2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1 = x + y\}$. Sostituendo $y = 1 - x$ nell'espressione di $f(x, y, z)$ si ottiene

$$f(x, y, z)_{|\Sigma_2} = \varphi_2(x, z) := x(1 - x) + z^2.$$

Imponendo $\nabla\varphi_2(x, z) = 0$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 1 - 2x = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

che ha l'unica soluzione $x = \frac{1}{2}$, $z = 0$ che porta a $y = \frac{1}{2}$.

$f(x, y, z)_{|\Sigma_2}$

Poniamo $\Sigma_2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1 = x + y\}$. Sostituendo $y = 1 - x$ nell'espressione di $f(x, y, z)$ si ottiene

$$f(x, y, z)_{|\Sigma_2} = \varphi_2(x, z) := x(1 - x) + z^2.$$

Imponendo $\nabla\varphi_2(x, z) = 0$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 1 - 2x = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

che ha l'unica soluzione $x = \frac{1}{2}$, $z = 0$ che porta a $y = \frac{1}{2}$. Il punto $Q = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$ soddisfa la disequazione $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ e quindi è accettabile. Si ha $f\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right) = \frac{1}{4}$.

$f(x, y, z)_{|\Sigma_2}$

Notiamo che Σ_2 è regolare perché $\nabla(x + y - 1) = (1,\ 1,\ 0) \neq (0,\ 0,\ 0)$. Quindi cerchiamo i punti critici della funzione $\mathcal{L}_1(x, y, z, \mu) = xy + z^2 - \mu(x + y - 1)$ che soddisfano la limitazione $x^2 + y^2 + z^2 < 1$.

$f(x, y, z)_{|\Sigma_2}$

Notiamo che Σ_2 è regolare perché $\nabla(x + y - 1) = (1,\ 1,\ 0) \neq (0,\ 0,\ 0)$. Quindi cerchiamo i punti critici della funzione $\mathcal{L}_1(x, y, z, \mu) = xy + z^2 - \mu(x + y - 1)$ che soddisfano la limitazione $x^2 + y^2 + z^2 < 1$. Questi soddisfano il sistema

$$\begin{cases} y - \mu = 0 \\ x - \mu = 0 \\ z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$f(x, y, z)_{|\Sigma_2}$

Notiamo che Σ_2 è regolare perché $\nabla(x + y - 1) = (1,\ 1,\ 0) \neq (0,\ 0,\ 0)$. Quindi cerchiamo i punti critici della funzione $\mathcal{L}_1(x, y, z, \mu) = xy + z^2 - \mu(x + y - 1)$ che soddisfano la limitazione $x^2 + y^2 + z^2 < 1$. Questi soddisfano il sistema

$$\begin{cases} y - \mu = 0 \\ x - \mu = 0 \\ z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Da cui ricaviamo $2\mu = 1 \Rightarrow x = y = \mu = \frac{1}{2}$ e $z = 0$. Dato che il punto $Q = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$ soddisfa la disequazione $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ è accettabile. Si ha $f\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right) = \frac{1}{4}$.

$f(x, y, z)|_\gamma$

Ricerchiamo un parametrizzazione di $\gamma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2x + z^2 = 0 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

ossia

$f(x, y, z)|_{\gamma}$

Ricerchiamo un parametrizzazione di $\gamma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2x + z^2 = 0 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{1}{2} \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(1 + \cos t) \\ \\ y = \frac{1}{2}(1 - \cos t) \\ \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \end{cases}$$

con $-\pi \leq t \leq \pi$.

$f(x, y, z)_{|\gamma}$

Sostituendo l'equazione parametrica trovata nell'espressione di $f(x, y, z)$ si ottiene

$$f(x, y, z)_{|\gamma} = h(t) := \frac{1}{4}(1 - \cos^2 t) + \frac{1}{2}\sin^2 t = \frac{3}{4}\sin^2 t$$

$f(x, y, z)_{|_\gamma}$

Sostituendo l'equazione parametrica trovata nell'espressione di $f(x, y, z)$ si ottiene

$$f(x,y,z)_{|_\gamma} = h(t) := \frac{1}{4}(1 - \cos^2 t) + \frac{1}{2}\sin^2 t = \frac{3}{4}\sin^2 t$$

che ha un massimo pari a $\frac{3}{4}$ per $t = \pm\frac{\pi}{2}$ (corrispondenti ai punti $A_\pm = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$) e un minimo pari a 0 per $t = 0, \pi$ (corrispondenti ai punti $B = (1,\ 0,\ 0)$ e $B' = (0,\ 1,\ 0)$).

Conclusione

Riepilogando:

Nel domino D la funzione $f(x, y, z)$ assume massimo pari a $\frac{3}{4}$ nei punti $A_{\pm} = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}},\right)$ e minimo pari a 0 nei punti $B = (1,\ 0,\ 0)$ e $B' = (0,\ 1,\ 0)$ (entrambi appartenenti a γ).