# Integrali impropri in $\mathbb{R}$

***Flaviano Battelli***

***Dipartimento di Scienze Matematiche***

***Università Politecnica delle Marche***

***Ancona***

## Integrali impropri

Indichiamo con $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ l'insieme dei numeri naturali, con $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ l'insieme degli interi non negativi e con $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ l'insieme dei numeri interi.

Un sottinsieme $S \subset \mathbb{R}$ si dice di *discreto* se l'intersezione di $S$ con un qualunque intervallo limitato è un insieme finito, ossia per ogni $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, si ha

$$S \cap [-r, r] = \{x_1, \dots x_n\},$$

dove $n = n(r)$ è un numero naturale dipendente da $r$. Osserviamo che se $S$ è un insieme discreto, allora esistono *al più* due successioni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ la prima decrescente e la seconda crescente tali che $a_{n+1} \le a_n < 0 \le b_n \le b_{n+1}$ e

$$S = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{b_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Con *al più* intendiamo dire che una delle due successioni potrebbe non esistere. Ad esempio, se $S \cap \mathbb{R} \subset [0, \infty)$, allora esiste solo la successione $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, mentre se $S \cap \mathbb{R} \subset (-\infty, 0)$, allora esiste solo la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Osserviamo anche che ognuna delle successioni può anche essere *definitivamente costante* ossia può esistere $N \in \mathbb{N}$ tale che $a_n = a_N$ (risp. $b_n = b_N$) per ogni $n \geq N$. Nel primo caso l'insieme $S$ ammette minimo, nel secondo massimo, mentre se valgono entrambe le condizioni, l'insieme $S$ è finito. Inoltre, se $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (risp. $\{b_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$) non è finito, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ (risp. $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$).

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a valori reali si dice *generalmente continua* se l'insieme $D$ dei suoi punti di discontinuità è discreto. Una funzione generalmente continua, nulla fuori di un intervallo $I$, si dirà *generalmente continua in* $I$.

Nel seguito poniamo, per $n \in \mathbb{N}$

$$b_{-n} = a_n$$

cosicché l'insieme dei punti di discontinuità di $f$ è dato da

$$D = \{b_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

e valgono le seguenti proprietà:

**i)** se $n \leq m$ allora $b_n \leq b_m$ (ossia la funzione $n \mapsto b_n$ è crescente)

**ii)** se $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non è definitivamente costante allora $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$

**iii)** se $\{b_{-n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ non è definitivamente costante allora $\lim_{n\to-\infty} b_n = -\infty$

Sia $f : \mathbb{R} \to R$ una funzione generalmente continua e sia $D$ è l'insieme dei suoi punti di discontinuità. Se $\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ammette massimo uguale a $b_N$ modifichiamo la definizione di $b_n$, per $n > N$ ponendo $b_n = +\infty$ per ogni $n > N$. Allo stesso modo, se $\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ammette minimo uguale a $b_M$ modifichiamo la definizione di $b_n$, per $n < M$ ponendo $b_n = -\infty$ per ogni $n < M$.

Sia ora $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua (non necessariamente limitata) nell'intervallo aperto $(a, b)$. Diamo la seguente:

**Definizione**. *Dico che $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è integrabile (in senso improprio o generalizzato, o generalmente integrabile) su $(a, b)$ se per ogni coppia di successioni $\{\alpha_n\}_n$, $\{\beta_n\}_n$, la prima decrescente e la seconda crescente, tali che $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} \beta_n = b$ esiste finito (ossia in $\mathbb{R}$) il limite*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x)dx.$$

*In tal caso, si dirà anche che l'integrale* $\int_a^b f(x)dx$ *è convergente. Se invece il limite precedente è uguale a* $\pm\infty$ *diremo anche che l'integrale è divergente (a* $\pm\infty$*).*

Ovviamente c'è anche la possibilità che il limite precedente non esista, nel qual caso la funzione non è ovviamente integrabile in $(a, b)$ e l'integrale non è né convergente né divergente.

Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è integrabile in senso improprio su $(a, b)$, poniamo

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x)dx.$$

Dato che $f(x)$ è continua in $(a, b)$ ammetterà primitiva in $(a, b)$ ossia esiste $F(x)$ (per esempio $F(x) = \int_{\frac{a+b}{2}}^{x} f(t)dt$) tale che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in (a, b)$. Allora si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} F(\beta_n) - F(\alpha_n).$$

e quindi $f(x)$ è integrabile in $(a, b)$ se e solo se esiste finito il limite a destra della uguaglianza precedente, mentre se tale limite è $\pm\infty$ l'integrale sarà divergente.

Si osservi che, poiché il limite $\lim_{n\to\infty} F(\beta_n) - F(\alpha_n)$ deve esistere indipendentemente dalla scelta delle successioni $\{\alpha_n\}$ e $\{\beta_n\}$, allora i due limiti

$$\lim_{n\to\infty} F(\beta_n) \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} F(\alpha_n)$$

dovranno esistere entrambi, qualunque sia la scelta delle successioni $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, ossia dovranno esistere i limiti $F(b^-) := \lim_{x\to b^-} F(x)$ e $F(a^+) := \lim_{x\to a^+} F(x)$ e, nel caso siano finiti, $f(x)$ è integrabile in $(a, b)$ e risulta:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b^-) - F(a^+)$$

Inoltre l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ non esiste se e solo se i due limiti precedenti valgono entrambi $+\infty$ o (almeno) uno di essi non esiste.

**Esempi.**

i) $f(x) = \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ in $(0,1)$. Ricerchiamo una primitiva di $f(x)$ in $(0,1)$. Si ha, integrando per parti:

$$\int \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}dx = \int x\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}dx = -x\sin\frac{1}{x} + \int \sin\frac{1}{x}dx =$$

$$= -x\sin\frac{1}{x} + \int x^2\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx = -x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x} - 2\int x\cos\frac{1}{x}dx.$$

Ora, la funzione $x\cos\frac{1}{x}$ si estende con continuità in $[0,1]$ (infatti $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0$) ed è quindi Riemann integrabile in $[0,1]$, ossia esiste finito $\int_0^1 x\cos\frac{1}{x}dx$. Siccome poi

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x} = 0,$$

deduciamo facilmente che $f(x)$ è integrabile in (0,1) e si ha:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}dx = \cos(1) - \sin(1) - 2\int_0^1 x\cos\frac{1}{x}dx.$$

ii) $f(x) = \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$ in $(0,1)$. Si ha, integrando per parti:

$$\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}dx = \sin\frac{1}{x} + c$$

e, siccome il $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ non esiste, la funzione $\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$ non è integrabile in $(0,1)$.

iii) $f(x) = \frac{|\log x|}{x}$ in $(0,1)$. Si ha, integrando per parti:

$$\int \frac{\log x}{x}dx = \log^2 x - \int \frac{\log x}{x}dx$$

e quindi una primitiva di $f(x)$ è $\frac{1}{2}\log^2 x$. Allora

$$\int_0^1 \frac{|\log x|}{x}dx = -\frac{1}{2}[\lim_{x\to 1}\log^2 x - \lim_{x\to 0}\log^2 x] = +\infty.$$

L'integrale è quindi divergente a $+\infty$.

Poniamo, per convenzione

$$\int_{+\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-\infty} f(x)dx = 0.$$

**Definizione**. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ generalmente continua. Diciamo che $f$ è integrabile (in senso improprio o generalizzato, o generalmente integrabile) su $\mathbb{R}$ se detto $D = \{b_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ l'insieme dei suoi punti di discontinuità (dove $b_n$ ha le proprietà i)–iii)) valgono le seguenti proprietà*

*$f$ è integrabile in ogni intervallo $(b_n, b_{n+1})$;*

*le due serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\int_{b_n}^{b_{n+1}} f(x)dx$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_{b_{-n}}^{b_{-n+1}} f(x)dx$ sono entrambe convergenti.*

*In tal caso si pone*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{b_n}^{b_{n+1}} f(x)dx := \sum_{n=0}^{\infty}\int_{b_n}^{b_{n+1}} f(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{b_{-n}}^{b_{-n+1}} f(x)dx$$

*e si dice che l'integrale*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

*è convergente.*

**Osservazione**. Se gli integrali $\displaystyle\int_{b_n}^{b_{n+1}} f(x)dx$ sono tutti convergenti e le serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\int_{b_n}^{b_{n+1}} f(x)dx$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_{b_{-n-1}}^{b_{-n}} f(x)dx$ sono entrambe divergenti a $+\infty$ (o a $-\infty$), oppure una è divergente a $+\infty$ ($-\infty$) e l'altra convergente, si dice anche che l'integrale improprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ è divergente a $+\infty$ ($-\infty$). Potremmo anche dire che l'integrale improprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ è divergente a $+\infty$ (risp. a $-\infty$) anche quando almeno uno degli integrali impropri $\displaystyle\int_{b_n}^{b_{n+1}} f(x)dx$ diverge a $+\infty$ (risp. a $-\infty$) e non esistono altri integrali impropri $\displaystyle\int_{b_m}^{b_{m+1}} f(x)dx$ che divergono a $-\infty$ (risp. $+\infty$). Tuttavia questa maggiore generalità può causare problemi qualora la serie degli integrali impropri convergenti diverge all'infinito di segno opposto.

**Definizione**. Se $f : I \to \mathbb{R}$ è generalmente continua in $I$ (e quindi nulla fuori di $I$) si dice che $f$ è integrabile in senso improprio su $I$ se $f$ è integrabile in senso improprio su $\mathbb{R}$

e si pone

$$\int_I f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$$

In generale se $f(x)$ è generalmente continua su $\mathbb{R}$ e $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo di $\mathbb{R}$ porremo:

$$\int_I f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}(x)dx$$

dove

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in I \\ 0 & \text{se } x \notin I \end{cases}.$$

Si ha il seguente importante risultato:

**Teorema 1**. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione generalmente continua e non negativa, ossia $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora l'integrale improprio*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$$

*è finito o $+\infty$ (ossia o converge o diverge).*

*Dimostrazione.* Sia $[b_k, b_{k+1}]$ uno degli intervalli in cui $\mathbb{R}$ è *diviso* dall'insieme $S$ dei punti di discontinuità di $f$. Siano $\{\alpha_n\}_n$, $\{\beta_n\}_n$ successioni, la prima decrescente e la seconda crescente, tali che $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = b_k$ e $\lim_{n\to\infty} \beta_n = b_{k+1}$. Dato che $f(x) \geq 0$ la successione di numeri reali:

$$\int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x)dx$$

è crescente e quindi il limite $\lim_{n\to\infty} \int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x)dx$ esiste finito e non negativo o $+\infty$. Nel caso che tali limiti siano tutti finiti le due serie $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{b_n}^{b_{n+1}} f(x)dx$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{b_{-n-1}}^{b_{-n}} f(x)dx$ sono a termini non negativi e quindi o convergono o divergono a $+\infty$. Q.E.D.

**Osservazione**. Lo stesso risultato riguardo $\int_I f(x)dx$, vale se $f(x)$ è generalmente continua su $I$ e $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$.

**Teorema 2**. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione generalmente continua e non negativa, ossia $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Sia $D = \{b_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ l'insieme dei punti di discontinuità di $f$*

*e sia* $D' = \{b'_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ *un insieme discreto contenente* $D$ *(ossia* $D \subset D'$*). Allora*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{b'_n}^{b'_{n+1}} f(x)dx,$$

**Osservazione**. Il Teorema precedente in pratica afferma che per una funzione non negativa il calcolo dell'integrale può effettuarsi anche considerando un insieme discreto che *contiene* tutti i punti di discontinuità di $f(x)$.

*Dimostrazione.* Dato che $b_0 \in D'$ possiamo supporre, eventualmente reindicizzando gli elementi di $D'$ che $b'_0 = b_0$. Dato che $f(x) \geq 0$ la serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{b'_n}^{b'_{n+1}} f(x)dx$ è a termini non negativi e quindi è regolare. Pertanto possiamo studiarne il carattere calcolando il limite $\lim_{k\to\infty} s'_{n_k}$ dove $n_k \to \infty$, quando $k \to \infty$ e $s_n$ indica la sua somma parziale $n-$esima. Sia allora $k \in \mathbb{N}$ e sia $n_k \in \mathbb{N}$ tale che $b_k = b'_{n_k}$. Sia $j \in \{0, ..., k-1\}$, e sia $F(x)$ una primitiva di $f(x)$ in $(b_j, b_{j+1}) = (b'_{n_j}, b'_{n_{j+1}})$. Allora

$$\int_{b_j}^{b_{j+1}} f(x)dx = F(b_{j+1}^-) - F(b_j^+) = \sum_{\ell=n_j}^{n_{j+1}-1} F((b'_{\ell+1})^-) - F((b'_\ell)^+)$$

dato che, essendo $F(x)$ continua in $(b_j, b_{j+1})$ e $b'_\ell \in (b_j, b_{j+1})$ per ogni $\ell \in \{n_j+1, ..., n_{j+1}-1\}$, risulta: $F((b'_\ell)^+) = F((b'_\ell)^-)$. Di conseguenza:

$$\int_{b_j}^{b_{j+1}} f(x)dx = \sum_{\ell=n_j}^{n_{j+1}-1} \int_{b'_\ell}^{b'_{\ell+1}} f(x)dx$$

e quindi:

$$\sum_{j=0}^{k-1} \int_{b_j}^{b_{j+1}} f(x)dx = \sum_{\ell=0}^{n_k-1} \int_{b'_\ell}^{b'_{\ell+1}} f(x)dx$$

ossia

$$s_{k-1} = s'_{n_k-1}$$

essendo $s_k$ la somma parziale $k-$esima della serie $\sum_{j=0}^{\infty} \int_{b_j}^{b_{j+1}} f(x)dx$. Pertanto

$$\sum_{j=0}^{\infty} \int_{b_j}^{b_{j+1}} f(x)dx = \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} s'_{n_{k+1}-1} = \lim_{n\to\infty} s'_n = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{b'_j}^{b'_{j+1}} f(x)dx.$$

Analogamente si prova che

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{b_{-j}}^{b_{-j+1}} f(x)dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{b'_{-j}}^{b'_{-j+1}} f(x)dx.$$

Q.E.D.

Dimostriamo ora un risultato importante noto come

**Criterio del Confronto**. *Siano* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *due funzioni generalmente continue. Allora se* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$, *risulta*

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}} f(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}} g(x)dx.$$

*Dimostrazione.* Se $\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = +\infty$ non c'è nulla da dimostrare. Se, invece $\int_{\mathbb{R}} g(x)dx \in \mathbb{R}$, si ha per ogni $n \in \mathbb{Z}$[1] e per ogni $a, b$ tali che $b_n < a < b < b_{n+1}$:

$$0 \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \leq \int_{b_n}^{b_{n+1}} g(x)dx \in \mathbb{R}$$

e quindi l'integrale $\int_{b_n}^{b_{n+1}} f(x)dx$ converge per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Inoltre le serie a termini non negativi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{b_n}^{b_{n+1}} f(x)dx, \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_{b_{-n}}^{b_{-n+1}} f(x)dx$$

sono entrambe convergenti essendo maggiorate dalle serie convergenti

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{b_n}^{b_{n+1}} g(x)dx, \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_{b_{-n}}^{b_{-n+1}} g(x)dx.$$

La conclusione segue dalla definizione di $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$. Q.E.D.

Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ due funzioni generalmente continue. Applicando il Criterio del confronto alle funzioni $\widetilde{f}, \widetilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sopra definite, otteniamo il seguente

[1]Qui supponiamo che $f(x)$ e $g(x)$ abbiano gli stessi punti di discontinuità. A causa del Teorema 2 questa ipotesi non è restrittiva.

**Corollario**. *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo di $\mathbb{R}$ e siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ due funzioni generalmente continue. Allora se $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in I$, risulta*

$$0 \leq \int_I f(x)dx \leq \int_I g(x)dx.$$

Prima di procedere enunciamo il risultato seguente (senza dimostrazione):

**Proposizione**. *Se $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ sono integrabili su $\mathbb{R}$ e $\mu_1, \mu_2$ sono numeri reali, la funzione $\mu_1 f_1(x) + \mu_2 f_2(x)$ è integrabile su $\mathbb{R}$ e vale*

$$\int_{\mathbb{R}} \mu_1 f_1(x) + \mu_2 f_2(x)dx = \mu_1 \int_{\mathbb{R}} f_1(x) + \mu_2 \int_{\mathbb{R}} f_2(x)dx.$$

Consideriamo ora il caso di una funzione generalmente continua che possa assumere valori sia positivi che negativi. Poniamo

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) \leq 0 \end{cases} \qquad e \qquad f_-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{se } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) \geq 0 \end{cases}.$$

Si ha:

$f_+(x), f_-(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;

$f_+(x) + f_-(x) = |f(x)|$;

$f_+(x) - f_-(x) = f(x)$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $f_+(x), f_-(x) \leq |f(x)|$.

Dalla prima e quarta proprietà e dal teorema del confronto segue che, se $|f(x)|$ è integrabile su $\mathbb{R}$, allora anche $f_+(x)$ e $f_-(x)$ sono integrabili su $\mathbb{R}$. Viceversa, se le funzioni non negative $f_+(x)$ e $f_-(x)$ sono integrabili, dalla iv) e dalla Proposizione precedente segue che anche $|f(x)|$ è integrabile su $\mathbb{R}$. Di conseguenza

*Condizione necessaria e sufficiente affinché $|f(x)|$ sia integrabile su $\mathbb{R}$ è che $f_+(x)$ e $f_-(x)$ lo siano.*

D'altronde, se $f_+(x)$ e $f_-(x)$ sono integrabili su $\mathbb{R}$ allora anche $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ lo è.

Se $|f(x)|$ è integrabile su $\mathbb{R}$, la funzione $f(x)$ si dice *sommabile* (o anche *assolutamente integrabile*). Abbiamo quindi dimostrato che: *se una funzione $f(x)$ è sommabile allora è anche integrabile.*

Una conseguenza del criterio del confronto è il seguente

*Criterio del Confronto Asintotico. Siano $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}_+$ due funzioni continue a valori non negativi. Allora se $\lim_{x\to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R}$, $\ell \geq 0$, si ha:*

**1)** *Se $\int_a^b g(x)dx$ converge allora anche l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ converge*

**2)** *Se $\int_a^b f(x)dx$ diverge allora anche l'integrale $\int_a^b g(x)dx$ diverge*

**3)** *Se $\ell > 0$, allora $\int_a^b g(x)dx$ converge se e solo se l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ converge*

*Dimostrazione.* In corrispondenza di $\varepsilon = 1$ esiste $\tilde{b} > 0$ tale che

$$(\ell - 1)g(x) < f(x) < (\ell + 1)g(x) \quad \text{per ogni } \tilde{b} < x < b.$$

(Osserviamo che se $b \in \mathbb{R}$ allora $\tilde{b} = b - \delta$ per un opportuno $\delta > 0$ mentre se $b = +\infty$ allora $\tilde{b}$ è un opportuno numero reale positivo).

Sia $b' < b$. Dato che che $\int_a^{b'} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{b'} f(x)dx$ per ogni $a < c < b' < b$, si vede che $\int_a^b f(x)dx$ converge se e solo se converge $\int_c^b f(x)dx$. Ma allora, dal corollario del criterio del confronto applicato alle funzioni $f(x)$ e $(\ell + 1)g(x)$ nell'intervallo $[\tilde{b}, b)$ otteniamo:

$$\int_a^b g(x)dx \text{ converge} \Leftrightarrow \int_{b-\delta}^b (\ell+1)g(x)dx \text{ converge} \Rightarrow \int_{b-\delta}^b f(x)dx \text{ converge} \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ converge}$$

Ciò dimostra il punto 1). Dato che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ gli integrali $\int_a^b f(x)dx$ e $\int_a^b g(x)dx$ o convergono o divergono. Quindi se $\int_a^b f(x)dx$ diverge, per il punto 1), l'integrale

$\int_a^b g(x)dx$ non può convergere. E quindi dovrà divergere essendo $g(x) \geq 0$. Ciò prova il punto 2). Se $\ell > 0$ si ha $\lim_{x\to b} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{\ell} > 0$ e quindi basta applicare il punto 1) alla coppia di funzioni $(g(x), f(x))$ invece che $(f(x), g(x))$. Ciò prova il punto 3). Q.E.D.

**Osservazione**. In maniera completamente analoga si prova:

**Corollario**. *Siano $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}_+$ due funzioni continue a valori non negativi. Allora se $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R}$, $\ell \geq 0$, si ha:*

**1)** *Se $\int_a^b g(x)dx$ converge allora anche l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ converge*

**2)** *Se $\int_a^b f(x)dx$ diverge allora anche l'integrale $\int_a^b g(x)dx$ diverge*

**3)** *Se $\ell > 0$, allora $\int_a^b g(x)dx$ converge se e solo se l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ converge.*

Dividendo l'intervallo $(a, b)$ in $(a, c] \cup [c, b)$ otteniamo un risultato valido per funzioni $f, g$ definite in $(a, b)$ tali che i due limiti

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell_1, \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell_2$$

esistono e sono finiti.

# Esempi di funzioni sommabili

Sia $f : [a, b) \to \mathbb{R}_+$ data da $f(x) = \frac{1}{(b-x)^\alpha}$, $\alpha > 0$. Se $\alpha \neq 1$ si ha

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{\alpha - 1}\right)$$

e quindi

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{x\to b^-} \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{\alpha - 1} - \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{\alpha - 1}.$$

Quindi $f(x)$ è integrabile in senso improprio in $[a, b)$ se e solo se $0 < \alpha < 1$ e in tal caso

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Se invece $\alpha = 1$ si ha

$$f(x) = \frac{d}{dx}[-\log(b-x)]$$

e quindi:

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)} = \log(b-a) - \lim_{x \to b} \log(b-x) = +\infty$$

In conclusione

$f(x) = \frac{1}{(b-x)^\alpha}$ *è integrabile in* $[a, b)$ *(sommabile, trattandosi di una funzione a valori non negativi) se* $0 < \alpha < 1$ *mentre il suo integrale è divergente (a* $+\infty$*) se* $\alpha \geq 1$.

Allo stesso modo si dimostra che

$f(x) = \frac{1}{(x-a)^\alpha}$ *è integrabile in* $(a, b]$ *(sommabile, trattandosi di una funzione a valori non negativi) se* $0 < \alpha < 1$ *mentre il suo integrale è divergente (a* $+\infty$*) se* $\alpha \geq 1$.

Sia ora $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}_+$, $a > 0$, data da $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$. Se $\alpha \neq 1$ si ha

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)$$

e quindi

$$\int_a^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Quindi $f(x)$ è integrabile in senso improprio in $[a, +\infty)$ se e solo se $\alpha > 1$ e in tal caso

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1}.$$

Se invece $\alpha = 1$ si ha

$$f(x) = \frac{d}{dx}[\log x]$$

e quindi:

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{x \to +\infty} \log x - \log a = +\infty$$

In conclusione

*$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ è integrabile in $[a, +\infty)$, $a > 0$ (sommabile, trattandosi di una funzione a valori non negativi) se $\alpha > 1$ mentre il suo integrale è divergente (a $+\infty$) se $\alpha \le 1$.*

Allo stesso modo si dimostra che

*$f(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}$ è integrabile in $(-\infty, b]$, $b < 0$, (sommabile, trattandosi di una funzione a valori non negativi) se $\alpha > 1$ mentre il suo integrale è divergente (a $+\infty$) se $\alpha \le 1$.*

Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{1}{x^\alpha \log^\beta x}$, $\alpha, \beta > 0$ con $x \in [a, +\infty)$, $a > 1$. Se $x > e$ si ha $\log^\beta x > 1$ e quindi $f(x) \le x^{-\alpha}$ per ogni $x > e$. Dal teorema del confronto e dall'integrabilità di $x^{-\alpha}$ per $\alpha > 1$, segue subito:

*Se $\alpha > 1$ allora $\frac{1}{x^\alpha \log^\beta x}$ è sommabile in $[a, +\infty)$ qualunque sia $\beta > 0$ (in realtà lo è anche se $\beta \le 0$)*[2].

Se $\alpha = 1$ e $\beta \ne 1$, si ha

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x \log^\beta x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log^{1-\beta} x}{1-\beta} - \frac{\log^{1-\beta} a}{1-\beta}$$

e quindi l'integrale improprio converge se $\beta > 1$, mentre diverge se $\beta < 1$. Se invece $\beta = 1$ si ha

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x \log x} = \lim_{x \to +\infty} \log\log x - \log\log a = +\infty.$$

Se $0 < \alpha < 1$ si ha infine

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x^{(1+\alpha)/2}}}{\frac{1}{x^\alpha \log^\beta x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log^\beta x}{x^{(1-\alpha)/2}} = 0$$

qualunque sia $\beta \in \mathbb{R}$, e quindi

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \log^\beta x} = +\infty$$

essendo

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{(1+\alpha)/2}} = +\infty$$

dato che $\frac{1+\alpha}{2} < 1$. In conclusione:

*Siano $\alpha, \beta > 0$ e $a > 1$. Allora l'integrale improprio*

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \log^\beta x}$$

[2] Il lettore è invitato a darne una dimostrazione.

è

*convergente se* $\alpha > 1$ *oppure se* $\alpha = 1$ *e* $\beta > 1$

*divergente se* $\alpha < 1$ *oppure se* $\alpha = 1$ *e* $\beta \leq 1$

## Serie e integrali impropri

Il seguente teorema è noto come *Criterio dell'integrale.*

**Teorema 3**. *Sia* $N \in \mathbb{N}_0$ *un numero naturale e* $f : [N, \infty)$ *una funzione decrescente e infinitesima (ossia* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$*). Allora la serie* $\sum_{n=N}^{\infty} f(n)$ *è convergente se e solo se converge l'integrale improprio* $\int_N^{\infty} f(x)dx$ *ed in tal caso risulta*

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) \leq \int_N^{+\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=N}^{\infty} f(n).$$

*Dimostrazione*. Dato che $f(x)$ è decrescente e infinitesima si ha

$$\inf_{x \geq N} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 0.$$

Di conseguenza $f(x) \geq 0$ per ogni $x \geq N$ e quindi:

$$\lim_{b \to \infty} \int_N^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \int_N^{n+N} f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{N+k}^{N+k+1} f(x)dx$$

Ora, dalla decrescenza di $f(x)$ si ottiene: $f(N + k + 1) \leq f(x) \leq f(N + k)$ per ogni $x \in [N + k, N + k + 1]$ e quindi

$$0 \leq f(N + k + 1) \leq \int_{N+k}^{N+k+1} f(x)dx \leq f(N + k).$$

Dal criterio del confronto per le serie a termini non negativi otteniamo quindi subito che le due serie $\sum_{k=0}^{\infty} \int_{N+k}^{N+k+1} f(x)dx$ e $\sum_{k=0}^{\infty} f(N+k)$ sono entrambe convergenti o entrambe divergenti. Da ciò segue la prima parte della tesi. Se poi entrambe le serie sono convergenti si ha anche

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(N+k+1) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{N+k}^{N+k+1} f(x)dx = \int_{N}^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{k=0}^{\infty} f(N+k).$$

ossia

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} f(k) \leq \int_{N}^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{k=N}^{\infty} f(k)$$

ovvero

$$\int_{N}^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{k=N}^{\infty} f(k) \leq \int_{N}^{\infty} f(x)dx + f(N).$$

Q.E.D.

**Esempi**.

i) La serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

è

convergente se $\alpha > 1$

divergente se $\alpha \leq 1$.

ii) La serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \log^{\beta} n}$$

è

convergente se $\alpha > 1$ oppure se $\alpha = 1$ e $\beta > 1$

divergente se $\alpha < 1$ oppure se $\alpha = 1$ e $\beta \leq 1$.