Biforcazioni elementari in equazioni differenziali ordinarie autonome

Flaviano Battelli

Dipartimento di Scienze Matematiche

Università Politecnica delle Marche

Ancona

In queste note presentiamo alcuni semplici fatti riguardanti la teoria della biforcazione per sistemi di equazioni differenziali autonomi. Ricordiamo il seguente teorema.

Teorema. (Esistenza della varietà centrale). *Consideriamo il sistema di equazioni differenziali ordinarie* ($0 < p < n$)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + F(x, y) & x \in \mathbb{R}^p \\ \dot{y} = By + G(x, y) & y \in \mathbb{R}^{n-p} \end{cases} \tag{1}$$

Supponiamo che $F(x, y), G(x, y)$ *siano di classe* C^r, $r \geq 2$ *e che valgano le seguenti condizioni:*

$A \in \mathcal{M}^{p\times p}$ *ha solo autovalori* λ *con* $\Re\lambda = 0$;

$B \in \mathcal{M}^{(n-p)\times(n-p)}$ *ha solo autovalori* λ *con* $\Re\lambda < 0$;

$F(x, y) = o(|x| + |y|)$ *e* $G(x, y) = o(|x| + |y|)$.

Allora esistono $\delta, \sigma > 0$ *ed una funzione di classe* C^r: $h : B_p(0, \delta) \to B_{n-p}(0, \sigma)$ *tale che* $h(0) = 0$, $h'(0) = 0$ *e se* $(x(t, x_0, y_0), y(t, x_0, y_0))$ *è la soluzione di (1) che soddisfa*

$x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, con $|x_0| < \delta$ e $y_0 = h(x_0)$, risulta

$$y(t, x_0, y_0) = h(x(t, x_0, y_0))$$

per ogni $t \geq 0$ tale che $|x(t, x_0, y_0)| < \delta$. Inoltre esistono $C > 0$ ed $\alpha > 0$ tali che assegnato comunque un punto $(x_0, y_0) \in B_p(0, \delta) \times B_{n-p}(0, \sigma)$ risulta[1]

$$|y(t, x_0, y_0) - h(x(t, x_0, y_0))| \leq C|y_0 - h(x_0)|e^{-\alpha t} \tag{2}$$

per ogni $t \geq 0$ tale che $x(t, x_0, y_0) \in B_p(0, \delta)$. Infine per ogni $(x_0, y_0) \in B_p(0, \delta) \times B_{n-p}(0, \sigma)$ esiste $\bar{x} \in B_p(0, \delta)$ tale che, indicando con $x_c(t, \bar{x})$ la soluzione dell'equazione:

$$\dot{x} = Ax + F(x, h(x))$$

con condizione iniziale $x(0) = \bar{x}$, risulta

$$|x(t, x_0, y_0) - x_c(t, \bar{x})| \leq C[|x_0 - \bar{x}| + |y_0 - h(\bar{x})|]e^{-\alpha t} \tag{3}$$

per ogni $t \geq 0$ tale che $x(t, \bar{x}) \in B_p(0, \delta)$.

Osservazioni.

- L'insieme $\mathcal{C} = \{(x, y) \in B_p(0, \delta) \to B_{n-p}(0, \sigma) \mid y = h(x)\}$ si dice *varietà centrale* ed è una varietà *localmente invariante* ossia una soluzione $(x(t), y(t))$ di (1) che ad un certo istante t_0 si trova su $\mathcal{C}$ (ossia $y(t_0) = h(x(t_0))$) soddisfa $(x(t), y(t)) \in \mathcal{C}$ fintanto che $|x(t)| < \delta$.

- La condizione che $(x(t), h(x(t)))$ è una soluzione di (1) significa che $h(x)$ soddisfa la seguente PDE
$$J_h(x)[Ax + F(x, h(x))] = Bh(x) + G(x, h(x)) \tag{4}$$
dove $|x| \leq \delta$ e $J_h(x)$ è la matrice Jacobiana, $(n - p) \times p$, di $h(x)$.

[1] Ricordiamo che $(x(t, x_0, y_0), y(t, x_0, y_0))$ indica la soluzione di (1) che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

- $\delta > 0$ dipende da r. Ossia tanto più regolare si vuole la funzione $y = h(x)$, tanto più piccolo sarà δ. Di conseguenza se $F(x, y), G(x, y)$ fossero C^∞ o C^ω (ossia analitiche) non è detto che si possano trovare varietà centrali C^∞ o C^ω. Inoltre un assegnato sistema di equazioni differenziali nella forma (1) non è detto che ammetta un'unica varietà centrale, ma tra queste ce n'è al più una analitica. Come esempio di mancanza di unicità si consideri il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

che ha le varietà centrali:

$$y = \begin{cases} c_1 e^{-\frac{1}{2x^2}} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ c_2 e^{-\frac{1}{2x^2}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Si noti che tra tutte queste varietà centrali ce n'è solo una analitica: $y = 0$. Modificando un po' l'esempio precedente si costruisce un sistema analitico che non ha una varietà centrale analitica:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 \\ \dot{y} = -y + x^2. \end{cases}$$

Se $y = h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ fosse una varietà centrale del sistema in $B_1(0, \delta) \times B_1(0, \sigma)$ si avrebbe, dalla (4):

$$-x^3 h'(x) = -h(x) + x^2 \iff \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - x^2.$$

da cui:

$$a_0 = a_1 = 0, \ a_2 = 1 \quad \text{e} \quad n a_n = a_{n+2} \quad \text{per ogni } n > 2.$$

Di conseguenza per ogni $n = 2k - 1$ dispari si ha:

$$a_{2k+1} = (2k - 1) a_{2k-1} = (2k - 1)(2k - 3) a_{2k-3} = ... = \Pi_{j=1}^{k} (2j - 1) a_1 = 0.$$

Se invece $n = 2k$ è pari si ha:

$$a_{2k+2} = (2k) a_{2k} = (2k)(2k - 2) a_{2k-2} = ... = \Pi_{j=1}^{k} (2j) a_2 = 2^k (k!) a_2$$

ossia

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1}(n-1)! x^{2(n-1)}$$

Dato che $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^n n!}{2^{n-1}(n-1)!} = \lim_{n\to\infty} 2n = \infty$ la serie precedente ha raggio di convergenza $\rho = 0$.

- Nonostante le varietà centrali non siano univocamente determinate *ogni* varietà centrale contiene tutti gli equilibri e le soluzioni periodiche di (1) *piccole* (ossia che appartengono a $B_p(0,\delta) \times B_{n-p}(0,\sigma)$). Infatti se $(x_0, y_0) \in B_p(0,\delta) \times B_{n-p}(0,\sigma)$ è un equilibrio di (1) si ha $(x(t, x_0, y_0), y(t, x_0, y_0)) = (x_0, y_0)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e quindi da (2):

$$|y_0 - h(x_0)| = |y(t, x_0, y_0) - h(x(t, x_0, y_0))| \leq C|y_0 - h(x_0)|e^{-\alpha t} \to 0$$

  per $t \to \infty$. Similmente, se $(x(t+mT, x_0, y_0), y(t+mT, x_0, y_0)) = (x(t, x_0, y_0), y(t, x_0, y_0))$ per ogni t e m, si ha (fissando t e facendo variare m):

$$\begin{aligned} &|y(t, x_0, y_0) - h(x(t, x_0, y_0))| = |y(t + mT, x_0, y_0) - h(x(t + mT, x_0, y_0))| \\ &\leq C|y_0 - h(x_0)|e^{-\alpha(t+mT)} \to 0 \end{aligned}$$

  per $m \to \infty$.

- Se $x = 0$ è un equilibrio stabile (asintoticamente stabile) dell'equazione $\dot{x} = f(x, h(x))$ allora $(0, 0)$ è un equilibrio stabile (asintoticamente stabile) del sistema (1). Ciò deriva dalla diseguaglianza (si noti che, per ogni $\widetilde{x} \in B(0, \delta)$ e $|t|$ sufficientemente piccolo, si ha $(x(t, \widetilde{x}, h(\widetilde{x})), y(t, \widetilde{x}, h(\widetilde{x}))) = (x_c(t, \widetilde{x}), h(x_c(t, \widetilde{x})))$ e quindi $h(x_c(t, 0)) = 0$):

$$\begin{aligned} |y(t, x_0, y_0)| + |x(t, x_0, y_0)| &\leq |y(t, x_0, y_0) - h(x(t, x_0, y_0))| + |h(x_c(t, \bar{x}))| \\ &+ |h(x(t, x_0, y_0)) - h(x_c(t, \bar{x}))| + |x(t, x_0, y_0) - x_c(t, \bar{x})| + |x_c(t, \bar{x})| \end{aligned}$$

  (qui $\bar{x}$ indice l'elemento la cui esistenza è stabilita nel teorema di esistenza della varietà centrale).

Dimostriamo ora un'ulteriore proprietà delle varietà centrali.

Teorema. (della derivata nulla). *Supponiamo che, per ogni η in un opportuno intorno di $\eta = 0 \in \mathbb{R}^q$, $q \geq 1$, $(x(\eta), y(\eta)) \in B_p(0,\delta) \times B_{n-p}(0,\sigma)$ sia un punto fisso di classe C^0 dell'equazione (1) tale che $(x(0), y(0)) = (0,0)$. Allora*

$$y(\eta) = h(x(\eta)).$$

Inoltre, se

$$F_y(x(\eta), y(\eta)) = 0, \quad G_x(x(\eta), y(\eta)) = 0,$$

esiste un intorno U di $\eta = 0 \in \mathbb{R}^q$ tale che per ogni $\eta \in U$ si ha anche:

$$J_h(x(\eta)) = 0.$$

Dimostrazione. Dato che $(x(\eta), y(\eta))$ è un punto fisso dell'equazione (1) si ha $y(\eta) = h(x(\eta))$ e:

$$Ax(\eta) + F(x(\eta), y(\eta)) = 0 \quad By(\eta) + G(x(\eta), y(\eta)) = 0.$$

Poniamo $A(\eta) = A + F_x(x(\eta), y(\eta))$, $B(\eta) = B + G_y(x(\eta), y(\eta))$. Differenziando la (4) si ottiene, tenendo conto delle uguaglianze precedenti e delle ipotesi su $F(x,y)$ e $G(x,y)$:

$$J_h(x(\eta))A(\eta) = B(\eta)J_h(x(\eta)) \tag{5}$$

Dato che $(x(\eta), y(\eta)) \to (0,0)$ quando $\eta \to 0$ si avrà

$$A(\eta) \to A \quad \text{e} \quad B(\eta) \to B$$

quando $\eta \to 0$. Possiamo così supporre che per ogni $\eta \in U$, nessun autovalore di $A(\eta)$ sia autovalore di $B(\eta)$. Sia $v \in \mathcal{N}(A - \alpha(\eta)\mathbb{I})^r$ un autovettore generalizzato di $A(\eta)$. Si ha:

$$J_h(x(\eta))A(\eta)(A(\eta) - \alpha(\eta)\mathbb{I})^{r-1}v = \alpha(\eta)J_h(x(\eta))(A(\eta) - \alpha(\eta)\mathbb{I})^{r-1}v$$

e quindi

$$B(\eta)J_h(x(\eta))(A(\eta) - \alpha(\eta)\mathbb{I})^{r-1}v = \alpha(\eta)J_h(x(\eta))(A(\eta) - \alpha(\eta)\mathbb{I})^{r-1}v$$

ciò significa che

$$J_h(x(\eta))(A(\mu) - \alpha(\mu)\mathbb{I})^{r-1}v = 0,$$

dato che $\alpha(\eta)$ non è un autovalore di $B(\eta)$. Moltiplichiamo allora la (5) a destra per $(A(\eta) - \alpha(\eta)\mathbb{I})^{r-2}$. Otteniamo:

$$B(\eta)J_h(x(\eta))(A(\eta) - \alpha(\eta)\mathbb{I})^{r-2}v = \alpha(\eta)J_h(x(\eta))(A(\eta) - \alpha(\eta)\mathbb{I})^{r-2}v$$

e quindi

$$J_h(x(\eta))(A(\mu) - \alpha(\mu)\mathbb{I})^{r-2}v = 0,$$

così procedendo otteniamo

$$J_h(x(\eta))v = 0,$$

per ogni autovettore generalizzato di $A(\mu)$. Dato che $\mathbb{R}^p$ ha una base di autovettori generalizzati di $A(\mu)$ si ha $J_h(x(\eta)) = 0$.

Riduzione a forma standard

Consideriamo un'equazione differenziale ordinaria dipendente da un parametro

$$\dot{z} = f(z, \mu), \quad z \in \mathbb{R}^n \tag{6}$$

con $f(z, \mu)$ di classe almeno C^3. Supponiamo che le seguenti condizioni siano soddisfatte:

i) $f(0, \mu) = 0$ per ogni μ ($\in (-\mu_0, \mu_0)$ con $\mu_0 > 0$)

ii) la matrice Jacobiana $f_z(0, \mu)$ ha un autovalore semplice $\alpha(\mu)$ tale che $\alpha(0) = 0$ e $\alpha'(0) \neq 0$ e tutti gli altri autovalori $\lambda(\mu)$ hanno parte reale minore di un numero negativo $-\kappa$ per ogni $\mu \in (-\mu_0, \mu_0)$

Sia $v(\mu) \in \mathbb{R}^n$ un autovettore (reale) dell'autovalore $\alpha(\mu)$ e indichiamo con $w(\mu) \in \mathbb{R}^n$ un *autovettore sinistro* dell'autovalore $\alpha(\mu)$ di[2] $f_z(0, 0)$ ossia tale che

$$w(\mu)^* f_z(0, \mu) = \alpha(\mu) w(\mu)^* \tag{7}$$

[2]Se A è una matrice con A^* indichiamo la matrice trasposta, ossia, posto $A = [a_{ij}]$ e $A^* = [a^*_{ij}]$ si ha $a^*_{ij} = a_{ji}$. Dato che un vettore v è una matrice di n righe e una sola colonna, v^* sarà lo stesso vettore, ma scritto in riga (una riga ed n colonne).

L'esistenza di un tale vettore $w(\mu)$ deriva dal fatto che, trasponendo la (7) si ha l'equazione equivalente: $f_z(0,0)^*w(\mu) = \alpha(\mu)w(\mu)$ e $\det(A^* - \lambda\mathbb{I}) = \det(A - \lambda\mathbb{I})^* = \det(A - \lambda\mathbb{I})$. Pertanto gli autovalori di A^* sono gli stessi di A, con la stessa molteplicità algebrica[3].
Osserviamo che $\alpha(\mu)$, $v(\mu)$ e $w(\mu)$ si possono supporre regolari in μ. Infatti siano $v_0 \neq 0$ e $w_0 \neq 0$ autovettori destro e sinistro dell'autovalore $\lambda = 0$ di $f_z(0,0)$ ossia: $f_z(0,0)v_0 = f_z(0,0)^*w_0 = 0$. Sia

$$Y_0 = \{y \in \mathbb{R}^n \mid w_0^* y = 0\} = \{w_0\}^\perp.$$

Dato che $w_0^* f_z(0,0)x = [f_z(0,0)^*w_0]x = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, Y_0 è invariante sotto $f_z(0,0)$ ossia $f_z(0,0) : Y_0 \to Y_0$. Inoltre $v_0 \notin Y_0$. Infatti, dato che Ker $f_z(0,0) = \text{span}\{v_0\}$ si ha $\dim \mathcal{R}f_z(0,0) = n-1$ e siccome $\mathcal{R}f_z(0,0) \subset Y_0$ otteniamo $\mathcal{R}f_z(0,0) = Y_0$. Allora se $v_0 \in Y_0$ esisterebbe $u \neq 0$ tale che $f_z(0,0)u = v_0$ e quindi $f_z(0,0)^2u = 0$. Dato che $\lambda = 0$ è un autovalore semplice, la sua molteplicità algebrica e geometrica sono entrambe uguali ad 1. Pertanto Ker $f_z(0,0)^2 =$ Ker $f_z(0,0)$. Di conseguenza $u \in$ Ker $f_z(0,0)$ e $v_0 = f_z(0,0)u = 0$: assurdo. Possiamo quindi supporre $w_0^* v_0 = 1$.
Consideriamo allora l'equazione $Q(y,\alpha,\mu) := f_z(0,\mu)[y + v_0] - \alpha[y + v_0] = 0$, $Q : Y_0 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Si ha $Q(0,0,0) = 0$ e

$$Q_y(0,0,0)y + Q_\alpha(0,0,0)\alpha = f_z(0,0)y - \alpha v_0.$$

Quindi $Q_y(0,0,0)v + Q_\alpha(0,0,0)\alpha = 0$ equivale a $f_z(0,0)y = \alpha v_0$. Ma per, l'invarianza di Y_0 il termine di sinistra appartiene a Y_0 mentre quello di destra no. Di conseguenza $\alpha = 0$ e

$$f_z(0,0)y = 0,$$

con $y \in Y_0$. Ma ciò implica che $y = 0$ perchè $\lambda = 0$ è un autovalore semplice e $v_0 \notin Y_0$. Di conseguenza la derivata di $Q(y,\alpha,\mu)$ rispetto a $(y,\lambda) \in Y_0 \times \mathbb{R}$ è invertibile e possiamo applicare il teorema del Dini ottenendo così una funzione $\mu \mapsto (y(\mu),\alpha(\mu)) \in Y_0 \times \mathbb{R}$ di classe C^2 tale che

$$f_z(0,\mu)v(\mu) = \alpha(\mu)v(\mu) \tag{8}$$

[3] E anche geometrica. Infatti Ker $(A^* - \lambda\mathbb{I})^k =$ Ker $[(A - \lambda\mathbb{I})^k]^* = (\mathcal{R}(A - \lambda\mathbb{I})^k)^\perp$ e quindi dim Ker $(A^* - \lambda\mathbb{I})^k = \dim (\mathcal{R}(A - \lambda\mathbb{I})^k)^\perp = n - \dim \mathcal{R}(A - \lambda\mathbb{I})^k = n - [n - \dim \text{Ker } (A - \lambda\mathbb{I})^k] =$ dim Ker $(A - \lambda\mathbb{I})^k$.

con $v(\mu) := y(\mu) + v_0 \to v_0$ e $\alpha(\mu) \to 0$ per $\mu \to 0$. Dato che $\lambda = 0$ è un autovalore semplice di $f_z(0,0)$, il polinomio caratteristico $p(t) = \det[f_z(0,0) - t\mathbb{I}]$ ha la radice semplice $t = 0$, ossia $p(0) = 0 \neq p'(0)$. Per $|\mu|$ sufficientemente piccolo la funzione $p(t,\mu) = \det[f_z(0,\mu) - t\mathbb{I}]$ avrà anch'essa uno zero semplice (vicino a $t = 0$), ossia $\alpha(\mu)$ è uno zero semplice dell'equazione caratteristica $[f_z(0,\mu) - t\mathbb{I}] = 0$ il che equivale a dire che $\alpha(\mu)$ è un autovalore semplice di $f_z(0,\mu)$ (con autovettore $v(\mu)$). Un argomento simile (applicato alla matrice $f_z(0,\mu)^*$ ci permette di concludere ugualmente per $w(\mu)$. Scegliendo $\frac{v(\mu)}{\|v(\mu)\|}$ in luogo di $v(\mu)$ (si noti che se $|\mu|$ è sufficientemente piccolo risulta $v(\mu) \neq 0$) si può supporre che $v(\mu) \in \mathbb{R}^2$ sia un versore. Infine dato che $w^*(\mu)v(\mu) \to w_0^* v_0 = 1$, possiamo anche supporre, cambiando $w(\mu)$ con $\frac{w(\mu)}{w(\mu)^* v(\mu)}$, che $w(\mu)^* v(\mu) = 1$.
Prima di procedere calcoliamo $\alpha'(0)$. Derivando la (8) si ottiene:

$$f_{z\mu}(0,0)v_0 + f_z(0,0)v'(0) = \alpha'(0)v_0$$

e quindi moltiplicando a sinistra per w_0^*:

$$w_0^* f_{z\mu}(0,0)v_0 = \alpha'(0)w_0^* v_0 = \alpha'(0) \tag{9}$$

avendo utilizzato l'eguaglianza $w_0^* v_0 = 1$. La condizione ii) può quindi essere sostituita con

ii') la matrice Jacobiana $f_z(0,0)$ ha un autovalore semplice $\alpha_0 = 0$ con autovettori destro v_0 e sinistro w_0 e tutti gli altri autovalori hanno parte reale minore di un numero negativo $-\kappa$. Inoltre $w_0^* f_{z\mu}(0,0)v_0 \neq 0$.

Poniamo

$$Y_\mu = \{y \in \mathbb{R}^n \mid w(\mu)^* y = 0\}$$

e notiamo, per inciso, che $f_z(0,\mu) : Y_\mu \to Y_\mu$. Infatti si ha, per ogni $y \in Y_\mu$:

$$w(\mu)^* f_z(0,\mu)y = \alpha(\mu)w(\mu)^* y = 0.$$

Dato che $w(\mu) \in C^2$, Y_μ ha una base $\{y_1(\mu), \ldots, y_{n-1}(\mu)\}$ di classe C^2 in μ. Scriviamo $z = xv(\mu) + y$, $(x,y) \in \mathbb{R} \times Y_\mu$. Si ha $x = w(\mu)^* z$ e $y = z - xv(\mu)$. Quindi:

$$\begin{cases} \dot{x} = w(\mu)^* f(xv(\mu) + y, \mu) := F(x,y,\mu) \\ \dot{\mu} = 0 \\ \dot{y} = f(xv(\mu) + y, \mu) - F(x,y,\mu)v(\mu) := B(\mu)y + G(x,y,\mu) \end{cases} \tag{10}$$

dove

$$B(\mu) = f_z(0,\mu)$$

e $G(x,y,\mu)$ è definito dall'uguaglianza:

$$G(x,y,\mu) = f(xv(\mu)+y,\mu) - w(\mu)^* f(xv(\mu)+y,\mu)v(\mu) - B(\mu)y.$$

Scritto così il sistema è quasi nella forma standard per poter applicare il teorema di esistenza della varietà centrale. Infatti si ha:

$$\begin{aligned} &F(0,0,\mu) = w(\mu)^* f(0,\mu) = 0 \\ &F_x(0,0,\mu) = w(\mu)^* f_z(0,\mu)v(\mu) = \alpha(\mu) \\ &F_y(0,0,\mu) = w(\mu)^* f_z(0,\mu)_{|Y_\mu} = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Ossia le prime due equazioni sono nella forma richiesta. Per scrivere anche la terza equazione nella forma canonica, basta scrivere l'equazione per la y nella forma:

$$\dot{y} = B(0)y + [B(\mu) - B(0)]y + G(x,y,\mu)$$

e osservare che

$$[B(\mu) - B(0)]y + G(x,y,\mu) = o(|y| + |\mu|)$$

dato che

$$\begin{aligned} &G(0,0,\mu) = f(0,\mu) - w(\mu)^* f(0,\mu) = 0 \\ &G_x(0,0,\mu) = [f_z(0,\mu) - w(\mu)^* f_z(0,\mu)v(\mu)]v(\mu) = [f_z(0,\mu) - \alpha(\mu)\mathbb{I}]v(\mu) = 0 \\ &(B(\mu) - B(0))y = o(|y|\,|\mu|) \\ &G_y(0,0,\mu)y = f_z(0,\mu)y - \alpha(\mu)[w(\mu)^* y]v(\mu) - B(\mu)y = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Dal Teorema di esistenza delle varietà centrali sappiamo che esiste una funzione di classe C^2 $y = h(x,\mu)$ tale che l'insieme $\{(x,\mu,y) \mid y = h(x,\mu)\}$ è localmente invariante per il sistema (10). Dato che (10) ha l'equilibrio $(x,y,\mu) = (0,0,\mu)$ per ogni $\mu \in \mathbb{R}$ (qui e in seguito: *sufficientemente piccolo* ossia $|\mu| < \mu_0 \ll 1$) e ogni varietà centrale contiene gli equilibri *vicini* a $(0,0)$, risulta

$$h(0,\mu) = 0$$

per ogni μ. Inoltre dal Teorema della derivata nulla (scegliendo $\eta = \mu$ e $(x(\mu),\mu,y(\mu)) = (0,\mu,0)$) otteniamo:

$$h_x(0,\mu) = 0$$

per μ sufficientemente piccolo. Possiamo quindi scrivere il sistema sulla varietà centrale $y = h(x, \mu)$ come:

$$\begin{aligned}\dot{x} = F(x, h(x, \mu), \mu) &= F_x(0, 0, \mu)x + \tfrac{1}{2}F_{xx}(0, 0, \mu)x^2 \\ &+F_{xy}(0, 0, \mu)h_x(0, \mu)x^2 + \tfrac{1}{2}F_{yy}(0, 0, \mu)h_x(0, \mu)^2x^2 + o(x^2) \\ &= \alpha(\mu)x + a(\mu)x^2 + o(x^2)\end{aligned} \tag{13}$$

dove $2a(\mu) = F_{xx}(0, 0, \mu) = \frac{d^2}{dx^2}[w(\mu)^* f(xv(\mu), \mu)]_{|x=0}$ e $o(x^2) = o(x^2, \mu)$ dipende da μ ma

$$\lim_{x \to 0} \frac{o(x^2)}{x^2} = 0$$

uniformemente rispetto a μ.

Biforcazione transcritica

Teorema. (Biforcazione transcritica) *Supponiamo che $a(0) \neq 0$ allora esiste $\mu_0 > 0$ tale che per ogni $|\mu < \mu_0$ l'equazione (1) ha, in un intorno di $x = 0$ due equilibri $x = 0$ e $x_0(\mu) = -\frac{\alpha(\mu)}{a(\mu)} + o(\mu) \neq 0$. Inoltre se $\alpha(\mu) > 0$ l'equilibrio $x = 0$ è instabile e $x_0(\mu)$ è stabile, se invece $\alpha(\mu) < 0$ l'equilibrio $x = 0$ è stabile e $x_0(\mu)$ è instabile.*

Dimostrazione. Dal teorema di esistenza della varietà centrale gli equilibri in un intorno di $x = 0$ si trovano fra le soluzioni dell'equazione $w(\mu)^* f(xv(\mu) + h(x(\mu), \mu), \mu) = 0$ ossia di $\alpha(\mu)x + a(\mu)x^2 + o(x^2) = 0$. Scriviamo:

$$\alpha(\mu)x + a(\mu)x^2 + o(x^2) = x[\alpha(\mu) + a(\mu)x + o(x)]$$

Posto $x = \xi - \frac{\alpha(\mu)}{a(\mu)}$, la funzione $\alpha(\mu) + a(\mu)x + o(x)$ si scrive:

$$\Phi(\xi, \mu) = a(\mu)\xi + o(\xi + \frac{\alpha(\mu)}{a(\mu)})$$

e $\Phi(\xi, 0) = a(0)\xi + o(\xi) = \xi[a(0) + o(1)]$. Quindi $\Phi(0, 0) = 0$ e $\Phi_\xi(0, 0) = a(0) \neq 0$. Dal Teorema del Dini segue allora che, per $|\mu| < \mu_0$ ($\mu_0 > 0$ opportunamente scelto) l'equazione $\Phi(\xi, \mu) = 0$ ha un unica soluzione $\xi(\mu) \in C^1$ in un intorno di $x = 0$ e $\xi(0) = 0$. Inoltre se $\xi(\mu)$ soddisfa $\Phi(\xi(\mu), \mu) = 0$ si ha:

$$a(\mu)\xi(\mu) = o\left(\xi(\mu) + \frac{\alpha(\mu)}{a(\mu)}\right).$$

Supponiamo, per assurdo che $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\xi(\mu_n)}{\alpha(\mu_n)} = \infty$ per qualche successione $\mu_n \to 0$ per $n \to \infty$. Dividendo l'uguaglianza precedente per $\xi(\mu_n) + \frac{\alpha(\mu_n)}{a(\mu_n)}$ otteniamo:

$$\frac{a(\mu_n)}{1 + \frac{1}{a(\mu_n)\frac{\xi(\mu_n)}{\alpha(\mu_n)}}} = o(1)$$

per $n \to \infty$. Passando al limite per $n \to \infty$ si ottiene l'assurdo $a(0) = 0$. Quindi $\xi(\mu) = O(\alpha(\mu))$. Ma allora si avrebbe anche $O(\alpha(\mu)) = o(\alpha(\mu))$ e quindi $\xi(\mu) = o(\alpha(\mu))$. Alternativamente si poteva osservare che derivando l'identità $\Phi(\xi(\mu), \mu) = 0$ si ottiene:

$$0 = \Phi_\xi(0,0)\xi'(0) + \Phi_\mu(0,0) = a(0)\xi'(0)$$

e pertanto $\xi'(0) = 0$ (ossia $\xi(\mu) = o(\mu)$). Posto allora

$$x_0(\mu) = \xi(\mu) - \frac{\alpha(\mu)}{a(\mu)}$$

si vede che $w(\mu)^* f(x(\mu)v(\mu) + h(x(\mu), \mu), \mu) = 0$ e $x_0(\mu) = -\frac{\alpha(\mu)}{a(\mu)} + o(\mu) = -\frac{\alpha'(0)}{a(0)}\mu + o(\mu) =$. Calcolando la derivata di $\alpha(\mu)x + a(\mu)x^2 + o(x^2)$, rispetto ad x, in $x = x(\mu)$ si ottiene:

$$-\alpha(\mu) + o(\mu) = -\mu[\alpha'(0) + o(1)]$$

(avendo usato il fatto che $\xi(\mu) = o(\mu)$ e $\alpha(\mu) = \alpha'(0)\mu + o(\mu)$). Ciò completa la dimostrazione del Teorema.

Biforcazione a forchetta

In questa sezione supponiamo che $2a(\mu) = F_{xx}(0,0,\mu) = 0$. L'equazione (13) si scrive $\dot{x} = \alpha(\mu)x + o(x^2)$ ed è quindi necessaria un'analisi più approfondita dei termini del terzo ordine. Si ha, tenendo conto di $h(0,\mu) = h_x(0,\mu) = 0$:

$$F(x, h(x,\mu), \mu) = \alpha(\mu)x + \frac{1}{6}[F_{xxx}(0,0,\mu) + 3F_{xy}(0,0,\mu)h_{xx}(0,\mu)]x^3 + o(x^3).$$

Ricordando che $F(x,y,\mu) = w(\mu)^* f(xv(\mu) + y, \mu)$ otteniamo:[4]

$$F_{xy}(0,0,\mu) = w(\mu)^* f_{zz}(0,\mu)v(\mu).$$

[4]Qui il simbolo $w(\mu)^* f_{zz}(0,\mu)v(\mu)$ significa $\frac{d}{dz}\langle f_z(z,\mu)v(\mu), w(\mu)\rangle_{|z=0} = w(\mu)^* \frac{d}{dz}[f_z(z,\mu)v(\mu)]_{z=0}$.

Per studiare il tipo di biforcazione è quindi necessario conoscere $h_{xx}(0,\mu)$. Poniamo per ora $b(\mu) = \frac{1}{6}[F_{xxx}(0,0,\mu)+3F_{xy}(0,0,\mu)h_{xx}(0,\mu)]$ scrivendo quindi l'equazione sulla varietà centrale:

$$\dot{x} = \alpha(\mu)x + b(\mu)x^3 + o(x^3).$$

Si ha il seguente risultato:

Teorema. (Biforcazione pitchfork) *Supponiamo che $b(0) \neq 0$ allora esiste $\mu_0 > 0$ tale che per ogni $|\mu| < \mu_0$ l'equazione (1) ha, in un intorno di $x = 0$ il solo equilibrio $x = 0$ (se $\frac{\alpha(\mu)}{b(\mu)} > 0$) oppure tre equilibri $x = 0$ e $x_\pm(\mu) = \pm\sqrt{-\frac{\alpha(\mu)}{b(\mu)}} + o(\sqrt{|\mu|}) \neq 0$ se $\frac{\alpha(\mu)}{b(\mu)} < 0$. Inoltre se $\alpha(\mu) > 0$ l'equilibrio $x = 0$ è instabile e gli altri due equilibri sono stabili; se invece $\alpha(\mu) < 0$ l'equilibrio $x = 0$ è stabile e gli altri due equilibri sono instabili.*

Dimostrazione. Gli equilibri dell'equazione $\dot{x} = \alpha(\mu)x + b(\mu)x^3 + o(x^3)$ sono $x = 0$ e le soluzioni dell'equazione

$$\alpha(\mu) + b(\mu)x^2 + o(x^2) = 0. \tag{14}$$

Ovviamente se $\alpha(\mu)b(\mu) > 0$, per x sufficientemente piccolo non esistono altri equilibri oltre $x = 0$. Se invece $\alpha(\mu)b(\mu) < 0$ poniamo $x = \xi + \sqrt{\left|\frac{\alpha(\mu)}{b(\mu)}\right|}$. Otteniamo l'equazione nella ξ:

$$-b(\mu)\left[\xi + \sqrt{\left|\frac{\alpha(\mu)}{b(\mu)}\right|}\right]^2 = \alpha(\mu) + o\left(\left[\xi + \sqrt{\left|\frac{\alpha(\mu)}{b(\mu)}\right|}\right]^2\right) \tag{15}$$

Ragionando come nel Teorema di biforcazione transcritica,[5] vediamo che se $\xi = \xi(\mu) \to 0$ quando $\mu \to 0$ è una soluzione della (15) deve aversi $\xi = O(\sqrt{|\alpha(\mu)|}) = O(\sqrt{|\mu|})$ (dato che $\alpha(\mu) = \alpha'(0)\mu + o(\mu)$). Poniamo allora (invece di $x = \xi + \sqrt{\left|\frac{\alpha(\mu)}{b(\mu)}\right|}$): $x =$

[5]Dividendo l'equazione (15) per $\left[\xi(\mu) + \sqrt{\left|\frac{\alpha(\mu)}{b(\mu)}\right|}\right]^2$ si ottiene:

$$-b(\mu) = \frac{\alpha(\mu)/\xi^2(\mu)}{\left(1 + \sqrt{\frac{1}{|b(\mu)|}}\frac{\sqrt{|\alpha(\mu)|}}{\xi(\mu)}\right)^2} + o(1)$$

che porta ad un assurdo se $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\xi(\mu_n)}{\sqrt{|\alpha(\mu_n)|}} = \infty$.

$\sqrt{|\alpha(\mu)|}\left(\xi + \sqrt{\frac{1}{|b(\mu)|}}\right)$, (dove ξ è limitato) ottenendo, invece della (15):

$$\frac{\alpha(\mu)}{|\alpha(\mu)|} + b(\mu)\left(\xi + \frac{1}{\sqrt{|b(\mu)|}}\right)^2 + o(1) = 0 \tag{16}$$

dove $o(1) \to 0$ per $(\xi, \mu) \to 0$. Indicando con $G(\xi, \mu)$ i termine a sinistra del segno di uguaglianza si ha:

$$G(0,0) = 0 \quad \text{e} \quad G_\xi(0,0) = \pm 2\sqrt{|b(0)|} \neq 0.$$

Quindi l'equazione (14) ha un'unica soluzione

$$x_+(\mu) = \xi_+(\mu)\sqrt{|\alpha(\mu)|} + \sqrt{-\frac{\alpha(\mu)}{b(\mu)}}.$$

con $\xi_+(\mu) \to 0$ per $\mu \to 0$. Con un ragionamento simile si prova che (14) ha un'unica soluzione

$$x_-(\mu) = \xi_-(\mu)\sqrt{|\alpha(\mu)|} - \sqrt{-\frac{\alpha(\mu)}{b(\mu)}}.$$

con $\xi_-(\mu) \to 0$ per $\mu \to 0$. L'analisi della stabilità di questi equilibri si esegue come nel caso della biforcazione transcritica.

Calcoliamo ora $b(0)$. A tal scopo riprendiamo l'equazione (4) che in questo caso si scrive

$$h_x(x,\mu)F(x,h(x,\mu),\mu) = B(\mu)h(x,\mu) + G(x,h(x,\mu),\mu). \tag{17}$$

Differenziando la (12) rispetto ad x due volte e tenendo conto delle proprietà di $F(x,y,\mu)$, $G(x,y,\mu)$, (vedi (11), (12)) e di $h(0,\mu) = h_x(0,\mu) = 0$:

$$2\alpha(\mu)h_{xx}(0,\mu) - B(\mu)h_{xx}(0,\mu) - G_{xx}(0,0,\mu) = 0.$$

cosicché

$$h_{xx}(0,0) = -B^{-1}G_{xx}(0,0,0)$$

con $B = B(0)$ e[6]

$$G_{xx}(0,0,0) = f_{zz}(0,0)v(0)^2 - w(0)^*[f_{zz}(0,0)v(0)^2]v(0).$$

[6] qui $f_{zz}(0,0)v(0)^2 = \frac{d}{dz}[f_z(z,0)v(0)]_{z=0}v(0)$.

Pertanto

$$6b(0) = w(0)^* f_{zzz}(0,0)v(0)^3 - 3w(0)^* f_{zz}(0,0)v(0)B^{-1}G_{xx}(0,0,0).$$

Si noti che, se $f_{zz}(0,0) = 0$ si ha $6b(0) = w(0)^* f_{zzz}(0,0)v(0)^3$ ossia non è necessario conoscere $h_{xx}(0,0)$.

Biforcazione nodo-sella

Questo tipo di biforcazione avviene genericamente (ossia quasi sempre) quando l'equilibrio $z = 0$ non persiste per $\mu \neq 0$. Per capire meglio il significato della parola *genericamente* osserviamo che quando $f(0,\mu) = 0$ e $\lambda = 0$ è un autovalore semplice di $f_z(0,0)$ la biforcazione *generica* è quella transcritica perché *è più facile* che sia $F_{xx}(0,0) \neq 0$ piuttosto che $F_{xx}(0,0) = 0$. In altre parole se fosse $F_{xx}(0,0) = 0$, dato $\rho > 0$ sarebbe comunque possibile trovare $\widetilde{f}(z,\mu)$ tale che $\sup_{z,\mu} |\widetilde{f}(z,\mu) - f(z,\mu)| < \rho$ e $\widetilde{F}_{xx}(0,0) \neq 0$ (basta prendere $\widetilde{f}(z,\mu) = f(z,\mu) + \rho[w(\mu)^* z]z$, dove $w(\mu)$ è l'autovalore sinistro di $f_z(0,\mu)$.

Pur non avendosi $f(0,\mu) = 0$ la parte precedente riguardo l'esistenza dell'autovalore $\alpha(\mu) \to 0$ quando $\mu \to 0$ di $f_z(0,\mu)$ e dei relativi autovettori destro $v(\mu)$ e sinistro $w(\mu)$ è ancora valida e possiamo ancora scrivere l'equazione (1) nella forma (10) tuttavia questa volta si ha:

$$\begin{aligned} &F(0,0,\mu) = w(\mu)^* f(0,\mu) \neq 0 \quad \text{(in generale)} \\ &F_x(0,0,\mu) = w(\mu)^* f_z(0,\mu)v(\mu) = \alpha(\mu) \\ &F_y(0,0,\mu) = w(\mu)^* f_z(0,\mu)_{|Y_\mu} = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

e

$$\begin{aligned} &G(0,0,\mu) = f(0,\mu) - w(\mu)^* f(0,\mu) \neq 0 \quad \text{(in generale)} \\ &G_x(0,0,\mu) = [f_z(0,\mu) - w(\mu)^* f_z(0,\mu)v(\mu)]v(\mu) = [f_z(0,\mu) - \alpha(\mu)\mathbb{I}]v(\mu) = 0 \\ &(B(\mu) - B(0))y = o(|y|\,|\mu|) \\ &G_y(0,0,\mu) = f_z(0,\mu) - \alpha(\mu)w(\mu)^* v(\mu) - B(\mu) = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Quindi, questa volta avremo soltanto $F(0,0,0) = 0$, $G(0,0,0) = 0$, $F_x(0,0,0) = 0$, $G_x(0,0,\mu) = 0$, $F_y(0,0,\mu) = 0$, $G_y(0,0,\mu) = 0$. Il sistema (10) avrà quindi una varietà centrale $y = h(x,\mu)$ ma possiamo soltanto affermare che $h(0,0) = 0$ e $h_x(0,0) = h_\mu(0,0) =$

0. Il sistema sulla varietà centrale $y = h(x,\mu)$ sarà quindi:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x, h(x,\mu), \mu) \\ &= F_\mu(0,0,0)\mu + \tfrac{1}{2}[F_{xx}(0,0,0)x^2 + 2F_{x\mu}(0,0,0)x\mu + F_{\mu\mu}(0,0,0)\mu^2] + o(x^2+\mu^2) \\ &= A\mu + \tfrac{1}{2}[ax^2 + 2bx\mu + c\mu^2] + o(x^2+\mu^2).\end{aligned} \tag{20}$$

con $A = F_\mu(0,0,0)$, $a = F_{xx}(0,0,0)$, $b = F_{x\mu}(0,0,0)$ e $c = F_{\mu\mu}(0,0,0)$. Da $F_x(0,0,\mu) = \alpha(\mu)$ si ricava subito $b = \alpha'(0)$. Calcoliamo A, a e c. Si ha

$$A = w'(0)^* f(0,0) + w(0)^*[f_z(0,0)v'(0) + f_\mu(0,0)] = w(0)^* f_\mu(0,0)$$

mentre

$$a = \frac{d^2}{dx^2}[w(0)^* f(xv(0),0)] = w(0)^*[f_{zz}(0,0)v(0)v(0)]$$

dove $[f_{zz}(0,0)v(0)v(0)]$ è il vettore la cui $k-$esima componente è $\langle \frac{\partial^2 f_k}{\partial z^2}(0,0)v(0), v(0)\rangle$ e

$$c = \frac{d^2}{d\mu^2} w(\mu)^* f(0,\mu) = 2w'(0)^* f_\mu(0,0) + w(0)^* f_{\mu\mu}(0,0).$$

Osserviamo che per il calcolo di c è necessario conoscere la derivata $w'(0)$ di $w(\mu)$.
Si ha il seguente risultato:

Teorema. (Biforcazione nodo-sella) *Supponiamo che $Aa \neq 0$. Allora esiste $\mu_0 > 0$ tale che per ogni $|\mu| < \mu_0$ l'equazione (1) ha, in un intorno di $x = 0$, due equilibri o nessuno a seconda che sia $Aa\mu < 0$ o $Aa\mu > 0$. Se $Aa\mu < 0$ i due equilibri sono del tipo: $x_\pm(\mu) = \pm\sqrt{-\frac{2A}{a}\mu} + o(\sqrt{|\mu|})$, uno di essi è asintoticamente stabile e l'altro instabile. In particolare se $a < 0$ l'equilibrio $x_+(\mu)$ è stabile e $x_-(\mu)$ instabile; se invece $a > 0$ allora $x_+(\mu)$ è instabile e $x_-(\mu)$ è stabile*

Dimostrazione. Supponiamo che $x(\mu)$ sia una soluzione dell'equazione

$$A\mu + \frac{1}{2}[ax^2 + 2bx\mu + c\mu^2] + o(x^2+\mu^2) = 0 \tag{21}$$

tale che $\lim\limits_{\mu\to 0} x(\mu) = 0$. Dato che $A \neq 0$ dovrà aversi $x(\mu) = O(\sqrt{|\mu|})$. Poniamo quindi $x = \xi\sqrt{|\mu|} + o(\sqrt{|\mu|})$. Sostituendo nella (21) otteniamo l'equazione:

$$A\mu + \frac{1}{2}a|\mu|\xi^2 + o(\mu) = 0 \quad \text{ossia} \quad A + \frac{1}{2}a\,\mathrm{sign}(\mu)\xi^2 + o(1) = 0 \tag{22}$$

dove $o(\mu)$ e $o(1)$ dipendono da ξ ma $\lim_{\mu\to 0}\dfrac{o(\mu)}{\mu} = 0$ (e $\lim_{\mu\to 0} o(1) = 0$) uniformemente rispetto a ξ (negli insiemi compatti). Si noti che passando al limite per $\mu \to 0^+$ si ottiene l'equazione: $2A+a\xi^2 = 0$ che non ha soluzioni se $Aa > 0$ mentre ha le soluzioni $\xi = \sqrt{-\frac{2A}{a}}$ se $Aa < 0$. Un risultato opposto vale se $\mu \to 0^-$. Quindi, per μ sufficientemente piccolo l'equazione sulla varietà centrale può avere equilibri solo se $Aa\mu < 0$.

Posto $G(\xi,\mu) = A + \frac{1}{2}a\,\mathrm{sign}(\mu)\xi^2 + o(1)$ si ha:

$$G\left(\pm\sqrt{-\frac{2A}{a}\mathrm{sign}(\mu)}, 0\right) = 0$$

e

$$G_\xi\left(\pm\sqrt{-\frac{2A}{a}\mathrm{sign}(\mu)}, 0\right) = \pm a\mathrm{sign}(\mu)\sqrt{-\frac{2A}{a}\mathrm{sign}(\mu)} = \pm\sqrt{-2Aa\mathrm{sign}(\mu)}$$

Quindi, dal teorema della funzione implicita segue l'esistenza dei due equilibri

$$x_\pm(\mu) = \pm\sqrt{-\frac{2A}{a}\mu} + o(\sqrt{|\mu|}).$$

Infine, la derivata del termine a sinistra della (21) in $x_\pm(\mu)$ è

$$ax_\pm(\mu) + b\mu + o(x_\pm(\mu)) = \pm a\sqrt{-\frac{2A}{a}\mu} + o(\sqrt{|\mu|}).$$

e quindi $x_+(\mu)$ (risp. $x_-(\mu)$) è stabile se $a < 0$ (risp $a > 0$) e instabile se $a > 0$ (risp $a < 0$).

a	A	μ	$x_+(\mu)$	$x_-(\mu)$
> 0	> 0	> 0	non esiste	non esiste
> 0	> 0	< 0	instabile	stabile
> 0	< 0	> 0	instabile	stabile
> 0	< 0	< 0	non esiste	non esiste
< 0	> 0	> 0	stabile	instabile
< 0	> 0	< 0	non esiste	non esiste
< 0	< 0	> 0	non esiste	non esiste
< 0	< 0	< 0	stabile	instabile

Tabella 1. *Biforcazione nodo–sella*

Biforcazione di Hopf

Riduzione a forma standard

Consideriamo un'equazione differenziale ordinaria dipendente da un parametro

$$\dot{z} = f(z, \mu) \tag{23}$$

con $f(z, \mu)$ di classe almeno C^3. Supponiamo che le seguenti condizioni siano soddisfatte:

i) $f(0, \mu) = 0$ per ogni μ ($\in (-\mu_0, \mu_0)$ con $\mu_0 > 0$)

ii) la matrice Jacobiana $f_z(0, \mu)$ ha gli autovalori (semplici) $\alpha(\mu) + i\beta(\mu)$ e tutti gli altri autovalori $\lambda(\mu)$ hanno parte reale minore di un numero negativo $-\kappa$

iii) $\alpha(0) = 0 \neq \beta(0)$ e $\alpha'(0) \neq 0$.

Sia $v(\mu) = v_1(\mu) + iv_2(\mu)$ un autovettore complesso dell'autovalore $\alpha(\mu) + i\beta(\mu)$. Osserviamo che $\alpha(\mu) + i\beta(\mu)$ e $v(\mu)$ si possono supporre regolari in μ. Infatti sia V_0 un sottospazio di $\mathbb{C}^n$ trasversale a $v(0)$ e invariante sotto $f_z(0,0)$. Consideriamo l'equazione $G(v, \lambda, \mu) = f_z(0, \mu)[v + v(0)] - \lambda[v + v(0)] = 0$. Si noti che $G : V_0 \times \mathbb{C} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ e $\dim V_0 \times \mathbb{C} = n$. Si ha $G(0, i\beta(0), 0) = 0$ e

$$G_v(0, i\beta(0), 0)v + G_\lambda(0, i\beta(0), 0)\lambda = f_z(0, 0)v - \lambda[v + v(0)].$$

Quindi $G_v(0, i\beta(0), 0)v + G_\lambda(0, i\beta(0), 0)\lambda = 0$ se e solo se

$$f_z(0, 0)v - \lambda v = \lambda v(0).$$

Il termine a sinistra appartiene a V_0 mentre quello di destra appartiene allo spazio generato da v_0. Vista la trasversalità di questi due spazi entambi i termini dovranno essere uguali a zero. In particolare $\lambda = 0$ e $f_z(0, 0)v = 0$. Ma $f_z(0, 0)$ non ha l'autovalore 0 e pertanto $v = 0$. La parte lineare di $G(v, \lambda, \mu)$ in $(0, i\beta(0), 0)$ è quindi invertibile e per il teorema del Dini l'equazione $G(v, \lambda, \mu) = 0$ ha una soluzione regolare (C^2) $v = \hat{v}(\mu)$ e $\lambda = \lambda(\mu)$. Dato che $(\hat{v}(\mu), \lambda(\mu)) \to (0, i\beta(0))$ quando $\mu \to 0$, dalla condizione i) si ottiene $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\beta(\mu)$ e possiamo prendere $v(\mu)$ di norma unitaria e proporzionale a $\hat{v}(\mu) + v_0$.

Scriviamo $v(\mu) = v_1(\mu) + iv_2(\mu)$ ($v_1(\mu) = \mathrm{Re}v(\mu)$, $v_2(\mu) = \mathrm{Im}v(\mu)$). Si ha

$$f_z(0, \mu)[v_1(\mu) + iv_2(\mu)] = [\alpha(\mu) + i\beta(\mu)][v_1(\mu) + iv_2(\mu)]$$

e quindi, coniugando,

$$f_z(0, \mu)[v_1(\mu) - iv_2(\mu)] = [\alpha(\mu) - i\beta(\mu)][v_1(\mu) - iv_2(\mu)]$$

sommando e sottraendo le due uguaglianze (e dividendo rispettivamente per 2 e $2i$ otteniamo:

$$\begin{aligned} f_z(0, \mu)v_1(\mu) &= \alpha(\mu)v_1(\mu) - \beta(\mu)v_2(\mu) \\ f_z(0, \mu)v_2(\mu) &= \beta(\mu)v_1(\mu) + \alpha(\mu)v_2(\mu). \end{aligned} \tag{24}$$

Sia $\widetilde{V}(\mu) = [v(\mu), \quad \bar{v}(\mu), \quad v_3(\mu), \ldots, v_n(\mu)]$ una matrice le cui colonne siano gli autovettori generalizzati (complessi) di $f_z(0, \mu)$. Poniamo $V(\mu) = [v_1(\mu), \quad v_2(\mu), \quad v_3(\mu), \ldots, v_n(\mu)]$.

Dalla (24) otteniamo:

$$V(\mu)^{-1} f_z(0,\mu) V(\mu) = \begin{pmatrix} \alpha(\mu) & \beta(\mu) & 0 \\ -\beta(\mu) & \alpha(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & B(\mu) \end{pmatrix}$$

dove $B(0)$ (e quindi anche $B(\mu)$, con μ piccolo) ha tutti gli autovalori con parte reale < 0. Notiamo che la (24) può anche scriversi

$$f_z(0,\mu) V(\mu) = V(\mu) \begin{pmatrix} \alpha(\mu) & \beta(\mu) & 0 \\ -\beta(\mu) & \alpha(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & B(\mu) \end{pmatrix}$$

e quindi il sottospazio generato dalle colonne $v_3(\mu), \ldots, v_n(\mu)$ è invariante sotto $f_z(0,\mu)$, ossia, indicando con $U(\mu)$ il sottospazio generato dalle colonne $v_3(\mu), \ldots, v_n(\mu)$, si ha

$$f_z(0,\mu) : U(\mu) \to U(\mu).$$

Siano poi $w_1^t(\mu)$, $w_2^t(\mu)$ le prime due righe della matrice $V(\mu)^{-1}$. Ovviamente si ha

$$\begin{aligned} w_1^t(\mu) v_1(\mu) &= w_2^t(\mu) v_2(\mu) = 1 \\ w_1^t(\mu) v_2(\mu) &= w_2^t(\mu) v_1(\mu) = 0. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} w_1^t(\mu) f_z(0,\mu) v_1(\mu) &= w_2^t(\mu) f_z(0,\mu) v_2(\mu) = \alpha(\mu) \\ w_1^t(\mu) f_z(0,\mu) v_2(\mu) &= -w_2^t(\mu) f_z(0,\mu) v_1(\mu) = \beta(\mu). \end{aligned} \tag{25}$$

Notiamo anche, per inciso, che

$$U(\mu) = \{ z \in \mathbb{R}^n \mid w_1^t(\mu) z = w_2^t(\mu) z = 0 \}. \tag{26}$$

Scriviamo allora

$$z = x_1 v_1(\mu) + x_2 v_2(\mu) + y$$

dove

$$x_1 = w_1^t(\mu) z, \quad x_2 = w_2^t(\mu) z, \quad \text{e} \quad y \in U(\mu).$$

Si ha

$$\dot{x}_1 v_1(\mu) + \dot{x}_2 v_2(\mu) + \dot{y} = f(x_1 v_1(\mu) + x_2 v_2(\mu) + y, \mu)$$

e quindi, tenendo anche conto della (26):

$$\dot{x}_1 = w_1^t(\mu) f(x_1 v_1(\mu) + x_2 v_2(\mu) + y, \mu)$$

e, allo stesso modo:

$$\dot{x}_2 = w_2^t(\mu) f(x_1 v_1(\mu) + x_2 v_2(\mu) + y, \mu).$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \dot{y} = \quad & f(x_1 v_1(\mu) + x_2 v_2(\mu) + y, \mu) - w_1^t(\mu) f(x_1 v_1(\mu) + x_2 v_2(\mu) + y, \mu) v_1(\mu) \\ & -w_2^t(\mu) f(x_1 v_1(\mu) + x_2 v_2(\mu) + y, \mu) v_2(\mu). \end{aligned}$$

Otteniamo così il sistema in forma standard:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = w_1^t(\mu) f(x_1 v_1(\mu) + x_2 v_2(\mu) + y, \mu) \\ &\dot{x}_2 = w_2^t(\mu) f(x_1 v_1(\mu) + x_2 v_2(\mu) + y, \mu) \\ &\dot{y} = f(x_1 v_1(\mu) + x_2 v_2(\mu) + y, \mu) - w_1^t(\mu) f(x_1 v_1(\mu) + x_2 v_2(\mu) + y, \mu) v_1(\mu) \\ &-w_2^t(\mu) f(x_1 v_1(\mu) + x_2 v_2(\mu) + y, \mu) v_2(\mu) \end{aligned} \tag{27}$$

La cui linearizzazione in $(0, \mu)$ è

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\mu) & \beta(\mu) & 0 \\ -\beta(\mu) & \alpha(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & B(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix}$$

ossia è nella forma in cui si può applicare il teorema di esistenza della varietà centrale. Questa è definita da una funzione $y = h(x_1, x_2, \mu) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to U(\mu)$ tale che

$$h(0, 0, \mu) = h_{x_1}(0, 0, \mu) = h_{x_2}(0, 0, \mu) = 0.$$

In seguito occorrerà conoscere una approssimazione di $h(x_1, x_2, \mu)$ fino al secondo ordine. Una tale approssimazione si può ottenere prendendo $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to U(\mu)$ della forma $\phi(x_1, x_2, \mu) = A(\mu) x_1^2 + 2B(\mu) x_1 x_2 + C(\mu) x_2^2$ e ricercando $A(\mu), B(\mu), C(\mu)$ in modo che la funzione

$$\begin{aligned} &\Phi(x_1, x_2, \mu) := \phi_{x_1}(x_1, x_2, \mu) w_1^t(\mu) f(x_1 v_1(\mu) + x_2 v_2(\mu) + \phi(x_1, x_2, \mu), \mu) \\ &+\phi_{x_2}(x_1, x_2, \mu) w_2^t(\mu) f(x_1 v_1(\mu) + x_2 v_2(\mu) + \phi(x_1, x_2, \mu), \mu) \\ &-f(x_1 v_1(\mu) + x_2 v_2(\mu) + \phi(x_1, x_2, \mu), \mu) \\ &+w_1^t(\mu) f(x_1 v_1(\mu) + x_2 v_2(\mu) + \phi(x_1, x_2, \mu), \mu) v_1(\mu) \\ &+w_2^t(\mu) f(x_1 v_1(\mu) + x_2 v_2(\mu) + y, \mu) v_2(\mu) \end{aligned} \tag{28}$$

sia $o(x_1^2 + x_2^2)$ (uniformemente rispetto a μ)).

Osserviamo che si può supporre che $A(\mu), B(\mu), C(\mu) \in U(\mu)$. Infatti se

$$h(x_1, x_2, \mu) = \phi(x_1, x_2, \mu) + o(x_1^2 + x_2^2)$$

(uniformemente rispetto a μ), si ha, ponendo $x_2 = 0$:

$$h(x_1, 0, \mu) = A(\mu)x_1^2 + o(x_1^2)$$

e quindi, dividendo per x_1^2 e passando al limite per $x_1 \to 0$:

$$A(\mu) = \lim_{x_1 \to 0} \frac{h(x_1, 0, \mu)}{x_1^2} \in U(\mu).$$

Allo stesso modo (ponendo $x_1 = 0$, dividendo per x_2^2 e passando al $\lim\limits_{x_2 \to 0}$) si ottiene:

$$C(\mu) = \lim_{x_2 \to 0} \frac{h(0, x_2, \mu)}{x_2^2} \in U(\mu).$$

Infine, ponendo $x_1 = x_2 = t$ si ha:

$$B(\mu) = \lim_{t \to 0} \frac{h(t, t, \mu)}{t^2} - A(\mu) - C(\mu) \in U(\mu).$$

Sostituendo $A(\mu)x_1^2 + 2B(\mu)x_1x_2 + C(\mu)x_2^2$ a $\phi(x_1, x_2, \mu)$ nei diversi addendi di $\Phi(x_1, x_2, \mu)$ ed arrestando lo sviluppo al secondo ordine, otteniamo:

$$\begin{aligned}
&\phi_{x_1}(x_1, x_2, \mu)w_1^t(\mu)f(x_1v_1(\mu) + x_2v_2(\mu) + y, \mu) = \\
&2[A(\mu)x_1 + B(\mu)x_2]w_1(\mu)^t\{f_z(0, \mu)x_1v_1(\mu) + x_2v_2(\mu)]\} + o(x_1^2 + x_2^2) = \\
&2[A(\mu)x_1 + B(\mu)x_2][\alpha(\mu)x_1 + \beta(\mu)x_2] + o(x_1^2 + x_2^2);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\phi_{x_2}(x_1, x_2, \mu)w_2^t(\mu)f(x_1v_1(\mu) + x_2v_2(\mu) + y, \mu) = \\
&2[B(\mu)x_1 + C(\mu)x_2]w_2(\mu)^t\{f_z(0, \mu)x_1v_1(\mu) + x_2v_2(\mu)]\} + o(x_1^2 + x_2^2) = \\
&2[B(\mu)x_1 + C(\mu)x_2][-\beta(\mu)x_1 + \alpha(\mu)x_2] + o(x_1^2 + x_2^2)
\end{aligned}$$

mentre, la somma degli altri tre addendi arrestata al secondo ordine, tenendo conto di

$$w_1^t(\mu)U(\mu) = w_2^t(\mu)U(\mu) = 0$$

e del fatto che $f_z(0,\mu) : U(\mu) \to U(\mu)$, è:[7]

$$
\begin{aligned}
&-f_z(0,\mu)[A(\mu)x_1^2 + 2B(\mu)x_1x_2 + C(\mu)x_2^2] - \tfrac{1}{2} f_{zz}(0,\mu)(x_1v_1(\mu) + x_2v_2(\mu))^2 \\
&+\tfrac{1}{2} w_1^t(\mu)[f_{zz}(0,\mu)(x_1v_1(\mu) + x_2v_2(\mu))^2]v_1(\mu) + \\
&\tfrac{1}{2} w_2^t(\mu)[f_{zz}(0,\mu)(x_1v_1(\mu) + x_2v_2(\mu))^2]v_2(\mu) + o(x_1^2 + x_2^2).
\end{aligned}
$$

Quindi $\Phi(x_1, x_2, \mu) = o(x_1^2 + x_2^2)$ se e solo se valgono le seguenti relazioni:

$$
\begin{aligned}
&[2\alpha(\mu) - f_z(0,\mu)]A(\mu) - 2\beta(\mu)B(\mu) = k_1(\mu) \\
&\beta(\mu)A(\mu) + [2\alpha(\mu) - f_z(0,\mu)]B(\mu) - \beta(\mu)C(\mu) = k_2(\mu) \\
&2\beta(\mu)B(\mu) + [2\alpha(\mu) - f_z(0,\mu)]C(\mu) = k_3(\mu)
\end{aligned} \tag{29}
$$

dove

$$
\begin{aligned}
k_1(\mu) &= \tfrac{1}{2}\left\{f_{zz}(0,\mu)v_1(\mu)^2 - w_1^t(\mu)[f_{zz}(0,\mu)v_1(\mu)^2]v_1(\mu) - w_2^t(\mu)[f_{zz}(0,\mu)v_1(\mu)^2]v_2(\mu)\right\} \\
k_2(\mu) &= \tfrac{1}{2}\left\{f_{zz}(0,\mu)v_1(\mu)v_2(\mu) - w_1^t(\mu)[f_{zz}(0,\mu)v_1(\mu)v_2(\mu)]v_1(\mu) - w_2^t(\mu)[f_{zz}(0,\mu)v_1(\mu)v_2(\mu)]v_2(\mu)\right\} \\
k_3(\mu) &= \tfrac{1}{2}\left\{f_{zz}(0,\mu)v_2(\mu)^2 - w_1^t(\mu)[f_{zz}(0,\mu)v_2(\mu)^2]v_1(\mu) - w_2^t(\mu)[f_{zz}(0,\mu)v_2(\mu)^2]v_2(\mu)\right\}
\end{aligned}
$$

che può scriversi nella forma

$$
M_0(\mu)\begin{pmatrix} A(\mu) \\ B(\mu) \\ C(\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1(\mu) \\ k_2(\mu) \\ k_3(\mu) \end{pmatrix}. \tag{30}
$$

Questa è un equazione lineare in $U(\mu)^3$ nel senso che $M_0(\mu) : U(\mu)^3 \to U(\mu)^3$ e $k_1(\mu)$, $k_2(\mu)$, $k_3(\mu) \in U(\mu)$. Infatti è immediato verificare che $w_i^t(\mu)k_j(\mu) = 0$ per ogni $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$. Ad esempio, dato che $w_1^t(\mu)[f_{zz}(0,\mu)v_1^2] \in \mathbb{R}$, si ha

$$
w_1^t(\mu)\{w_1^t(\mu)[f_{zz}(0,\mu)v_1(\mu)^2]v_1(\mu)\} = w_1^t(\mu)[f_{zz}(0,\mu)v_1(\mu)^2]
$$

e

$$
w_1(\mu)\{w_1^t(\mu)[f_{zz}(0,\mu)v_1(\mu)^2]v_2(\mu)\} = w_1^t(\mu)[f_{zz}(0,\mu)v_1(\mu)^2]w_1(\mu)v_2(\mu) = 0.
$$

[7] Qui e nel seguito se u e v sono due vettori di $\mathbb{R}^n$, con $f_{zz}(0,\mu)uv$ intendiamo il vettore $\frac{d}{dz}[f_z(z,\mu)u]_{|z=0}v$ la cui componente $k-$esima è $\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial z_k \partial z_j} u_j v_k$. Quindi, dato che $f \in C^2$, risulta: $f_{zz}(0,\mu)uv = f_{zz}(0,\mu)vu$.

L'equazione (30) può risolversi certamente se $M_0(\mu) : U(\mu)^3 \to U(\mu)^3$ è invertibile ossia se il suo nucleo $\mathcal{N}M_0(\mu)$ è $= \{0\}$. D'altra parte se $\mathcal{N}M_0(0) = \{0\}$ lo stesso varrà per $\mu \neq 0$ sufficientemente piccolo. Il sistema $M_0(0)\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = 0$ equivale a

$$\begin{aligned} &f_z(0,0)A + 2\beta(0)B = 0 \\ &\beta(0)(A - C) = f_z(0,0)B \\ &2\beta(0)B - f_z(0,0)C = 0 \end{aligned}$$

"Moltiplicando" la prima equazione per $f_z(0,0)^2$ ed usando le altre due, otteniamo:

$$\begin{aligned} f_z(0,0)^3 A &= -2\beta(0)f_z(0,0)[f_z(0,0)B] = -2\beta(0)^2 f_z(0,0)(A - C) \\ &= -2\beta(0)^2 f_z(0,0)A + 4\beta(0)^3 B = -4\beta(0)^2 f_z(0,0)A \end{aligned} \tag{31}$$

ossia:

$$f_z(0,0)[f_z(0,0)^2 + 4\beta(0)^2]A = 0.$$

Dall'invarianza di $U(0)$ sotto $f_z(0,0)$ si ha $[f_z(0,0)^2+4\beta(0)^2]A \in U(0)$, per ogni $A \in U(0)$. Quindi, dato che $f_z(0,0) : U(0) \to U(0)$ è invertibile (non avendo l'autovalore nullo), l'equazione (31) è soddisfatta se e solo se

$$[f_z(0,0) - 2i\beta(0)][f_z(0,0) + 2i\beta(0)]A = 0$$

e quindi se e solo se $A = 0$ visto che $f_z(0,0)$ non ha gli autovalori $\pm 2i\beta(0)$. Dalla prima equazione otteniamo anche $B = 0$ e quindi, dalla terza $C = 0$. Ciò conclude la dimostrazione dell'invertibilità di $M_0(0)$. In conclusione si ha

$$h(x_1, x_2, \mu) = A(\mu)x_1^2 + 2B(\mu)x_1x_2 + C(\mu)x_2^2 + o(x_1^2 + x_2^2).$$

e $A(\mu), B(\mu), C(\mu)$ soddisfano (30). Consideriamo ora l'equazione (27) sulla varietà centrale:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= w_1^t(\mu)f(x_1v_1(\mu) + x_2v_2(\mu) + h(x_1, x_2, \mu), \mu) \\ \dot{x}_2 &= w_2^t(\mu)f(x_1v_1(\mu) + x_2v_2(\mu) + h(x_1, x_2, \mu), \mu) \end{aligned} \tag{32}$$

Espandendo il termine di destra fino al terzo ordine e tenendo conto delle uguaglianze (25) e $w_j^t(\mu)f_z(0,\mu)h(x_1,x_2,\mu)=0$, otteniamo:[8]

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 = \;& \alpha(\mu)x_1+\beta(\mu)x_2+w_1^t(\mu)\Big\{\tfrac{1}{2}[f_{zz}(0,\mu)v_1(\mu)^2]x_1^2\\
&+[f_{zz}(0,\mu)v_1(\mu)v_2(\mu)]x_1x_2+[f_{zz}(0,\mu)v_2(\mu)^2]x_2^2\\
&+f_{zz}(0,\mu)(x_1v_1(\mu)+x_2v_2(\mu))(A(\mu)x_1^2+2B(\mu)x_1x_2+C(\mu)x_2^2)\\
&+\tfrac{1}{6}f_{zzz}(0,\mu)(x_1v_1(\mu)+x_2v_2(\mu))^3\Big\}\\
\dot{x}_2 = \;& -\beta(\mu)x_1+\alpha(\mu)x_2+w_2^t(\mu)\Big\{\tfrac{1}{2}[f_{zz}(0,\mu)v_1(\mu)^2]x_1^2\\
&+[f_{zz}(0,\mu)v_1(\mu)v_2(\mu)]x_1x_2+[f_{zz}(0,\mu)v_2(\mu)^2]x_2^2\\
&+f_{zz}(0,\mu)(x_1v_1(\mu)+x_2v_2(\mu))(A(\mu)x_1^2+2B(\mu)x_1x_2+C(\mu)x_2^2)\\
&+\tfrac{1}{6}f_{zzz}(0,\mu)(x_1v_1(\mu)+x_2v_2(\mu))^3\Big\}
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Scriviamo, per semplicità

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 = \;& \alpha(\mu)x_1+\beta(\mu)x_2+k_{20}^{(1)}(\mu)x_1^2+k_{11}^{(1)}(\mu)x_1x_2+k_{02}^{(1)}(\mu)x_2^2\\
&+\ell_{30}^{(1)}(\mu)x_1^3+\ell_{21}^{(1)}(\mu)x_1^2x_2+\ell_{12}^{(1)}(\mu)x_1x_2^2+\ell_{03}^{(1)}(\mu)x_2^3+o((|x_1|+|x_2|)^3)\\
\dot{x}_2 = \;& -\beta(\mu)x_1+\alpha(\mu)x_2+k_{20}^{(2)}(\mu)x_1^2+k_{11}^{(2)}(\mu)x_1x_2+k_{02}^{(2)}(\mu)x_2^2\\
&+\ell_{30}^{(2)}(\mu)x_1^3+\ell_{21}^{(2)}(\mu)x_1^2x_2+\ell_{12}^{(2)}(\mu)x_1x_2^2+\ell_{03}^{(2)}(\mu)x_2^3+o((|x_1|+|x_2|)^3)
\end{aligned}
\tag{34}
$$

dove:

$$
\begin{aligned}
k_{20}^{(j)} &= \tfrac{1}{2}w_j^t(\mu)[f_{zz}(0,\mu)v_1(\mu)^2]\\
k_{11}^{(j)} &= w_j^t(\mu)[f_{zz}(0,\mu)v_1(\mu)v_2(\mu)]\\
k_{02}^{(j)} &= \tfrac{1}{2}w_j^t(\mu)[f_{zz}(0,\mu)v_2(\mu)^2]\\
\ell_{30}^{(j)} &= w_j^t(\mu)[f_{zz}(0,\mu)v_1(\mu)A(\mu)+\tfrac{1}{6}f_{zzz}(0,\mu)v_1(\mu)^3]\\
\ell_{21}^{(j)} &= w_j^t(\mu)\{f_{zz}(0,\mu)[v_2(\mu)A(\mu)+2v_1(\mu)B(\mu)]+\tfrac{1}{2}f_{zzz}(0,\mu)v_1(\mu)^2v_2(\mu)\}\\
\ell_{12}^{(j)} &= w_j^t(\mu)\{f_{zz}(0,\mu)[v_1(\mu)C(\mu)+2v_2(\mu)B(\mu)]+\tfrac{1}{2}f_{zzz}(0,\mu)v_1(\mu)v_2(\mu)^2\}\\
\ell_{03}^{(j)} &= w_j^t(\mu)[f_{zz}(0,\mu)v_2(\mu)C(\mu)+\tfrac{1}{6}f_{zzz}(0,\mu)v_2(\mu)^3].
\end{aligned}
$$

Riduzione a forma normale

L'equazione nella varietà centrale, scritta nella forma (34) non è ancora nella forma ideale per la nostra analisi. È necessario semplificarla ulteriormente. Il metodo di riduzione a

[8] Il significato del simbolo (vettore) $f_{zzz}(0,\mu)v^{(1)}v^{(2)}v^{(3)}$ è analogo a quello di $f_{zz}(0,\mu)v^{(1)}v^{(2)}$ ossia $f_{zzz}(0,\mu)v^{(1)}v^{(2)}v^{(3)}=\frac{d}{dz}[f_{zz}(z,\mu)v^{(1)}v^{(2)}]_{|z=0}v_3=\left(\sum_{j,k,\ell=1}^{n}\frac{\partial^3 f_i}{\partial z_j\partial z_k\partial z_\ell}v_j^{(1)}v_k^{(2)}v_\ell^{(3)}\right)_i.$

forma normale permette di raggiungere questo risultato. L'equazione (34) è del tipo:

$$\dot{x} = Ax + H_r(x) + H_{r+1}(x) + G_r(x) \tag{35}$$

dove A è una matrice, $H_j(x)$ è un vettore le cui componenti sono polinomi omogenei di grado $j \geq 2$ e $G_r(x) = o(|x|^{r+1})$. Questa maggiore generalità è necessaria perché applicheremo il metodo due volte: prima per *eliminare* i termini del second'ordine, poi per *eliminare* quelli del terzo. Sia $P_r(x)$ un polinomio omogeneo di grado r (a valori vettoriali) e poniamo

$$x = \xi + P_r(\xi). \tag{36}$$

Dato che $P_r(\xi)$ è omogeneo di grado ≥ 2 si ha $P_r(0) = 0$, $P_r'(0) = 0$. Per questo motivo la trasformazione (36) si dice *vicina all'identità* (*near identity*). Sostituendo la (36) nella (35) otteniamo:

$$(\mathbb{I} + P_r'(\xi))\dot{\xi} = A\xi + AP_r(\xi) + H_r(\xi + P_r(\xi)) + H_{r+1}(\xi + P_r(\xi)) + G_r(\xi + P_r(\xi)) \tag{37}$$

dove con $P_r'(\xi)$ si indica la matrice Jacobiana di $P_r(\xi)$. Dato che le componenti di $P_r(\xi)$ sono poliomi omogenei di grado r, gli elementi della matrice Jacobiana $P_r'(\xi)$ sono polinomi omogenei di grado $r-1$. Inoltre, dato che $P_r'(0) = 0$, per $|\xi|$ sufficientemente piccolo si avrà $\|P_r'(\xi)\| < 1$ e quindi:

$$(\mathbb{I} + P_r'(\xi))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k P_r'(\xi)^k = \mathbb{I} - P_r'(\xi) + P_r'(\xi)^2 + o(\xi^{2(r-1)}).$$

Sostituendo nella (37) ed arrestandoci ai termini di ordine $r+1$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} = \; & A\xi + [AP_r(\xi) - P_r'(\xi)A\xi + H_r(\xi)] + [H_r(\xi + P_r(\xi)) - H_r(\xi)] \\ & - P_r'(\xi)[AP_r(\xi) - P_r'(\xi)A\xi + H_r(\xi)] + H_{r+1}(\xi) + \hat{G}_r(\xi) \end{aligned} \tag{38}$$

dove $\hat{G}_r(\xi) = o(|\xi|^{r+1})$. Notiamo che non tutti gli addendi della (38) sono di ordine $\leq r+1$. Ad esempio $P_r'(\xi)[AP_r(\xi) - P_r'(\xi)A\xi + H_r(\xi)]$ è omogeneo di grado $2r-1$ e $2r-1 > r+1$ se e solo se $r > 2$. In altre parole l'addendo $P_r'(\xi)[AP_r(\xi) - P_r'(\xi)A\xi + H_r(\xi)]$ va considerato solo nel caso $r = 2$. Inoltre l'addendo $H_r(\xi + P_r(\xi)) - H_r(\xi)$ è un polinomio di grado $\geq r+1$ ma di questo vanno considerati solo i termini di grado $r+1$.[9]

[9]Dato che $r \geq 2$, il termine di grado più basso di $H_r(\xi + P_r(\xi)) - H_r(\xi)$ è $H_r'(\xi)P_r(\xi)$ che ha grado $2r-1$ e $2r-1 = r+1$ se e solo se $r = 2$, dunque $[H_r(\xi + P_r(\xi)) - H_r(\xi)]_{r+1} = 0$ se $r > 2$.

Ora, supponiamo di poter trovare un polinomio omogeneo $P_r(\xi)$ in modo che

$$P_r'(\xi)A\xi - AP_r(\xi) = H_r(\xi). \tag{39}$$

In tal caso l'equazione (38) si semplifica in

$$\dot{\xi} = A\xi + [H_r(\xi + P_r(\xi)) - H_r(\xi)]_{r+1} + H_{r+1}(\xi) + \hat{G}_r(\xi). \tag{40}$$

dove con $[H_r(\xi + P_r(\xi)) - H_r(\xi)]_{r+1}$ indichiamo la parte omogenea di grado $r + 1$ di $H_r(\xi + P_r(\xi)) - H_r(\xi)$. In altre parole dalla equazione (35) sono stati rimossi i termini omogenei di grado r. Il prezzo che si è pagato è una modifica dei termini di grado $\geq r+1$.

Il termine a sinistra dell'uguaglianza nella (39) definisce un'applicazione lineare

$$L_r : H_r \to H_r$$

dallo spazio dei polinomi omogenei (a valori vettoriali) di grado r in sé. Questo è uno spazio vettoriale (includendo il polinomio nullo) di dimensione finita. Se il nucleo di L_r, $\mathcal{N}\,L_r$, è $= \{0\}$ allora L_r è un isomorfismo pertanto l'equazione (39) può risolversi e quindi dall'equazione (35) si possono rimuovere i termini di grado r. Se invece $\mathcal{N}\,L_r \neq \{0\}$ l'equazione (39) può risolversi solo per $H_r(\xi)$ in un sottospazio di H_r di codimensione uguale alla dimensione di $\mathcal{N}\,L_r$. In questo caso solo alcuni *monomi* potranno essere *rimossi* mentre altri rimarranno nell'equazione.

Applicazione all'equazione (34)

In questo caso si ha

$$A : \begin{pmatrix} \alpha(\mu) & \beta(\mu) \\ -\beta(\mu) & \alpha(\mu) \end{pmatrix}$$

$$H_2(x) = \widetilde{H}(x, x)$$

dove

$$\widetilde{H}(x, x') = \begin{pmatrix} x^t \widetilde{H}_1 x' \\ x^t \widetilde{H}_2 x' \end{pmatrix}$$

e $\widetilde{H}_1$, $\widetilde{H}_2$ sono matrici simmetriche 2×2. Infine lo spazio vettoriale H_r è lo spazio dei polinomi omogenei di grado r in due variabili e a valori in $\mathbb{R}^2$. Una base di questo spazio vettoriale è:

$$p_1 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad p_2 = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad p_3 = \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$p_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix} \quad p_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} \quad p_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo la matrice di L_2 rispetto alla base precedente. Si ha:

$$\begin{aligned} L_2 p_1 &= \alpha(\mu) p_1 + 2\beta(\mu) p_2 + \beta(\mu) p_4 \\ L_2 p_2 &= -\beta(\mu) p_1 + \alpha(\mu) p_2 + \beta(\mu) p_3 + \beta(\mu) p_5 \\ L_2 p_3 &= -2\beta(\mu) p_2 + \alpha(\mu) p_3 + \beta(\mu) p_6 \\ L_2 p_4 &= -\beta(\mu) p_1 + \alpha(\mu) p_4 + 2\beta(\mu) p_5 \\ L_2 p_5 &= -\beta(\mu) p_2 - \beta(\mu) p_4 + \alpha(\mu) p_5 + \beta(\mu) p_6 \\ L_2 p_6 &= -\beta(\mu) p_3 - 2\beta(\mu) p_5 + \alpha(\mu) p_6 \end{aligned} \tag{41}$$

e quindi la matrice di L_2 rispetto alla base $\{p_1, \ldots, p_6\}$ è

$$M(\mu) := \begin{pmatrix} M_0(\mu) & -\beta(\mu)\mathbb{I} \\ \beta(\mu)\mathbb{I} & M_0(\mu) \end{pmatrix}$$

dove

$$M_0(\mu) := \begin{pmatrix} \alpha(\mu) & -\beta(\mu) & 0 \\ 2\beta(\mu) & \alpha(\mu) & -2\beta(\mu) \\ 0 & \beta(\mu) & \alpha(\mu) \end{pmatrix}.$$

Se proviamo che $M(0)$ è invertibile anche $M(\mu)$ lo sarà per $|\mu|$ sufficientemente piccolo e quindi, per ogni $H \in H_2$, l'equazione

$$P'(\xi)A(\mu)\xi - A(\mu)P(\xi) = H(\xi)$$

avrà un unica soluzione $P(\xi) \in H_2$. Ora si ha

$$M(0) = \beta(0) \begin{pmatrix} \hat{M}_0 & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \hat{M}_0 \end{pmatrix}$$

dove

$$\hat{M}_0 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un vettore $(u\ v) \in \mathbb{R}^6$ appartiene al nucleo di $M(0)$ se e solo se i vettori $u, v \in \mathbb{R}^3$ soddisfano il sistema:

$$\begin{cases} \hat{M}_0 u - v = 0 \\ u + \hat{M}_0 v = 0. \end{cases}$$

Se u, v soddisfano il sistema si ha:

$$[\hat{M}_0^2 + \mathbb{I}]u = 0. \tag{42}$$

Ma

$$\hat{M}_0^2 + \mathbb{I} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

è invertibile (il suo determinante è uguale a 9). Quindi l'equazione (42) ha solo la soluzione $u = 0$ da cui si ricava $v = 0$ e $L_2 : H_2 \to H_2$ è invertibile. Sia $P_2(\xi) \in H_2$ l'unica soluzione di

$$P_2'(\xi)A(\mu)\xi - A(\mu)P_2(\xi) = H_2(x)$$

e poniamo $x = \xi + P_2(\xi)$, l'equazione (34) si scrive

$$\dot{\xi} = A(\mu)\xi + H_2'(\xi)P_2(\xi) + H_3(\xi) + G_3(\xi) := A(\mu)\xi + \hat{H}_3(\xi) + G_3(\xi) \tag{43}$$

dove $G_3(\xi) = o(\xi^3)$. Applichiamo di nuovo il metodo di riduzione a forma normale per *rimuovere* i termini di ordine 3. Questa volta dobbiamo valutare l'invertibilità di $L_3 : H_3 \to H_3$. Una base di H_3 è:

$$q_1 = \begin{pmatrix} x_1^3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad q_2 = \begin{pmatrix} x_1^2 x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad q_3 = \begin{pmatrix} x_1 x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad q_4 = \begin{pmatrix} x_2^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^3 \end{pmatrix} \quad q_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 x_2 \end{pmatrix} \quad q_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 x_2^2 \end{pmatrix} \quad q_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^3 \end{pmatrix}$$

e la matrice di L_3 rispetto a questa base è:

$$M(\mu) := \begin{pmatrix} M_1(\mu) & -\beta(\mu)\mathbb{I} \\ \beta(\mu)\mathbb{I} & M_1(\mu) \end{pmatrix}$$

dove

$$M_1(\mu) := \begin{pmatrix} 2\alpha(\mu) & -\beta(\mu) & 0 & 0 \\ 3\beta(\mu) & 2\alpha(\mu) & -2\beta(\mu) & 0 \\ 0 & 2\beta(\mu) & 2\alpha(\mu) & -3\beta(\mu) \\ 0 & 0 & \beta(\mu) & 2\alpha(\mu) \end{pmatrix}$$

Ponendo ancora $\mu = 0$ vediamo che

$$M(0) := \beta(0) \begin{pmatrix} \hat{M}_1 & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \hat{M}_1 \end{pmatrix}$$

dove

$$\hat{M}_1 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un vettore $(u\ v) \in \mathbb{R}^8$ appartiene al nucleo di $M(0)$ se e solo se

$$\begin{cases} \hat{M}_1 u - v = 0 \\ u + \hat{M}_1 v = 0. \end{cases}$$

e quindi ragionando come prima, u dovrà soddisfare:

$$[\hat{M}_1^2 + \mathbb{I}]u = 0. \tag{44}$$

D'altronde, se u soddisfa l'equazione (44), posto $v = \hat{M}_1 u$, si ha $\hat{M}_1 v = \hat{M}_1^2 u = -u$ e quindi $\begin{pmatrix} u \\ \hat{M}_1 u \end{pmatrix}$ soddisfa

$$M_1(0) \begin{pmatrix} u \\ \hat{M}_1 u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Questa volta però

$$\hat{M}_1^2 + \mathbb{I} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 6 \\ 6 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{45}$$

non è invertibile avendo il nucleo

$$\mathcal{N}[\hat{M}_1^2 + \mathbb{I}] = \text{span} \left\{ u_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; u_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Di conseguenza il nucleo $\mathcal{N}M_0(0)$ è lo lo spazio vettoriale di dimensione 2 generato dai vettori $(u\ v) \in \mathbb{R}^8$ tali che $v = \hat{M}_1 u$ e $u \in \mathcal{N}[\hat{M}_1^2 + \mathbb{I}]$ ossia:

$$\mathcal{N}M_1(0) = \text{span} \left\{ \hat{w}_1, \hat{w}_2 : \begin{array}{c} \hat{w}_1^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \hat{w}_2^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\}. \tag{46}$$

A questo punto si potrebbe obiettare che anche se l'equazione $L_3P_3 = H_3$ non si risolve in generale quando $\mu = 0$, nulla vieta che la stessa equazione possa risolversi per $\mu \neq 0$. In altre parole, potrebbe ben accadere che $\det M(\mu) \neq 0$ per $\mu = 0$. Tuttavia, anche se ciò fosse vero $\det M(\mu)^{-1} \to \infty$ per $\mu \to 0$ e quindi (alcuni) coefficienti della soluzione $P_3(\xi)$ di $L_3P_3 = H_3$ tenderebbero a ∞ quando $\mu \to 0$. Questi coefficienti entrano nella equazione modificata che quindi non avrebbe un *limite* per $\mu \to 0$. Invece dimostreremo in Appendice che l'equazione $L(\mu)P_3 = H \in \mathcal{R}L_3(0)$(= all'immagine di L_3 con $\mu = 0$) ha un'unica soluzione $P_3(\mu)$ tale che $P_3(\mu) \to L_3(0)^{-1}H$ quando $\mu \to 0$. Quindi dall'equazione (43) si possono *cancellare* tutti i termini di $\mathcal{R}L_3(0)$, mentre restano tutti quelli che appartengono ad un sottospazio di H_3 complementare a $\mathcal{R}L_3(0)$. Ora un vettore $b \in \mathbb{R}^8$ appartiene a $\mathcal{R}M(0)$ se e solo se $v^tb = 0$ per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^8$ tale che

$$v^t \begin{pmatrix} \hat{M}_1 & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \hat{M}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{47}$$

Scriviamo $v^t = (v_1^t \quad v_2^t)$, con $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$. Allora dovrà aversi:

$$\begin{cases} v_1^t\hat{M}_1 + v_2^t = 0 \\ v_1^t - v_2^t\hat{M}_1 = 0 \end{cases}$$

ossia:

$$v_1^t[\hat{M}_1^2 + \mathbb{I}] = 0, \qquad v_2^t = -v_1^t \hat{M}_1.$$

Quindi dalla (45) vediamo che si può prendere

$$v_1^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad v_1^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e

$$v_2^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad v_2^t = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ossia lo spazio dei vettori che soddisfano la (47) è generato dai vettori $\hat{v}_1$, $\hat{v}_2$:

$$\begin{aligned} \hat{v}_1^t &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ \hat{v}_2^t &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & -3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{48}$$

Osserviamo quindi che, indicando con $\hat{w}_1$, $\hat{w}_2$ i vettori definiti nella (46), si ha:

$$\begin{pmatrix} \hat{v}_1^t \hat{w}_1 & \hat{v}_1^t \hat{w}_2 \\ \hat{v}_2^t \hat{w}_1 & \hat{v}_2 \hat{w}_2 \end{pmatrix} = 8\mathbb{I}$$

e quindi, per ogni $b \in \mathbb{R}^8$ si ha

$$b - \frac{1}{8}[(v_1^t b)w_1 + (v_2^t b)w_2] \in \mathcal{R}M(0).$$

In altre parole, se b indica il vettore delle coordinate di $H \in H_3$ rispetto alla base $q_1, \ldots, q_8$, dall'equazione $\dot{x} = A(\mu)x + H(\xi)$ si possono rimuovere tutti i termini di $H(\xi)$ tranne quelli le cui componenti rispetto alla stessa base sono

$$\frac{1}{8}[(v_1^t b)w_1 + (v_2^t b)w_2].$$

Scrivendo $b^t = (\ b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad b_5 \quad b_6 \quad b_7 \quad b_8\ )$ si ha

$$\begin{aligned} (v_1^t b)w_1 + (v_2^t b)w_2 &= (3b_1 + b_3 + b_6 + 3b_8)w_1 + (b_2 + 3b_4 - 3b_5 - b_7)w_2 \\ &= 8k_1 w_1 + 8k_2 w_2 \end{aligned}$$

dove k_1 e k_2 sono definiti dall'uguaglianza. In conclusione esiste una trasformazione $\xi = \eta + P_3(\eta)$ che riduce l'equazione (43) a:

$$\dot{\eta} = A(\mu)\eta + k_1 \begin{pmatrix} \eta_1^3 + \eta_1\eta_2^2 \\ \eta_1^2\eta_2 + \eta_2^3 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \eta_1^2\eta_2 + \eta_2^3 \\ -\eta_1^3 - \eta_1\eta_2^2 \end{pmatrix} + \hat{G}_3(\eta)$$

(con $k_1 = k_1(\mu)$, $k_2 = k_2(\mu)$ e $\hat{G}_3(\eta) = o(|\eta|^3)$), ossia:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \alpha(\mu)\eta_1 + \beta(\mu)\eta_2 + k_1\eta_1(\eta_1^2+\eta_2^2) + k_2\eta_2(\eta_1^2+\eta_2^2) + o((\eta_1^2+\eta_2^2)^{3/2}) \\ \dot{\eta}_2 &= -\beta(\mu)\eta_1 + \alpha(\mu)\eta_2 + k_1\eta_2(\eta_1^2+\eta_2^2) - k_2\eta_1(\eta_1^2+\eta_2^2) + o((\eta_1^2+\eta_2^2)^{3/2}). \end{aligned} \tag{49}$$

Poniamo $r^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2$. Si ha $r\dot{r} = \eta_1\dot{\eta}_1 + \eta_2\dot{\eta}_2$ e quindi:

$$\dot{r} = \alpha(\mu)r + k_1(\mu)r^3 + o(r^3). \tag{50}$$

Gli equilibri *piccoli* (ossia in un intorno di $r = 0$) di (50) corrispondono a soluzioni periodiche della (43) e quindi, in ultima analisi della (23). Omettendo i temini di ordine più alto in (50) si ottengono gli equilibri:

$$r = 0 \quad \text{e} \quad r^* = \sqrt{-\frac{\alpha(\mu)}{k_1(\mu)}}$$

Dall'ipotesi $\alpha(0) = 0 \neq \alpha'(0)$ si ottiene che $\alpha(\mu) \neq 0$ se $\mu \neq 0$. Supponendo che

ii) $k_1(0) \neq 0$

ed applicando il teorema della funzione implicita, l'equazione (50) ha un equilibrio iperbolico per quei valori di $\mu \neq 0$ per i quali $\alpha(\mu)k_1(0) < 0$. La derivata di $\alpha(\mu)r + k_1(\mu)r^3$ in r^* è

$$-2\alpha(\mu)$$

e quindi r^* è stabile se $\alpha(\mu) > 0$. Si hanno i casi seguenti:

1) $\alpha'(0) > 0$ e $k_1(0) > 0$. Allora il sistema (23) ha una soluzione periodica per $\mu < 0$. Questa soluzione periodica è instabile perché $\alpha(\mu) < 0$ per $\mu < 0$. Non ci sono soluzioni periodiche *piccole* per $\mu > 0$.

2) $\alpha'(0) < 0$ e $k_1(0) > 0$. Allora il sistema (23) ha una soluzione periodica per $\mu > 0$. Questa soluzione periodica è instabile perché $\alpha(\mu) < 0$ per $\mu > 0$. Non ci sono soluzioni periodiche *piccole* per $\mu < 0$.

3) $\alpha'(0) > 0$ e $k_1(0) < 0$. Allora il sistema (23) ha una soluzione periodica per $\mu > 0$. Questa soluzione periodica è (orbitalmente) stabile perché $\alpha(\mu) > 0$ per $\mu > 0$. Non ci sono soluzioni periodiche *piccole* per $\mu < 0$.

4) $\alpha'(0) < 0$ e $k_1(0) < 0$. Allora il sistema (23) ha una soluzione periodica per $\mu < 0$. Questa soluzione periodica è (orbitalmente) stabile perché $\alpha(\mu) > 0$ per $\mu < 0$. Non ci sono soluzioni periodiche *piccole* per $\mu > 0$.

Si noti che, una volta stabilito per quali valori di μ esiste la soluzione periodica, la sua stabilità è opposta a quella del'equilibrio $r = 0$ (questo fenomeno si chiama *cambio di stabilità*.

Appendice

In questa sezione daremo un metodo per la risoluzione di certe equazioni lineari non invertibili e applicheremo poi il risultato per la risoluzione dell'equazione $L_3(\mu)P_3(\xi) = H(\xi)$, con $H_\xi \in \mathcal{R}L_3(0)$. Il metodo che presentiamo va sotto il nome di *Lyapunov–Schmidt* e funziona anche nel caso di certe equazioni non lineari in spazi infinito–dimensionali (vedi [Palmer, JDE 55, 1980]). Qui dimostreremo il risultato seguente:
Teorema. *Sia V, uno spazio vettoriale di dimensione finita e $L(\mu) : V \to V$ una famiglia C^2 di applicazioni lineari. Siano $\mathcal{N}L(0)$ e $\mathcal{R}L(0)$ rispettivamente il nucleo e l'immagine di $L(0)$. Supponiamo che valga la seguente proprietà:*

i) *Se $u \in \mathcal{N}L(0)$ e $L'(0)u \in \mathcal{R}L(0)$ allora $u = 0$.*

Allora esiste $\mu_0 > 0$ tale che per ogni $|\mu| < \mu_0$ e per ogni $b \in \mathcal{R}L(0)$ l'equazione

$$L(\mu)v = b$$

ha un unica soluzione $v := L(\mu)^{-1}b$, di classe C^1 in μ. Inoltre $L(0)L(\mu)^{-1}b - b \to 0$, quando $\mu \to 0$, uniformemente rispetto a b.
Dimostrazione. Indichiamo con $Q : V \to V$ una proiezione (ossia un'applicazione lineare tale che $Q^2 = Q$) tale che $\mathcal{R}Q = \mathcal{R}L(0)$ e con $W \subseteq V$ un sottospazio di V complementare di $\mathcal{N}L(0)$, ossia

$$V = \mathcal{N}L(0) \oplus W.$$

Per ogni $b \in \mathcal{R}L(0)$ indichiamo con $w_b := L(0)^{-1}b \in W$ l'unico elemento di W tale che $L(0)w_b = b$ ed osserviamo che la condizione $\lim_{\mu\to 0} L(0)L(\mu)^{-1}b - b = 0$ uniformemente rispetto a b, equivale a $\lim_{\mu\to 0} L(\mu)^{-1}b - w_b = 0$, uniformemente rispetto ad b. Scriviamo poi $v = v_0 + w$ dove $v_0 \in \mathcal{N}L(0)$ e $w \in W$. L'equazione $L(\mu)v = b$ equivale a $L(0)v = b - [L(\mu) - L(0)]v$, ossia sostituendo $v_0 + w$ a v:

$$L(0)w = b - [L(\mu) - L(0)](v_0 + w). \tag{51}$$

Dato che il termine a destra dell'equazione non appartiene, in generale a $\mathcal{R}L(0)$ sostituiamo l'equazione con il sistema equivalente:

$$\begin{cases} L(0)w - Q[b - [L(\mu) - L(0)](v_0 + w)] = 0 \\ (\mathbb{I} - Q)[L(\mu) - L(0)](v_0 + w) = 0 \end{cases} \tag{52}$$

(si noti che, siccome $b \in \mathcal{R}L(0) = \mathcal{R}Q$, si ha $b = Qb'$ e quindi $Qb = Q^2b' = Qb' = b$). Il termine a sinistra della prima equazione in (52) definisce un'applicazione affine $G(v_0, b, \mu) : W \to \mathcal{R}L_0 = \mathcal{R}Q$ di classe C^2 nei parametri (v_0, b, μ). Dall'algebra lineare sappiamo che $\dim\mathcal{R}L(0) = \dim V - \dim\mathcal{N}L(0) = \dim W$. Inoltre $G(v_0, b, 0)L(0)^{-1}b = 0$ e la derivata di G rispetto a w in $(v_0, b, 0)$, vale $G_w(v_0, b, 0) = L(0)$ che è un isomorfismo fra W e $\mathcal{R}L_0$. Quindi dal teorema della funzione implicita deduciamo che per ogni $(v_0, b) \in \mathcal{N}L(0) \times \mathcal{R}L(0)$ esiste $\mu_{v_0,b} > 0$ tale che per ogni $|\mu| < \mu_{v_0,b}$ esiste un unico $w = w(v_0, b, \mu)$ tale che

$$L(0)w(v_0, b, \mu) = Q[b - [L(\mu) - L(0)](v_0 + w(v_0, b, \mu))]. \tag{53}$$

Inoltre

$$w(v_0, b, 0) = L(0)^{-1}b. \tag{54}$$

Sia $(v_0', b') \in \mathcal{N}L(0) \times \mathcal{R}L(0)$. Sommando termine a termine la (53) con la

$$L(0)w(v_0', b', \mu) = Q[b' - [L(\mu) - L(0)](v_0' + w(v_0', b', \mu))]$$

ed sfruttando l'unicità di $w(v_0, b, \mu)$ si vede che

$$w(v_0 + v_0', b + b', \mu) = w(v_0, b, \mu) + w(v_0', b', \mu).$$

Similmente si ottiene:

$$w(cv_0, cb, \mu) = cw(v_0, b, \mu).$$

Quindi, per conoscere $w(v_0, b, \mu)$ è sufficiente conoscere $w(v_0^i, b^j, \mu)$ su una base $\{(v_0^i, b^j)\}$ di $\mathcal{N}L(0) \times \mathcal{R}L(0)$. Scelto $\mu_0 = \min\{\mu_{v_0^i, b^j}\}$ vediamo che $w(v_0, b, \mu)$ esiste per ogni

$(v_0, b) \in \mathcal{N}L(0) \times \mathcal{R}L(0)$ e $|\mu| < \mu_0$. Per risolvere l'equazione (51) occorre e basta risolvere $\widetilde{\Delta}(v_0, b, \mu) := (\mathbb{I} - Q)[L(\mu) - L(0)](v_0 + w(v_0, b, \mu)) = 0$. Notiamo che $\widetilde{\Delta}(v_0, b, \mu)$ è lineare in (v_0, b). È immediato verificare che

$$\widetilde{\Delta}(v_0, b, 0) = 0,$$

quindi poniamo

$$\Delta(v_0, b, \mu) = \begin{cases} \mu^{-1}\widetilde{\Delta}(v_0, b, \mu) & \text{se } \mu \neq 0 \\ \widetilde{\Delta}_\mu(v_0, b, 0) & \text{se } \mu = 0 \end{cases}$$

Si ha

$$\Delta(v_0, b, 0) = (\mathbb{I} - Q)L'(0)v_0$$

quindi $\Delta(0, b, 0) = 0$ e $\Delta_{v_0}(0, b, \mu) = (\mathbb{I} - Q)L'(0)$. Ora $\Delta_{v_0}(0, b, \mu) : \mathcal{N}L(0) \to \mathcal{N}Q$ e $\dim\mathcal{N}Q = \dim V - \dim\mathcal{R}L(0) = \dim\mathcal{N}L(0)$. Pertanto $\Delta_{v_0}(0, b, \mu)$ sarà un isomorfismo se e solo se $\mathcal{N}\Delta_{v_0}(0, b, \mu) = \{0\}$. Ma $u \in \mathcal{N}L(0)$ sodisfa $\Delta_{v_0}(0, b, \mu)u = 0$ se e solo se $(\mathbb{I} - Q)L'(0)u = 0$ ossia se e solo se $L'(0)u = QL'(0)u \in \mathcal{R}Q = \mathcal{R}L(0)$ ossia, per la **i)** se e solo se $u = 0$. $\Delta_{v_0}(0, b, \mu)$ è quindi un isomorfismo e quindi dal Teorema del Dini segue l'esistenza di un unico $v_0 = v_0(b, \mu)$ di classe C^1 in (b, μ), tale che $\Delta(v_0(b, \mu), b, \mu) = 0$ e $v_0(b, 0) = 0$. Dalla linearità di $\Delta(v_0, b, \mu)$ rispetto a (v_0, b) segue che $v_0(b, \mu)$ è lineare in b (per ogni fissato μ), quindi, come in precedenza, basta conoscere $v_0(b^j, \mu)$ su una base b^j di $\mathcal{R}L(0)$. Posto

$$v(\mu, b) = v_0(b, \mu) + w(v_0(b, \mu), b, \mu)$$

si vede che $v(\mu) = v(\mu, b)$ è l'unica soluzione di $L(\mu)v = b$ ed è lineare in b. Infine $v(\mu) \to v_0(b, 0) + w(v_0(b, 0), b, 0) = L(0)^{-1}b$ per $\mu \to 0$ e tale convergenza è uniforme in b vista la linearità di $v(b, \mu)$ rispetto a b. $\square$

Applichiamo il Teorema precedente alla mappa lineare $L_3 : H_3 \to H_3$ della sezione precedente. Scriviamo $L_3(\mu)$ invece di L_3 per sottolineare la dipendenza dal parametro μ. Tenendo conto della caratterizzazione di $\mathcal{N}M_1(0)$ e di $\mathcal{R}M_1(0)$, la condizione

$$U \in \mathcal{N}L_3(0), \quad L_3'(0)u = 0 \Rightarrow u = 0$$

equivale a verificare che la matrice

$$\begin{pmatrix} \hat{v}_1^t \\ \hat{v}_2^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1'(0) & -\beta'(0)\mathbb{I} \\ \beta'(0)\mathbb{I} & M_1'(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{w}_1 & \hat{w}_2 \end{pmatrix}$$

dove $\hat{w}_1$, $\hat{w}_2$ sono definiti in (46), $\hat{v}_1$, $\hat{v}_2$ in (48) e

$$M_1'(0) = \begin{pmatrix} 2\alpha'(0) & -\beta'(0) & 0 & 0 \\ 3\beta'(0) & 2\alpha'(0) & -2\beta'(0) & 0 \\ 0 & 2\beta'(0) & 2\alpha'(0) & -3\beta'(0) \\ 0 & 0 & \beta'(0) & 2\alpha'(0) \end{pmatrix}$$

è invertibile. Ora è facile verificare che:

$$L'(0)\hat{w}_1 = 2\alpha'(0)\hat{w}_1 \quad \text{e} \quad L'(0)\hat{w}_2 = 2\alpha'(0)\hat{w}_2$$

e quindi:

$$\begin{pmatrix} \hat{v}_1^t \\ \hat{v}_2^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1'(0) & \beta'(0)\mathbb{I} \\ -\beta'(0)\mathbb{I} & M_1'(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{w}_1 & \hat{w}_2 \end{pmatrix} = 16\alpha'(0)\mathbb{I}.$$