Cubo di Rubik e gruppi di permutazioni

Flaviano Battelli

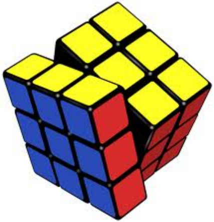
Università Politecnica delle Marche, Ancona (I)

April, 2nd, 2012

Content

Il cubo di Rubik

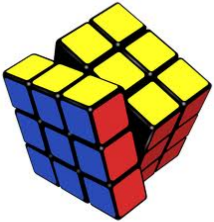
Il cubo di Rubik è un puzzle meccanico inventato nel 1974 da Ernö Rubik (scultore e professore di Architettura). Consiste in un cubo diviso in 27 cubi più piccoli (di cui uno non si vede). Ad ogni faccia è attribuito un colore diverso e le facce sono libere di ruotare attorno al loro asse (sia in senso orario che antiorario). I cubetti che compongono le facce dei cubo sono chiamate in modo diverso a seconda della posizione che occupano.



Ci sono il cubo centrale, i cubi d'angolo e i cubi di faccia (in inglese center cube, corner cubes e edge cubes.

Il cubo di Rubik

Il cubo di Rubik è un puzzle meccanico inventato nel 1974 da Ernö Rubik (scultore e professore di Architettura). Consiste in un cubo diviso in 27 cubi più piccoli (di cui uno non si vede). Ad ogni faccia è attribuito un colore diverso e le facce sono libere di ruotare attorno al loro asse (sia in senso orario che antiorario). I cubetti che compongono le facce dei cubo sono chiamate in modo diverso a seconda della posizione che occupano.



Ci sono il cubo centrale, i cubi d'angolo e i cubi di faccia (in inglese center cube, corner cubes e edge cubes. Dopo alcune rotazioni delle facce il cubo si presenterà più o meno nel modo seguente:

Il problema è di ricostruire il cubo ossia riportarlo alla configurazione iniziale. In tanti si sono cimentati e si cimentano con il gioco

Il problema è di ricostruire il cubo ossia riportarlo alla configurazione iniziale. In tanti si sono cimentati e si cimentano con il gioco

Il problema è di ricostruire il cubo ossia riportarlo alla configurazione iniziale. In tanti si sono cimentati e si cimentano con il gioco

Grazie al successo (anche economico) del cubo di Rubik sono apparsi cubi sempre più complicati come ad esempio

Le mosse del cubo

Ma torniamo al cubo classico. Ogni mossa del cubo consiste in una rotazione (in senso orario o antiorario) di una faccia.

Le mosse del cubo

Ma torniamo al cubo classico. Ogni mossa del cubo consiste in una rotazione (in senso orario o antiorario) di una faccia. Numerando le faccette visibili da 1 a 54 ogni rotazione determina un elemento dell'insieme delle permutazioni nell'insieme $S = \{1, \ldots, 54\}$ che ha $54! = 54 \cdot 53 \cdot 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$ elementi.

Le mosse del cubo

Ma torniamo al cubo classico. Ogni mossa del cubo consiste in una rotazione (in senso orario o antiorario) di una faccia. Numerando le faccette visibili da 1 a 54 ogni rotazione determina un elemento dell'insieme delle permutazioni nell'insieme $S = \{1, \dots, 54\}$ che ha $54! = 54 \cdot 53 \cdot 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$ elementi. Ci si può chiedere se ogni permutazione delle faccette sia ammissibile.

Le mosse del cubo

Ma torniamo al cubo classico. Ogni mossa del cubo consiste in una rotazione (in senso orario o antiorario) di una faccia. Numerando le faccette visibili da 1 a 54 ogni rotazione determina un elemento dell'insieme delle permutazioni nell'insieme $S = \{1, \ldots, 54\}$ che ha $54! = 54 \cdot 53 \cdot 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$ elementi. Ci si può chiedere se ogni permutazione delle faccette sia ammissibile. Ovviamente no. Una permutazione qualsiasi si può ottenere staccando le etichette colorate dalle facce e poi attaccandole a caso, ma è chiaro che applicando una trasformazione del cubo di Rubik non possiamo ottenere cubetti con due facce dello stesso colore.

Le mosse del cubo

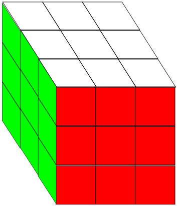
Ma torniamo al cubo classico. Ogni mossa del cubo consiste in una rotazione (in senso orario o antiorario) di una faccia. Numerando le faccette visibili da 1 a 54 ogni rotazione determina un elemento dell'insieme delle permutazioni nell'insieme $S = \{1, \ldots, 54\}$ che ha $54! = 54 \cdot 53 \cdot 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$ elementi. Ci si può chiedere se ogni permutazione delle faccette sia ammissibile. Ovviamente no. Una permutazione qualsiasi si può ottenere staccando le etichette colorate dalle facce e poi attaccandole a caso, ma è chiaro che applicando una trasformazione del cubo di Rubik non possiamo ottenere cubetti con due facce dello stesso colore. Ma se stacchiamo le etichette colorate dalle singole facce e poi le riattacchiamo a caso, ma in modo che ogni cubetto abbia facce di colori diversi, quante probabilità abbiamo di ottenere un cubo ricostruibile?

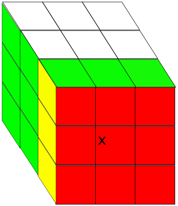
La prima mossa distruttiva

Per rispondere alla domanda semplifichiamo un po' il problema considerando le posizioni dei cubetti trascurando quella delle facce. (Chi ha giocato con il cubo di Rubik sa che si parla di cubi posizionati ma, magari, ruotati).

La prima mossa distruttiva

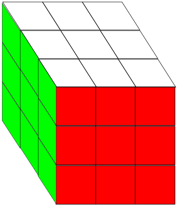
Per rispondere alla domanda semplifichiamo un po' il problema considerando le posizioni dei cubetti trascurando quella delle facce. (Chi ha giocato con il cubo di Rubik sa che si parla di cubi posizionati ma, magari, ruotati). Indichiamo con C_1, C_2, C_3, C_4 i cubi d'angolo partendo, per esempio, da quello in alto a sinistra (facce: bianca rossa e verde) e ruotando in senso orario e con E_1, E_2, E_3, E_4 quelli di faccia partendo, per esempio, da quello rosso-bianco (sempre ruotando in senso orario).

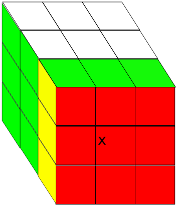




La prima mossa distruttiva

Per rispondere alla domanda semplifichiamo un po' il problema considerando le posizioni dei cubetti trascurando quella delle facce. (Chi ha giocato con il cubo di Rubik sa che si parla di cubi posizionati ma, magari, ruotati). Indichiamo con C_1, C_2, C_3, C_4 i cubi d'angolo partendo, per esempio, da quello in alto a sinistra (facce: bianca rossa e verde) e ruotando in senso orario e con E_1, E_2, E_3, E_4 quelli di faccia partendo, per esempio, da quello rosso-bianco (sempre ruotando in senso orario).





È chiaro che questa mossa corrisponde alla permutazione $\sigma = (C_1, C_2, C_3, C_4) \circ (E_1, E_2, E_3, E_4)$

Segno delle permutazioni

Se la rotazione avvenisse in senso antiorario invece si otterrebbe la permutazione

$$(C_1, C_4, C_3, C_2) \circ (E_1, E_4, E_3, E_2)$$

In ogni caso la permutazione associata ad una rotazione è la composizione di due cicli di lunghezza 4. Il segno della permutazione è quindi $(-1)^{4+4-2} = 1$. Dato che ogni trasformazione del cubo di Rubik si ottiene componendo rotazioni del tipo suddetto otteniamo che ogni trasformazione del cubo di Rubik, vista come permutazione dei cubetti, ha segno $= 1$.

Segno delle permutazioni

Se la rotazione avvenisse in senso antiorario invece si otterrebbe la permutazione

$$(C_1, C_4, C_3, C_2) \circ (E_1, E_4, E_3, E_2)$$

In ogni caso la permutazione associata ad una rotazione è la composizione di due cicli di lunghezza 4. Il segno della permutazione è quindi $(-1)^{4+4-2} = 1$. Dato che ogni trasformazione del cubo di Rubik si ottiene componendo rotazioni del tipo suddetto otteniamo che ogni trasformazione del cubo di Rubik, vista come permutazione dei cubetti, ha segno $= 1$. La scelta di denotare in questo modo i cubetti non modifica il risultato. Per esempio si potrebbe utilizzare il simbolo FTL (front-top-left) invece di C_1, FTR invece di C_2, TF invece di E_1 ecc.

Rotazione dei cubetti

Consideriamo i cubetti d'angolo. Per semplicità supponiamo che lo spigolo sia smussato cosicché si possa parlare di normale esterna.

Rotazione dei cubetti

Consideriamo i cubetti d'angolo. Per semplicità supponiamo che lo spigolo sia smussato cosicché si possa parlare di normale esterna. Supponiamo di mettere un segnalatore sulla faccia superiore ed uno su quella inferiore. Dopo la rotazione questi segnalatori si troveranno sulle facce destra e sinistra.

Rotazione dei cubetti

Consideriamo i cubetti d'angolo. Per semplicità supponiamo che lo spigolo sia smussato cosicché si possa parlare di normale esterna. Supponiamo di mettere un segnalatore sulla faccia superiore ed uno su quella inferiore. Dopo la rotazione questi segnalatori si troveranno sulle facce destra e sinistra. Consideriamo il cubetto C_1: dopo la rotazione questo si troverà in C_2 e la faccia segnalata si troverà sulla destra. Quindi, guardando dalla normale esterna, è come se il cubetto C_1 fosse ruotato di $\frac{1}{3}$ di giro in senso orario.

Rotazione dei cubetti

Consideriamo i cubetti d'angolo. Per semplicità supponiamo che lo spigolo sia smussato cosicché si possa parlare di normale esterna. Supponiamo di mettere un segnalatore sulla faccia superiore ed uno su quella inferiore. Dopo la rotazione questi segnalatori si troveranno sulle facce destra e sinistra. Consideriamo il cubetto C_1: dopo la rotazione questo si troverà in C_2 e la faccia segnalata si troverà sulla destra. Quindi, guardando dalla normale esterna, è come se il cubetto C_1 fosse ruotato di $\frac{1}{3}$ di giro in senso orario. Lo stesso vale per il cubetto C_4: la faccia col segnalatore passa da sotto a sinistra.

Rotazione dei cubetti

Consideriamo i cubetti d'angolo. Per semplicità supponiamo che lo spigolo sia smussato cosicché si possa parlare di normale esterna. Supponiamo di mettere un segnalatore sulla faccia superiore ed uno su quella inferiore. Dopo la rotazione questi segnalatori si troveranno sulle facce destra e sinistra. Consideriamo il cubetto C_1: dopo la rotazione questo si troverà in C_2 e la faccia segnalata si troverà sulla destra. Quindi, guardando dalla normale esterna, è come se il cubetto C_1 fosse ruotato di $\frac{1}{3}$ di giro in senso orario. Lo stesso vale per il cubetto C_4: la faccia col segnalatore passa da sotto a sinistra. Ma nel cubetto C_2 la faccia segnalata passa da sopra a destra ed è come se fosse ruotato di $\frac{1}{3}$ di giro in senso antiorario e lo stesso vale per C_3.

Rotazione dei cubetti

Consideriamo i cubetti d'angolo. Per semplicità supponiamo che lo spigolo sia smussato cosicché si possa parlare di normale esterna. Supponiamo di mettere un segnalatore sulla faccia superiore ed uno su quella inferiore. Dopo la rotazione questi segnalatori si troveranno sulle facce destra e sinistra. Consideriamo il cubetto C_1: dopo la rotazione questo si troverà in C_2 e la faccia segnalata si troverà sulla destra. Quindi, guardando dalla normale esterna, è come se il cubetto C_1 fosse ruotato di $\frac{1}{3}$ di giro in senso orario. Lo stesso vale per il cubetto C_4: la faccia col segnalatore passa da sotto a sinistra. Ma nel cubetto C_2 la faccia segnalata passa da sopra a destra ed è come se fosse ruotato di $\frac{1}{3}$ di giro in senso antiorario e lo stesso vale per C_3. In conclusione la somma algebrica delle rotazioni dei cubi d'angolo è $= 0$.

Un discorso analogo vale per i cubetti di faccia. Anche per loro la somma algebrica delle rotazioni è $= 0$.

Un discorso analogo vale per i cubetti di faccia. Anche per loro la somma algebrica delle rotazioni è $= 0$. Queste relazioni individuano univocamente gli elementi del gruppo di Rubik.

Un discorso analogo vale per i cubetti di faccia. Anche per loro la somma algebrica delle rotazioni è $= 0$. Queste relazioni individuano univocamente gli elementi del gruppo di Rubik. Ogni cubetto d'angolo può trovarsi in otto angoli diversi quindi ci sono 8! possibilità.

Un discorso analogo vale per i cubetti di faccia. Anche per loro la somma algebrica delle rotazioni è $= 0$. Queste relazioni individuano univocamente gli elementi del gruppo di Rubik. Ogni cubetto d'angolo può trovarsi in otto angoli diversi quindi ci sono $8!$ possibilità. Per ognuna di queste possibilità vi sono 3^8 possibili disposizioni dei colori.

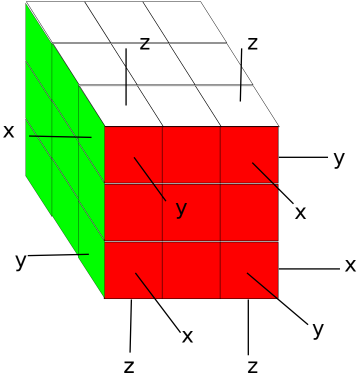
Un discorso analogo vale per i cubetti di faccia. Anche per loro la somma algebrica delle rotazioni è $= 0$. Queste relazioni individuano univocamente gli elementi del gruppo di Rubik. Ogni cubetto d'angolo può trovarsi in otto angoli diversi quindi ci sono 8! possibilità. Per ognuna di queste possibilità vi sono 3^8 possibili disposizioni dei colori. I cubetti di faccia, invece, possono essere disposti in 12! diverse posizioni ma ognuno di essi ha a disposizione solo due possibilità per i colori.

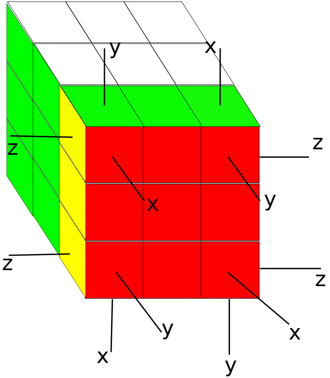
Un discorso analogo vale per i cubetti di faccia. Anche per loro la somma algebrica delle rotazioni è $= 0$. Queste relazioni individuano univocamente gli elementi del gruppo di Rubik. Ogni cubetto d'angolo può trovarsi in otto angoli diversi quindi ci sono 8! possibilità. Per ognuna di queste possibilità vi sono 3^8 possibili disposizioni dei colori. I cubetti di faccia, invece, possono essere disposti in 12! diverse posizioni ma ognuno di essi ha a disposizione solo due possibilità per i colori. In totale abbiamo $2^{12} \cdot 3^8 \cdot (8!) \cdot (12!)$ possibilità, ma di queste permutazioni soltanto la metà ha segno $+1$ e di questa metà soltanto $\frac{1}{3}$ ha somma delle rotazioni dei cubetti d'angolo uguale a 0 ($\frac{1}{3}$ ce l'ha uguale a $\frac{2\pi}{3}$ e un altro $\frac{1}{3}$ a $\frac{4\pi}{3}$) e solo per la metà la somma delle rotazioni dei cubetti di faccia è zero.

Un discorso analogo vale per i cubetti di faccia. Anche per loro la somma algebrica delle rotazioni è $= 0$. Queste relazioni individuano univocamente gli elementi del gruppo di Rubik. Ogni cubetto d'angolo può trovarsi in otto angoli diversi quindi ci sono 8! possibilità. Per ognuna di queste possibilità vi sono 3^8 possibili disposizioni dei colori. I cubetti di faccia, invece, possono essere disposti in 12! diverse posizioni ma ognuno di essi ha a disposizione solo due possibilità per i colori. In totale abbiamo $2^{12} \cdot 3^8 \cdot (8!) \cdot (12!)$ possibilità, ma di queste permutazioni soltanto la metà ha segno $+1$ e di questa metà soltanto $\frac{1}{3}$ ha somma delle rotazioni dei cubetti d'angolo uguale a 0 ($\frac{1}{3}$ ce l'ha uguale a $\frac{2\pi}{3}$ e un altro $\frac{1}{3}$ a $\frac{4\pi}{3}$) e solo per la metà la somma delle rotazioni dei cubetti di faccia è zero. Quindi il gruppo di Rubik ha $2^{10} \cdot 3^7 \cdot (8!) \cdot (12!) = 43252003274489856000$ elementi.

Un altro modo di vedere le rotazioni

Le rotazioni dei cubi d'angolo possono essere viste anche in un altro modo. Ad ogni faccetta associamo una terna di riferimento in modo che sia uscente dal cubo d'angolo:





Il cubo d'angolo $C_1 = FTL$ viene trasportato dalla rotazione nel cubo d'angolo $C_1 = FTR$, ma l'orientazione della terna (x, y, z) non è la stessa.

Il cubo d'angolo $C_1 = FTL$ viene trasportato dalla rotazione nel cubo d'angolo $C_1 = FTR$, ma l'orientazione della terna (x, y, z) non è la stessa. Infatti la trasformazione manda l'asse x in z, l'asse y in x e l'asse z in y. La matrice della trasformazione è quindi:

$$T_{C_1 C_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il cubo d'angolo $C_1 = FTL$ viene trasportato dalla rotazione nel cubo d'angolo $C_1 = FTR$, ma l'orientazione della terna (x, y, z) non è la stessa. Infatti la trasformazione manda l'asse x in z, l'asse y in x e l'asse z in y. La matrice della trasformazione è quindi:

$$T_{C_1 C_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Analogamente si ottiene:

$$T_{C_2 C_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = T_{C_4 C_1} = T^t_{C_1 C_2} \quad T_{C_3 C_4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tutte queste trasformazioni hanno determinante uguale ad 1 (consistente con il fatto che mantengono l'orientazione dei cubetti) e corrispondono a delle rotazioni.

È facile verificare che

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi se $T_{C_1 C_2}$ e $T_{C_3 C_4}$ corrispondono ad una rotazione di $\frac{2\pi}{3}$ in senso orario $T_{C_2 C_3}$ e $T_{C_4 C_1}$ corrispondono ad una rotazione di $\frac{2\pi}{3}$ in senso antiorario. In conclusione la somma algebrica delle rotazioni dei cubi d'angolo è $= 0$.

Le trasformazioni elementari

È usuale denotare gli elementi del gruppo di Rubik tramite delle parole formate dalle lettere L, R, F, B, U, D e l, r, f, b, u, d. R sta per rotazione della faccia destra di $\frac{\pi}{2}$ in senso orario, mentre r è la trasformazione inversa ossia rotazione della faccia destra di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario.

Le trasformazioni elementari

È usuale denotare gli elementi del gruppo di Rubik tramite delle parole formate dalle lettere L, R, F, B, U, D e l, r, f, b, u, d. R sta per rotazione della faccia destra di $\frac{\pi}{2}$ in senso orario, mentre r è la trasformazione inversa ossia rotazione della faccia destra di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario. Analogamente si definiscono L, F, B, U, D e l, f, b, u, d (L,l=left, F,f=front, B,b=back, U,u=up, D,d=down).

Le trasformazioni elementari

È usuale denotare gli elementi del gruppo di Rubik tramite delle parole formate dalle lettere L, R, F, B, U, D e l, r, f, b, u, d. R sta per rotazione della faccia destra di $\frac{\pi}{2}$ in senso orario, mentre r è la trasformazione inversa ossia rotazione della faccia destra di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario. Analogamente si definiscono L, F, B, U, D e l, f, b, u, d (L,l=left, F,f=front, B,b=back, U,u=up, D,d=down). Ovviamente ci sono delle semplificazioni, per esempio $R^4 = F^4 = B^4 = U^4 = D^4 = e$ (l'identità del gruppo) per cui $f^2 = F^2$ ecc.

Le trasformazioni elementari

È usuale denotare gli elementi del gruppo di Rubik tramite delle parole formate dalle lettere L, R, F, B, U, D e l, r, f, b, u, d. R sta per rotazione della faccia destra di $\frac{\pi}{2}$ in senso orario, mentre r è la trasformazione inversa ossia rotazione della faccia destra di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario. Analogamente si definiscono L, F, B, U, D e l, f, b, u, d (L,l=left, F,f=front, B,b=back, U,u=up, D,d=down). Ovviamente ci sono delle semplificazioni, per esempio $R^4 = F^4 = B^4 = U^4 = D^4 = e$ (l'identità del gruppo) per cui $f^2 = F^2$ ecc. Allo scopo di ricostruire il cubo di Rubik è necessario lo studio di alcune combinazioni di queste trasformazioni. È superfluo sottolineare come la difficoltà della ricostruzione sia legata alla non commutatività del gruppo, ad esempio, $LT \neq TL$.

I cubetti, invece, li indichiamo con la lettere delle facce a cui appartengono. Per esempio $TLF = FTL$ indica il cubo d'angolo che, prima, abbiamo chiamato C_1 mentre TF il cubo di faccia che abbiamo chiamato E_1. Si pone $S_1S_2 := S_2 \circ S_1$ ossia S_1S_2 significa che al risultato dell'applicazione di S_1 si fa seguire S_2. Ad esempio lT significa ruotare la faccia sinistra di $\frac{1}{4}$ di giro in senso antiorario e poi quella in alto di $\frac{1}{4}$ di giro in senso orario (il senso è quello che si vede guardando la faccia dalla normale esterna).

I cubetti, invece, li indichiamo con la lettere delle facce a cui appartengono. Per esempio $TLF = FTL$ indica il cubo d'angolo che, prima, abbiamo chiamato C_1 mentre TF il cubo di faccia che abbiamo chiamato E_1. Si pone $S_1S_2 := S_2 \circ S_1$ ossia S_1S_2 significa che al risultato dell'applicazione di S_1 si fa seguire S_2. Ad esempio lT significa ruotare la faccia sinistra di $\frac{1}{4}$ di giro in senso antiorario e poi quella in alto di $\frac{1}{4}$ di giro in senso orario (il senso è quello che si vede guardando la faccia dalla normale esterna). Un'avvertenza: con R,L,U,D,F,B indicheremo anche le facce del cubo. Sarà chiaro dal contesto se ci riferiamo alla faccia o alla rotazione della faccia.

La trasformazione flFL

Consideriamo, come esempio, la trasformazione *flFL*.

La trasformazione fIFL

Consideriamo, come esempio, la trasformazione *fIFL*. È facile convincersi che

$$fIFL = \begin{pmatrix} UFR & UF & ULF & LF & FLD & LD & LBD \\ LFU & LF & UFR & LD & DLB & UF & FLD \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} UFR & LFU \end{pmatrix} \begin{pmatrix} FLD & DBL \end{pmatrix} \begin{pmatrix} UF & LF & LD \end{pmatrix}$$

La trasformazione flFL

Consideriamo, come esempio, la trasformazione *flFL*. È facile convincersi che

$$flFL = \begin{pmatrix} UFR & UF & ULF & LF & FLD & LD & LBD \\ LFU & LF & UFR & LD & DLB & UF & FLD \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} UFR & LFU \end{pmatrix} \begin{pmatrix} FLD & DBL \end{pmatrix} \begin{pmatrix} UF & LF & LD \end{pmatrix}$$

La seconda scrittura però perde in precisione. Infatti $UFR \mapsto LFU$ ma $LFU \mapsto FRU$. Ciò significa che applicando due volte la trasformazione *flFL* il cubo d'angolo *UFR* si ritrova nella stessa posizione, ma ruotato (di un terzo di angolo giro in senso antiorario) ossia $(flFL)^2 : UFR \mapsto FRU$.

La trasformazione flFL

Consideriamo, come esempio, la trasformazione *flFL*. È facile convincersi che

$$flFL = \begin{pmatrix} UFR & UF & ULF & LF & FLD & LD & LBD \\ LFU & LF & UFR & LD & DLB & UF & FLD \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} UFR & LFU \end{pmatrix} \begin{pmatrix} FLD & DBL \end{pmatrix} \begin{pmatrix} UF & LF & LD \end{pmatrix}$$

La seconda scrittura però perde in precisione. Infatti $UFR \mapsto LFU$ ma $LFU \mapsto FRU$. Ciò significa che applicando due volte la trasformazione *flFL* il cubo d'angolo *UFR* si ritrova nella stessa posizione, ma ruotato (di un terzo di angolo giro in senso antiorario) ossia $(flFL)^2 : UFR \mapsto FRU$. Dato che $(flFL)^2$ ruota i cubetti d'angolo di $\frac{1}{3}$ di giro e $(flFL)^3$ lascia inalterati i cubi di faccia è facile dedurre che $(flFL)^6 = e$, l'identità.

È facile verificare che:

$$(flFL)^2 : \begin{array}{l} UFR \mapsto FRU \\ ULF \mapsto LFU \\ FLD \mapsto DFL \\ LBD \mapsto DLB \end{array}$$

mentre

$$(flFL)^2 : \begin{pmatrix} UF & LD & LF \end{pmatrix}$$

È facile verificare che:

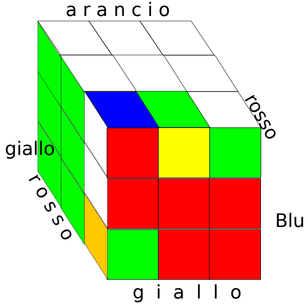
$$(flFL)^2 : \begin{array}{l} UFR \mapsto FRU \\ ULF \mapsto LFU \\ FLD \mapsto DFL \\ LBD \mapsto DLB \end{array}$$

mentre

$$(flFL)^2 : \begin{pmatrix} UF & LD & LF \end{pmatrix}$$

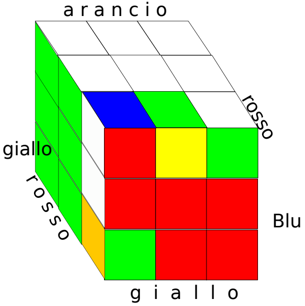
Osserviamo che i cubi d'angolo della faccia U ruotano in senso antiorario, quelli della faccia D in senso orario (notare la permutazione delle lettere).

Prima di procedere rappresentiamo il risultato della trasformazione fIFL.



Per chiarezza abbiamo scritto i colori delle facce nascoste.

Prima di procedere rappresentiamo il risultato della trasformazione fIFL.



Per chiarezza abbiamo scritto i colori delle facce nascoste. Un'osservazione importante che tornerà utile in seguito è che l'unico cubo modificato nella faccia B è il cubo d'angolo BLD che è il cubo (ruotato di $\frac{1}{3}$ di giro in senso orario) che si trovava in FLB.

e $(flFL)^3$?

Dato che il ciclo $\begin{pmatrix} UF & LF & LD \end{pmatrix}$ ha periodo 3 si ha

$$(flFL)^3 = \begin{pmatrix} UFR & FUL \\ FUL & UFR \end{pmatrix} \begin{pmatrix} FLD & BDL \\ BDL & FLD \end{pmatrix}$$

In particolare $(flFL)^3$ cambia di posto i cubi d'angolo superiori e inferiori (fra loro) lasciando invariati tutti gli altri cubetti. Quindi la permutazione $(flFL)^3$ può essere utilizzata per scambiare i posti dei cubi d'angolo senza modificare le posizioni dei cubi di faccia.

e $(fIFL)^3$?

Dato che il ciclo $\begin{pmatrix} UF & LF & LD \end{pmatrix}$ ha periodo 3 si ha

$$(fIFL)^3 = \begin{pmatrix} UFR & FUL \\ FUL & UFR \end{pmatrix} \begin{pmatrix} FLD & BDL \\ BDL & FLD \end{pmatrix}$$

In particolare $(fIFL)^3$ cambia di posto i cubi d'angolo superiori e inferiori (fra loro) lasciando invariati tutti gli altri cubetti. Quindi la permutazione $(fIFL)^3$ può essere utilizzata per scambiare i posti dei cubi d'angolo senza modificare le posizioni dei cubi di faccia. È chiaro che vengono spostati sia i cubi d'angolo del tipo FU (ossia nella faccia superiore e frontale) che quelli di tipo LD, però

e $(fIFL)^3$?

Dato che il ciclo $\begin{pmatrix} UF & LF & LD \end{pmatrix}$ ha periodo 3 si ha

$$(fIFL)^3 = \begin{pmatrix} UFR & FUL \\ FUL & UFR \end{pmatrix} \begin{pmatrix} FLD & BDL \\ BDL & FLD \end{pmatrix}$$

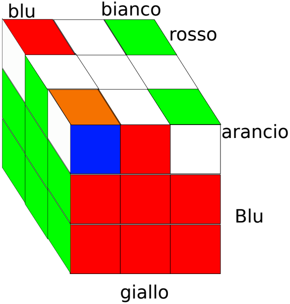
In particolare $(fIFL)^3$ cambia di posto i cubi d'angolo superiori e inferiori (fra loro) lasciando invariati tutti gli altri cubetti. Quindi la permutazione $(fIFL)^3$ può essere utilizzata per scambiare i posti dei cubi d'angolo senza modificare le posizioni dei cubi di faccia. È chiaro che vengono spostati sia i cubi d'angolo del tipo FU (ossia nella faccia superiore e frontale) che quelli di tipo LD, però ruotando la faccia superiore in senso orario/antiorario e ripetendo la trasformazione $(fIFL)^3$ e in seguito la rotazione in senso opposto della faccia superiore, i cubi d'angolo di tipo LD tornano al loro posto mentre vengono modificati altri cubi d'angolo della faccia U.

Un esempio

Mostriamo come si possa ricostruire il cubo di Rubik da una posizione alla quale si riesce a pervenire dopo un congruo numero di trasformazioni. La situazione è quella in cui quasi tutto il cubo è ricostruito, tranne i cubi d'angolo di una faccia che per comodità pensiamo essere la faccia U.

Un esempio

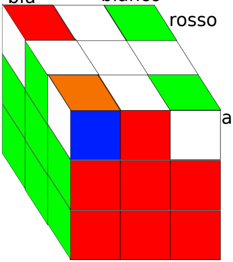
Mostriamo come si possa ricostruire il cubo di Rubik da una posizione alla quale si riesce a pervenire dopo un congruo numero di trasformazioni. La situazione è quella in cui quasi tutto il cubo è ricostruito, tranne i cubi d'angolo di una faccia che per comodità pensiamo essere la faccia U.



La permutazione riguarda solo 4 cubi d'angolo e può essere solo di tre tipi:

Un esempio

Mostriamo come si possa ricostruire il cubo di Rubik da una posizione alla quale si riesce a pervenire dopo un congruo numero di trasformazioni. La situazione è quella in cui quasi tutto il cubo è ricostruito, tranne i cubi d'angolo di una faccia che per comodità pensiamo essere la faccia U.



La permutazione riguarda solo 4 cubi d'angolo e può essere solo di tre tipi: un ciclo di lunghezza 4: $(C_{i_1}\ C_{i_2}\ C_{i_3}\ C_{i_4})$ oppure un ciclo di lunghezza 3: $(C_{i_1}\ C_{i_2}\ C_{i_3}) \circ (C_{i_4})$ oppure due cicli disgiunti di lunghezza 2: $(C_{i_1}\ C_{i_2}) \circ (C_{i_3}\ C_{i_4})$.

Posizionare i cubi d'angolo

Di queste permutazioni la prima ha segno -1 mentre le altre due hanno segno 1. Per cui le sole possibilità sono: un cubo posizionato e gli altri tre scambiati di posto, oppure due coppie di cubi scambiati di posto.

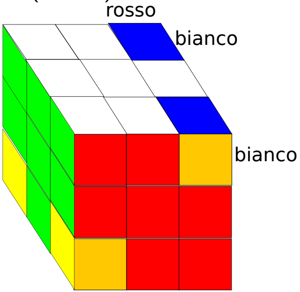
Posizionare i cubi d'angolo

Di queste permutazioni la prima ha segno -1 mentre le altre due hanno segno 1. Per cui le sole possibilità sono: un cubo posizionato e gli altri tre scambiati di posto, oppure due coppie di cubi scambiati di posto. Nel secondo caso, eventualmente rinominando i cubi, possiamo supporre che la trasformazione sia della forma $(C_1\ C_2) \circ (C_3\ C_4)$ oppure $(C_1\ C_3) \circ (C_2\ C_4)$.

Posizionare i cubi d'angolo

Di queste permutazioni la prima ha segno -1 mentre le altre due hanno segno 1. Per cui le sole possibilità sono: un cubo posizionato e gli altri tre scambiati di posto, oppure due coppie di cubi scambiati di posto. Nel secondo caso, eventualmente rinominando i cubi, possiamo supporre che la trasformazione sia della forma $(C_1\ C_2) \circ (C_3\ C_4)$ oppure $(C_1\ C_3) \circ (C_2\ C_4)$. Consideriamo il caso $(C_1\ C_3) \circ (C_2\ C_4)$.

Ruotiamo U di $\frac{1}{4}$ di giro in senso orario (ossia eseguiamo il ciclo $(C_1\ C_2\ C_3\ C_4)$) e poi applichiamo $(flFL)^3$. Quindi ruotiamo ancora U di $\frac{1}{4}$ di giro, ma in senso antiorario. In figura, per chiarezza è rappresentata questa trasformazione applicata al cubo in posizione di partenza (ossia risolto).



L'effetto di questa sequenza di permutazioni è quello si scambiare di posto (ruotandoli) i cubi d'angolo delle facce UR: FRU e RUB e quelli delle facce LD: FLD e LBD.

L'effetto di questa sequenza di permutazioni è quello si scambiare di posto (ruotandoli) i cubi d'angolo delle facce UR: FRU e RUB e quelli delle facce LD: FLD e LBD. Quindi applicando questa trasformazione nel caso in esame (in cui i cubi si trovano nella posizione della permutazione $(C_1\ C_3) \circ (C_2\ C_4)$), si arriva alla permutazione dei cubi d'angolo della faccia U:
$(C_2\ C_3) \circ (C_1\ C_3) \circ (C_2\ C_4) = (C_1\ C_2\ C_4\ C_3)$ (non facciamoci ingannare dal fatto che questa permutazione dei cubi d'angolo è un ciclo di lunghezza 4, perchè per ottenere questa configurazione si sono permutati, in un ciclo di lunghezza 2, anche i cubi d'angolo DL cosicché la permutazione ha segno $+1$).

L'effetto di questa sequenza di permutazioni è quello si scambiare di posto (ruotandoli) i cubi d'angolo delle facce UR: FRU e RUB e quelli delle facce LD: FLD e LBD. Quindi applicando questa trasformazione nel caso in esame (in cui i cubi si trovano nella posizione della permutazione $(C_1\ C_3) \circ (C_2\ C_4)$), si arriva alla permutazione dei cubi d'angolo della faccia U: $(C_2\ C_3) \circ (C_1\ C_3) \circ (C_2\ C_4) = (C_1\ C_2\ C_4\ C_3)$ (non facciamoci ingannare dal fatto che questa permutazione dei cubi d'angolo è un ciclo di lunghezza 4, perchè per ottenere questa configurazione si sono permutati, in un ciclo di lunghezza 2, anche i cubi d'angolo DL cosicché la permutazione ha segno $+1$). Applichiamo ancora la trasformazione $(flFL)^3$. L'effetto finale sarà quello di riposizionare i cubi d'angolo delle facce DL, mentre nella faccia U si ottiene la composizione di cicli $(C_1\ C_2) \circ (C_1\ C_2\ C_4\ C_3) = (C_1) \circ (C_2\ C_4\ C_3\ )$. Ossia un cubo d'angolo (C_1) è posizionato e gli altri tre *circolano*.

Ruotando il cubo di $\frac{1}{4}$ di giro in senso orario arriviamo al ciclo: $(C_4) \circ (C_1 \ C_3 \ C_2)$.

Ruotando il cubo di $\frac{1}{4}$ di giro in senso orario arriviamo al ciclo: $(C_4) \circ (C_1\ C_3\ C_2)$. Esercizio: Verificare che applicando la trasformazione $(flFL)^3$ alla configurazione $(C_1\ C_2) \circ (C_3\ C_4)$ si arriva direttamente a $(C_1) \circ (C_2) \circ (C_3\ C_4)$. Quindi dire come procedere per arrivare a $(C_1) \circ (C_2) \circ (C_3) \circ (C_4)$.

Ruotando il cubo di $\frac{1}{4}$ di giro in senso orario arriviamo al ciclo: $(C_4) \circ (C_1\ C_3\ C_2)$. Esercizio: Verificare che applicando la trasformazione $(flFL)^3$ alla configurazione $(C_1\ C_2) \circ (C_3\ C_4)$ si arriva direttamente a $(C_1) \circ (C_2) \circ (C_3\ C_4)$. Quindi dire come procedere per arrivare a $(C_1) \circ (C_2) \circ (C_3) \circ (C_4)$. La trasformazione $U(flFL)^3u$ ci serve anche per riposizionare i cubi C_1, C_3, C_4. Infatti abbiamo visto che $U(flFL)^3u$ scambia tra loro i cubi d'angolo delle facce UR ossia, sulla faccia U, corrisponde a $(C_2\ C_3)$ pertanto applicando questa permutazione alla situazione $(C_4) \circ (C_1\ C_3\ C_2)$ si ottiene: $(C_2\ C_3) \circ (C_4) \circ (C_1\ C_3\ C_2) = (C_1\ C_2) \circ (C_3) \circ (C_4)$.

Ruotando il cubo di $\frac{1}{4}$ di giro in senso orario arriviamo al ciclo: $(C_4) \circ (C_1\ C_3\ C_2)$. Esercizio: Verificare che applicando la trasformazione $(flFL)^3$ alla configurazione $(C_1\ C_2) \circ (C_3\ C_4)$ si arriva direttamente a $(C_1) \circ (C_2) \circ (C_3\ C_4)$. Quindi dire come procedere per arrivare a $(C_1) \circ (C_2) \circ (C_3) \circ (C_4)$. La trasformazione $U(flFL)^3u$ ci serve anche per riposizionare i cubi C_1, C_3, C_4. Infatti abbiamo visto che $U(flFL)^3u$ scambia tra loro i cubi d'angolo delle facce UR ossia, sulla faccia U, corrisponde a $(C_2\ C_3)$ pertanto applicando questa permutazione alla situazione $(C_4) \circ (C_1\ C_3\ C_2)$ si ottiene: $(C_2\ C_3) \circ (C_4) \circ (C_1\ C_3\ C_2) = (C_1\ C_2) \circ (C_3) \circ (C_4)$. Applicando ancora $(flFL)^3$ i cubi delle facce inferiori vengono riposizionati mentre quelli delle facce superiori sono permutati come $(C_1\ C_2) \circ (C_1\ C_2) \circ (C_3) \circ (C_4) = (C_1) \circ (C_2) \circ (C_3) \circ (C_4)$. Ossia tutti i cubi sono posizionati anche se C_1, C_2, C_3, C_4 possono essere ruotati.

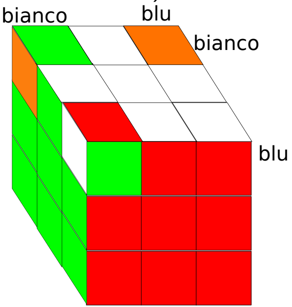
Esercizio: Trovare la sequenza di mosse per posizionare i cubi partendo dalla configurazione $(C_1) \circ (C_2\ C_3\ C_4)$.

Ruotare i cubi posizionati

Ci siamo così ricondotti alla situazione nella quale i cubi d'angolo della faccia U sono POSIZIONATI (anche se, magari, non ruotati correttamente).

Ruotare i cubi posizionati

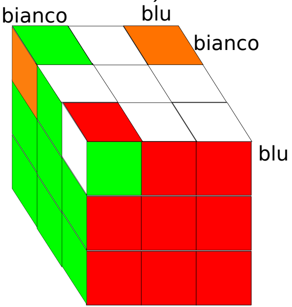
Ci siamo così ricondotti alla situazione nella quale i cubi d'angolo della faccia U sono POSIZIONATI (anche se, magari, non ruotati correttamente).



I cubi possono essere ruotati, ma la somma delle rotazioni deve essere nulla mod 2π.

Ruotare i cubi posizionati

Ci siamo così ricondotti alla situazione nella quale i cubi d'angolo della faccia U sono POSIZIONATI (anche se, magari, non ruotati correttamente).



I cubi possono essere ruotati, ma la somma delle rotazioni deve essere nulla mod 2π. Nella figura C_2 è ben posizionato mentre C_1, C_3 e C_4 sono ruotati di $\frac{1}{3}$ di giro (antiorario). Ovviamente altre combinazioni sono possibili ma tutte debbono dare zero come rotazione totale.

Le possibili rotazioni dei cubi d'angolo

Rotazioni

	C_i	C_j	C_k	C_ℓ
I	0	0	0	0
II	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
III	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
IV	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
V	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

La situazione I significa che il cubo è risolto.

Le possibili rotazioni dei cubi d'angolo

Rotazioni

	C_i	C_j	C_k	C_ℓ
I	0	0	0	0
II	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
III	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
IV	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
V	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

La situazione I significa che il cubo è risolto. Nel caso II bisogna ruotare C_k (di $\frac{1}{3}$ di giro) DUE volte e C_ℓ UNA volta. Totale TRE rotazioni di $\frac{1}{3}$ di giro. Negli altri casi... (esercizio)

Conclusione

Pertanto per risolvere il cubo occorrono 3-6 rotazioni di un terzo di giro dei cubi d'angolo.

Conclusione

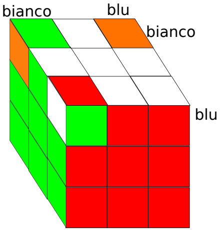
Pertanto per risolvere il cubo occorrono 3-6 rotazioni di un terzo di giro dei cubi d'angolo.A questo punto ricordiamo che $(flFL)^2$ modifica le posizioni di 4 cubi d'angolo di cui solo uno nella faccia B (BLD) e ruotando il cubo attorno alla faccia L in senso antiorario la faccia U si sovrappone proprio alla faccia B.

Conclusione

Pertanto per risolvere il cubo occorrono 3-6 rotazioni di un terzo di giro dei cubi d'angolo.A questo punto ricordiamo che $(flFL)^2$ modifica le posizioni di 4 cubi d'angolo di cui solo uno nella faccia B (BLD) e ruotando il cubo attorno alla faccia L in senso antiorario la faccia U si sovrappone proprio alla faccia B. A titolo d'esempio consideriamo il caso III.

Conclusione

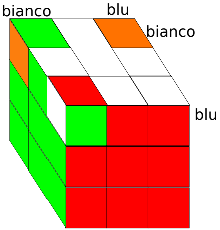
Pertanto per risolvere il cubo occorrono 3-6 rotazioni di un terzo di giro dei cubi d'angolo.A questo punto ricordiamo che $(fIFL)^2$ modifica le posizioni di 4 cubi d'angolo di cui solo uno nella faccia B (BLD) e ruotando il cubo attorno alla faccia L in senso antiorario la faccia U si sovrappone proprio alla faccia B. A titolo d'esempio consideriamo il caso III. Osserviamo che tutti i cubi d'angolo

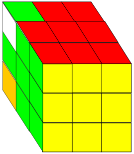


debbono essere ruotati di $\frac{1}{3}$ di giro in senso orario.

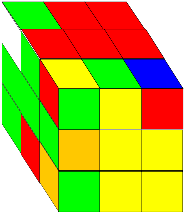
Conclusione

Pertanto per risolvere il cubo occorrono 3-6 rotazioni di un terzo di giro dei cubi d'angolo.A questo punto ricordiamo che $(flFL)^2$ modifica le posizioni di 4 cubi d'angolo di cui solo uno nella faccia B (BLD) e ruotando il cubo attorno alla faccia L in senso antiorario la faccia U si sovrappone proprio alla faccia B. A titolo d'esempio consideriamo il caso III. Osserviamo che tutti i cubi d'angolo debbono essere ruotati di $\frac{1}{3}$ di giro in senso orario. Dopo la rotazione del cubo questo si presenterà così :



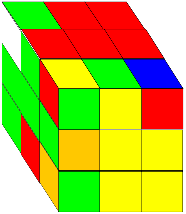


L'applicazione di $(flFL)^2$ riposiziona il cubo LDB correttamente (ad un prezzo apparentemente esoso visto il numero di cubetti spostati dalle loro posizioni).

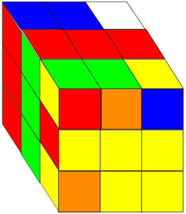


Ora ruotiamo B in senso antiorario e applichiamo di nuovo $(flFL)^2$.

L'applicazione di $(flFL)^2$ riposiziona il cubo LDB correttamente (ad un prezzo apparentemente esoso visto il numero di cubetti spostati dalle loro posizioni).



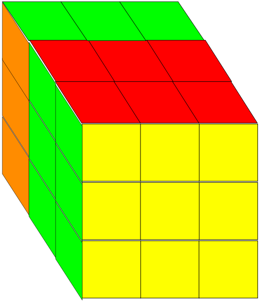
Ora ruotiamo B in senso antiorario e applichiamo di nuovo $(flFL)^2$. Si ottiene



L'ultimo cubetto da riposizionare è quello che si trova in URB. Quindi ruotiamo B di mezzo giro (il verso è irrilevante) e applichiamo per l'ultima volta $(flFL)^2$.

In totale avremo applicato $(flFL)^2$ 3 volte e siccome $flFL$ ha periodo 6 tutti cubetti della faccia F e dello strato di mezzo verranno riportati alla posizione di partenza che era quella corretta. Il risultato è:

In totale avremo applicato $(flFL)^2$ 3 volte e siccome $flFL$ ha periodo 6 tutti cubetti della faccia F e dello strato di mezzo verranno riportati alla posizione di partenza che era quella corretta. Il risultato è:



L'ultima mossa la lasciamo al lettore ma concludiamo con una osservazione.

Nel caso II abbiamo solo due cubetti da riposizionare. Ovviamente è possibile ripetere la stessa procedura applicando $(flFL)^2$ quando il cubetto in LDB deve essere ruotato di un giro in senso orario e $(flFL)^4$ quando il cubetto in LDB deve essere ruotato di DUE giri in senso orario. Tuttavia siccome la trasformazione inversa di $(flFL)^2$ (e cioè $(lfLF)^2$) ruota il cubetto in LDB in senso antiorario possiamo utilizzare anche $(lfLF)^2$ invece di $(flFL)^4$. L'effetto sugli altri cubetti modificati sarà quello di riportarli alla posizione di partenza e quindi di ricostruire il cubo.

Nel caso II abbiamo solo due cubetti da riposizionare. Ovviamente è possibile ripetere la stessa procedura applicando $(flFL)^2$ quando il cubetto in LDB deve essere ruotato di un giro in senso orario e $(flFL)^4$ quando il cubetto in LDB deve essere ruotato di DUE giri in senso orario. Tuttavia siccome la trasformazione inversa di $(flFL)^2$ (e cioè $(lfLF)^2$) ruota il cubetto in LDB in senso antiorario possiamo utilizzare anche $(lfLF)^2$ invece di $(flFL)^4$. L'effetto sugli altri cubetti modificati sarà quello di riportarli alla posizione di partenza e quindi di ricostruire il cubo. Un discorso analogo vale nel caso V, mentre il caso IV si tratta come quello visto in dettaglio con la sola differenza che si applicherà $(lfLF)^2$ invece di $(flFL)^2$.