Integrali impropri in $\mathbb{R}^n$

Flaviano Battelli

Dipartimento di Scienze Matematiche

Università Politecnica delle Marche

Ancona

Diciamo plurirettangolo (chiuso) $R \subset \mathbb{R}^n$ il prodotto cartesiano di n intervalli di $\mathbb{R}$:

$$R = [a_1, b_1] \times \dots [a_n, b_n] = \{(x_1, \dots, x_n) \mid a_j \le x_j \le b_j, j = 1, \dots, n\}.$$

con $a_j < b_j$ per ogni $j = 1, \dots, n$. Diciamo misura di un plurirettangolo il prodotto delle ampiezze dei singoli intervalli:

$$m(R) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$$

È chiaro che per $n = 2$ i plurirettangoli sono gli usuali rettangoli del piano.

Un sottinsieme *limitato* $S \subset \mathbb{R}^n$ si dice di misura nulla secondo Peano-Jordan se vale la seguente proprietà:

> per ogni $\varepsilon > 0$ esistono N plurirettangoli $R_1, \dots, R_N$ tali che $S \subset R_1 \cup \ldots \cup R_N$ e $m(R_1) + \ldots + m(R_N) < \varepsilon$.

Un sottinsieme *limitato* $D \subset \mathbb{R}^n$ si dice misurable alla Peano Jordan, o *PJ-misurabile*, se la sua frontiera ∂D è di misura nulla. Ricordiamo che la frontiera ∂D di un sottinsieme $D \subset \mathbb{R}^n$ è l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^n$ che non sono né interni né esterni ossia i punti $x_0 \in \mathbb{R}^n$ per i quali vale la seguente proprietà:

per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $x_1 \in D$, $x_2 \notin D$, $x_1 \neq x_0 \neq x_2$ tali che $\|x_1 - x_0\| < \varepsilon$ e $\|x_2 - x_0\| < \varepsilon$.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un sottinseme di $\mathbb{R}^n$ (anche illimitato). Diremo che Ω è PJ-misurabile o più semplicemente *misurabile* se,

per ogni sottinsieme $D \subset \mathbb{R}^n$ limitato e PJ-misurabile, l'intersezione $\Omega \cap D$ è un sottisieme (ovviamente limitato) misurabile di $\mathbb{R}^n$.

Infine, un sottinsieme $T \subset \mathbb{R}^n$ (anche illimitato) si dice di *misura nulla* se

per ogni sottinsieme $D \subset \mathbb{R}^n$ limitato e PJ-misurabile, l'intersezione $T \cap D$ è un sottisieme di $\mathbb{R}^n$ di misura nulla.

Sia ora $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un sottinsieme misurabile (anche illimitato) di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione a valori reali. Dico che f è *generalmente continua* se l'insieme dei punti dove $f(x)$ è discontinua ha misura nulla.

Ciò premesso diamo la seguente:

Definizione. Dico che $f(x)$ è integrabile (in senso improprio o generalizzato, o generalmente integrabile) su Ω se per ogni successione crescente di sottinsiemi limitati misurabili $D_n \subset \Omega$ tali che $\overline{D_n} \subset \mathrm{int}(D_{n+1})$ e $\Omega = \cup_{n \geq 0} D_n \cup S$ con $m(S) = 0$, $f(x)$ risulta Riemann integrabile in D_n e il limite

$$\lim_{n \to \infty} \int_{D_n} f(x)dx$$

esiste ed è indipendente dalla scelta dei sottinsiemi D_n di $\mathbb{R}^n$ con la proprietà precedente. Dico che $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è sommabile se è integrabile e il limite precedente è finito.

Si ha il seguente importante risultato:

Teorema. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione generalmente continua e generalmente non negativa, ossia $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \Omega$ tranne al più in un insieme T di misura nulla. Allora $f(x)$ è (generalmente) integrabile in Ω.

Dimostrazione. Occorre dimostrare che il limite $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int_{D_n} f(x)dx$ esiste e non dipende dalla particolare scelta degli insiemi D_n. Dato che $D_n \cap T$ ha misura nulla si ha:

$$0 \leq \int_{D_n} f(x)dx = \int_{D_n \setminus T} f(x)dx \leq \int_{D_{n+1} \setminus T} f(x)dx = \int_{D_{n+1}} f(x)dx$$

dove i segni $\leq$ sono giustificati dal fatto che $D_n \subset D_{n+1}$ e $f(x) \geq 0$ in $D_n \setminus T$ per ogni $n \geq 0$. La successione

$$\left\{ \int_{D_n} f(x)dx \right\}_{n\geq 0}$$

è quindi crescente e pertanto ammette limite, finito o $+\infty$, e

$$\lim_{n\to\infty} \int_{D_n} f(x)dx = \sup \left\{ \int_{D_n} f(x)dx \mid n = 1, 2 \ldots \right\}.$$

Basta quindi dimostrare che tale limite non dipende dalla particolare successione $\{D_n\}$ che si considera. Siano allora $\{D'_n\}$ e $\{D''_n\}$ due successioni tali che

$$\overline{D'_n} \subset \mathrm{int} D'_{n+1}, \quad \overline{D''_n} \subset \mathrm{int} D''_{n+1}$$

e

$$\Omega = \cup_{n\geq 0} D'_n = \cup_{n\geq 0} D''_n$$

(per semplicità abbiamo supposto che valga l'uguaglianza, senza escludere insiemi di misura nulla). Dato che $\overline{D'_n} \subset \mathrm{int} D'_{n+1} \subset \Omega = \cup_{n\geq 0} D''_n$ per ogni $x \in \overline{D'_n}$ esistono $r_x > 0$ ed n_x tali che la palla $B(x, r_x) := \{z \in \mathbb{R}^n \mid \|z - x\| < r_x\}$ è contenuta in D''_{n_x}. Dato che $\overline{D'_n}$ è chiuso e limitato è possibile determinare un numero finito di punti $x_1 \ldots, x_\nu$ tali che

$$\overline{D'_n} \subset B(x_1, r_{x_1}) \cup \ldots \cup B(x_\nu, r_{x_\nu})$$

(questa è una proprietà degli insiemi chiusi e limitati di $\mathbb{R}^n$). Ma allora:

$$\overline{D'_n} \subset D''_{n_{x_1}} \cup \ldots \cup D''_{n_{x_\nu}} \subset D''_m$$

dove $m = \max\{n_{x_1}, \ldots, n_{x_\nu}\}$. Abbiamo quindi provato che *per ogni* $n \geq 0$ *esiste* $m \geq 0$ *tale che* $\overline{D'_n} \subset D''_m$. Scambiando D'_n con D''_n si vede che vale anche il viceversa ossia: *per ogni* $p \geq 0$ *esiste* $q \geq 0$ *tale che* $\overline{D''_p} \subset D'_q$. Ma allora, dato che $f(x) \geq 0$, si ha:

$$\int_{D'_n} f(x)dx \leq \int_{D''_m} f(x)dx \leq \sup \left\{ \int_{D''_n} f(x)dx \mid n = 1, 2 \ldots \right\}$$

per cui

$$\sup \left\{ \int_{D'_n} f(x)dx \mid n = 1, 2 \ldots \right\} \leq \sup \left\{ \int_{D''_n} f(x)dx \mid n = 1, 2 \ldots \right\}.$$

Cambiando D'_n con D''_n otteniamo anche

$$\sup\left\{\int_{D''_n} f(x)dx \mid n = 1, 2\ldots\right\} \leq \sup\left\{\int_{D'_n} f(x)dx \mid n = 1, 2\ldots\right\}$$

e quindi

$$\sup\left\{\int_{D'_n} f(x)dx \mid n = 1, 2\ldots\right\} = \sup\left\{\int_{D''_n} f(x)dx \mid n = 1, 2\ldots\right\}.$$

ossia il valore del limite è indipendente dalla scelta degli insiemi $\{D_n\}$. q.e.d.

Dimostriamo ora un risultato importante noto come

Criterio del Confronto. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}$ un sottinsieme misurabile di $\mathbb{R}^n$ e $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ siano due funzioni generalmente continue. Allora se $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in \Omega$, risulta

$$0 \leq \int_{\Omega} f(x)dx \leq \int_{\Omega} g(x)dx$$

Dimostrazione. Se $\int_{\Omega} g(x)dx = +\infty$ non c'è nulla da dimostrare. Se, invece $\int_{\Omega} g(x)dx \in \mathbb{R}$, sia $\{D_n\}$ una successione di sottinsiemi di Ω con le proprietà della definizione. Si ha

$$0 \leq \int_{D_n\cap\Omega} f(x)dx \leq \int_{D_n\cap\Omega} g(x)dx \leq \int_{\Omega} g(x)dx \in \mathbb{R}.$$

La successione $\int_{D_n\cap\Omega} f(x)dx$ risulta limitata superiormente, e essendo crescente sarà convergente al

$$0 \leq \int_{\Omega} f(x)dx = \sup\left\{\int_{D_n\cap\Omega} f(x)dx \mid n = 1, 2, \ldots\right\} \leq \int_{\Omega} g(x)dx \in \mathbb{R}. \qquad \text{q.e.d.}$$

Consideriamo ora il caso di una funzione generalmente continua che possa assumere valori sia positivi che negativi. Poniamo

$$\Omega_- := \{x \in \Omega \mid f(x) < 0\}, \quad \Omega_+ := \{x \in \Omega \mid f(x) > 0\}, \Omega_0 := \{x \in \Omega \mid f(x) = 0\}.$$

Si può dimostrare che gli insiemi $\Omega_\pm$ e Ω_0 sono misurabili. Dato che $\Omega = \Omega_- \cup \Omega_+ \cup \Omega_0$ e i tre insiemi sono disgiunti, per ogni sottinsieme limitato e misurabile $D \subset \mathbb{R}^n$ si ha

$$\int_{D\cap\Omega} f(x)dx = \int_{D\cap\Omega_0} f(x)dx + \int_{D\cap\Omega_+} f(x)dx + \int_{D\cap\Omega_-} f(x)dx.$$

Dato che

$$\int_{D_n\cap\Omega_0} f(x)dx = \int_{D_n\cap\Omega_0} 0dx = 0$$

otteniamo

$$\int_{D_n\cap\Omega} f(x)dx = \int_{D_n\cap\Omega_+} f(x)dx - \int_{D_n\cap\Omega_-} |f(x)|dx.$$

Sia allora $\{D_n\}$ una successione di insiemi con le proprietà della definizione. Per quanto visto nel Teorema precedente i due limiti

$$\lim_{n\to\infty} \int_{D_n\cap\Omega_+} f(x)dx, \quad \int_{D_n\cap\Omega_-} |f(x)|dx$$

esistono, finiti o $+\infty$. Pertanto a meno che

$$\lim_{n\to\infty} \int_{D_n\cap\Omega_+} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{D_n\cap\Omega_-} |f(x)|dx = +\infty$$

si avrà

$$\lim_{n\to\infty} \int_{D_n\cap\Omega} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{D_n\cap\Omega_+} f(x)dx - \lim_{n\to\infty} \int_{D_n\cap\Omega_-} |f(x)|dx.$$

Tale uguaglianza vale (lo ripetiamo) se a destra del segno $=$ non ci troviamo di fronte alla forma di indecisione $+\infty - \infty$ nel qual caso non possiamo decidere sulla integrabilità di $f(x)$ in Ω. Inoltre $f(x)$ sarà sommabile in Ω se lo è separatamente in Ω_+ e Ω_- ed in tal caso vale la formula precedente. Osserviamo anche che se i due limiti

$$\lim_{n\to\infty} \int_{D_n\cap\Omega_+} f(x)dx \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{D_n\cap\Omega_+} |f(x)|dx$$

esistono finiti, allora la funzione $|f(x)|$ è generalmente integrabile in Ω avendosi

$$\int_{D_n\cap\Omega} |f(x)|dx = \int_{D_n\cap\Omega_+} f(x)dx + \int_{D_n\cap\Omega_-} |f(x)|dx.$$

D'altronde, supponiamo che $|f(x)|$ sia sommabile in Ω. Indichiamo con $\chi_D(x)$ la funzione caratteristica del sottinsieme $D \subset \mathbb{R}^n$:

$$\chi_D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in D \\ 0 & \text{se } x \notin D \end{cases}$$

Si ha:

$$\int_{D_n} f(x)\chi_{\Omega_+}(x)dx = \int_{D_n \cap \Omega_+} f(x)dx$$

e quindi, dal criterio del confronto:

$$\int_{\Omega_+} f(x)dx = \sup\left\{\int_{D_n} f(x)\chi_{\Omega_+}(x)dx \mid n = 1, 2, \ldots\right\} \leq \int_{\Omega} |f(x)|dx$$

Similmente:

$$\int_{\Omega_-} |f(x)|dx \leq \int_{\Omega} |f(x)|dx$$

In conclusione: *Gli integrali* $\int_{\Omega_+} f(x)dx$, $\int_{\Omega_-} f(x)dx$ *sono entrambi convergenti se e solo se l'integrale* $\int_{\Omega} |f(x)|dx$ *lo è.*

In tal caso la funzione $f(x)$ si dice *assolutamente sommabile.* Abbiamo quindi dimostrato che: *se una funzione* $f(x)$ *è assolutamente sommabile allora è anche sommabile.*