Prova scritta di:

Matematica I

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica ed Automatica

Primo Appello, Anno Accademico 02/03 (A)

13 dicembre 2002

1) Calcolare
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

2) Determinare l'ordine di infinitesimo della funzione $f(x) = \tan(x) - \sin(x)$ per $x \to 0$ e dedurne la convergenza della serie numerica
$$\sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

3) Mostrare che per ogni $n \in \mathbf{N}$ l'equazione
$$\cos\left(\frac{x}{n}\right) = x, \qquad x \in \mathbf{R},$$
ammette una unica soluzione $x_n \in (0, 1)$. Mostrare facoltativamente che $x_n \to 1$ per $n \to \infty$.

4) Si supponga che un punto materiale si muova su di una retta con velocitá
$$v(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{(1 + \mathrm{e}^t)^2}.$$
Assunto che al tempo $t_0 = 0$ il punto abbia posizione $x(0) = \frac{1}{2}$, determinare la legge oraria del moto e quante volte il punto passa per la posizione $\bar{x} = 1$.

Prova scritta di:

Matematica I

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica ed Automatica

Primo Appello, Anno Accademico 02/03 (B)

13 dicembre 2002

1) Calcolare
$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n-1})^{\frac{n}{2}}.$$

2) Determinare l'ordine di infinitesimo della funzione $f(x) = \tan(x) - x$ per $x \to 0$ e dedurne la convergenza della serie numerica
$$\sum_{n=1}^{\infty}\tan(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}.$$

3) Mostrare che per ogni $n \in \mathbf{N}$ l'equazione
$$\cos(\frac{x}{2n}) = x, \qquad x \in \mathbf{R},$$
ammette una unica soluzione $x_n \in (0, 1)$. Mostrare facoltativamente che $x_n \to 1$ per $n \to \infty$.

4) Si supponga che un punto materiale si muova su di una retta con velocitá
$$v(t) = \frac{2e^{2t}}{(1+e^{2t})^2}.$$
Assunto che al tempo $t_0 = 0$ il punto abbia posizione $x(0) = \frac{1}{2}$, determinare la legge oraria del moto e quante volte il punto passa per la posizione $\bar{x} = 1$.

Prova scritta di:

Matematica I

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica ed Automatica

Secondo Appello, Anno Accademico 02/03 (A)

14 gennaio 2003

1) Calcolare
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\cos(x)-1)^{\frac{1}{5}}}{\pi^{x^2}-1}.$$

2) Determinare al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ il carattere di convergenza della serie numerica
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \arctan(\frac{1}{n}).$$

3) Determinare per quali $\alpha > 0$ l'equazione $\log x^{\frac{1}{\alpha}} = \alpha x^2$ ammette soluzioni in $\mathbf{R}$.

4) Determinare per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ risulta convergente l'integrale improprio
$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha+1}}{\log(1+x)}\, dx.$$

Prova scritta di:

Matematica I

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica ed Automatica

Secondo Appello, Anno Accademico 02/03 (B)

14 gennaio 2003

1) Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\cos(x))^{\frac{1}{5}} - 1}{2^{x^2} - 1}.$$

2) Determinare al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ il carattere di convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \arcsin(\frac{1}{n}).$$

3) Determinare per quali $\alpha > 0$ l'equazione $\log x^\alpha = x^2$ ammette soluzioni in $\mathbf{R}$.

4) Determinare per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ risulta convergente l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha}{\log(1+x)}\, dx.$$

Prova scritta di:

Matematica I

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica ed Automatica

Terzo Appello, Anno Accademico 02/03

17 febbraio 2003

1) Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{(\arccos(x)-\frac{\pi}{2})} - \mathrm{e}^{-x}}{\tan(x) - x}.$$

2) Determinare per $\alpha > 0$ il carattere di convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{(n^\alpha)}}{n!}.$$

3) Mostrare che per ogni $p \in [0,1]$ e $x > 0$ si ha

$$(1+x)^p - x^p \leq 1.$$

4) Determinare per quali $\alpha > 0$ risulta convergente l'integrale improrio

$$\int_0^1 \frac{1-x}{(2+x)x^\alpha}\,dx.$$

Si calcoli l'integrale per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Prova scritta di:

Matematica I

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica ed Automatica

Quarto Appello, Anno Accademico 02/03

7 Aprile 2003

1) Determinare il polinomio di Taylor del quarto ordine di punto iniziale $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \frac{1}{\cos(x)} - \cosh(x)$ e calcolare

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{1 - \cos(x^2)}.$$

2) Determinare per $\alpha > 0$ il carattere di convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{(n^\alpha)}}{n^n}.$$

3) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$\cos(x) = |x^2 - 1|.$$

4) Determinare per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ risulta convergente l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} x^\alpha \, dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 2$.

Prova scritta di:

Matematica I

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica ed Automatica

Sesto Appello, Anno Accademico 02/03

15 Luglio 2003

1) Mostrare che per $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ vale

$$\tan(x) \geq x + \frac{x^3}{3}.$$

2) Studiare per $a > 0$ il carattere di convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, a^n}{n^n}.$$

3) Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx.$$