Corsi di Laurea in Ingegneria Gestionale
Prova scritta di Matematica 1 del 23/02/2012

1) Mostrare che $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x\cos(x) - \log(x+\sqrt{1+x^2})}{(2^x-1)\sin(\log(1+x^2))} = -\frac{1}{3\log(2)}$.

Possibile soluzione: Considerando dapprima il denominatore notiamo che $\sin(\log(1+x^2)) \sim_{x\to 0} \log(1+x^2) \sim_{x\to 0} x^2$ e che $2^x - 1 = e^{x\log(2)} - 1 \sim_{x\to 0} x\log(2)$, ottenendo $(2^x-1)\sin(\log(1+x^2)) \sim_{x\to 0} \log(2)x^3$. Dato che il denominatore è un infinitesimo di ordine 3 determiniamo lo sviluppo del numeratore a meno di $o(x^3)$. Per $x \to 0^+$ si ha $x\cos(x) = x(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)) = x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$. Inoltre, essendo $\sqrt{1+x^2} =_{x\to 0} 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$ e $\log(1+y) =_{y\to 0} y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)$ otteniamo anche che per $x \to 0^+$ si ha

$$\begin{aligned}\log(x+\sqrt{1+x^2}) &= \log(1 + x + \tfrac{x^2}{2} + o(x^3))\\ &= x + \tfrac{x^2}{2} + o(x^3) - \tfrac{1}{2}(x + \tfrac{x^2}{2} + o(x^3))^2 + \tfrac{1}{3}(x + \tfrac{x^2}{2} + o(x^3))^3 + o(x + \tfrac{x^2}{2} + o(x^3))^3\\ &= x + x^2(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}) + x^3(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}) + o(x^3) = x - \tfrac{x^3}{6} + o(x^3).\end{aligned}$$

Dunque

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x\cos(x) - \log(x+\sqrt{1+x^2})}{(2^x-1)\sin(\log(1+x^2))} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x - \frac{x^3}{2} - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\log(2)x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{\log(2)x^3} = -\frac{1}{3\log(2)}$$

2) Tracciare il grafico della funzione $f(x) = x - 1 + 2\sqrt{2 - 2x + x^2}$.

Possibile soluzione: Essendo $2 - 2x + x^2 > 0$ su $\mathbb{R}$, f risulta definita e indefinitamente derivabile su $\mathbb{R}$. Essendo (si ricordi che $\sqrt{x^2} = |x|$ per $x \in \mathbb{R}$)

$$f(x) = x - 1 + 2|x|\sqrt{1 - \tfrac{2}{x} + \tfrac{2}{x^2}} = \begin{cases} x - 1 + 2x\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} & x > 0, \\ x - 1 - 2x\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} & x < 0, \end{cases}$$

ed essendo (si ricordi che $\sqrt{1+y} =_{y\to 0} 1 + \frac{y}{2} + o(y)$)

$$\sqrt{1 - \tfrac{2}{x} + \tfrac{2}{x^2}} =_{x\to\pm\infty} 1 - \tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{x^2} + o(-\tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{x^2}) =_{x\to\pm\infty} 1 - \tfrac{1}{x} + o(\tfrac{1}{x}),$$

otteniamo che

$$f(x) = \begin{cases} x(1 - 1/x - 2(1 - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x}))) = -x + 1 + o(1) & \text{per } x \to -\infty \\ x(1 - 1/x + 2(1 - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x}))) = 3x - 3 + o(1) & \text{per } x \to +\infty. \end{cases}$$

Deduciamo allora

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x + 1 + o(1) = +\infty, && \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 3x + 3 + o(1) = +\infty,\\ &\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} -1 + \tfrac{1}{x} + o(\tfrac{1}{x}) = -1, && \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} 3 - \tfrac{3}{x} + o(\tfrac{1}{x}) = 3,\\ &\lim_{x\to-\infty} f(x) + x = \lim_{x\to-\infty} -x + 1 + o(1) + x = 1, && \lim_{x\to+\infty} f(x) - 3x = \lim_{x\to-\infty} 3x - 3 + o(1) - 3x = -3, \end{aligned}$$

uguaglianze che ci dicono che f presenta un asintoto obliquo per $x \to -\infty$ in $y = -x + 1$ ed un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ in $y = 3x - 3$.

Sappiamo che f risulta derivabile su $I\!R$ e la sua derivata è

$$f'(x) = 1 + \frac{2x-2}{\sqrt{2-2x+x^2}} = \frac{2x-2+\sqrt{2-2x+x^2}}{\sqrt{2-2x+x^2}}$$

e dunque

$$sgn(f'(x)) = sgn(2x-2+\sqrt{2-2x+x^2}).$$

Si ha allora che

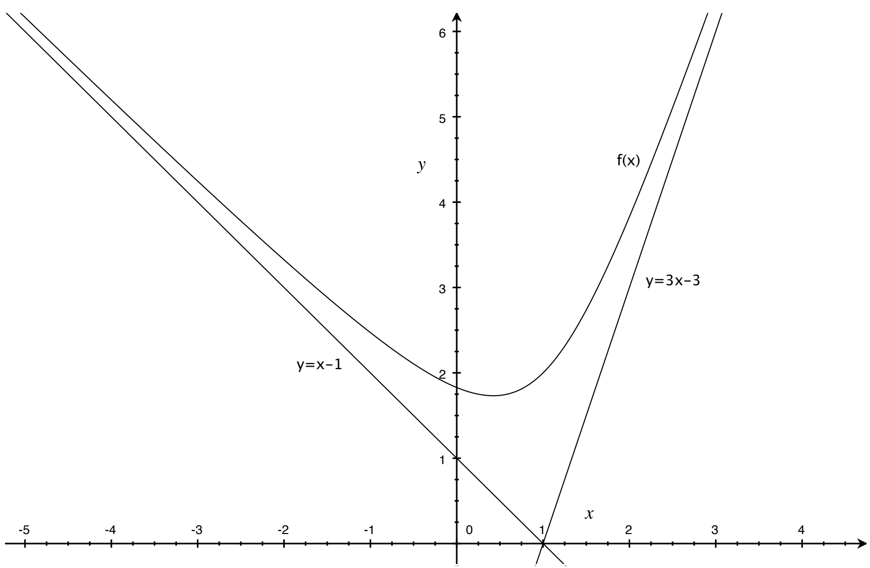
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{2-2x+x^2} > 2-2x \Leftrightarrow (2-2x<0) \text{ o } (2-2x \geq 0 \text{ e } 2-2x+x^2 > 4-8x+4x^2)$$
$$\Leftrightarrow (x>1) \text{ o } (x \leq 1 \text{ e } 0 > 2-6x+3x^2) \Leftrightarrow (x>1) \text{ o } (\tfrac{3-\sqrt{3}}{3} < x \leq 1) \Leftrightarrow 1 - \tfrac{1}{\sqrt{3}} < x$$

e analogamente

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - \tfrac{1}{\sqrt{3}} > x.$$

Otteniamo quindi che f risulta decrescente su $(-\infty, 1-\frac{1}{\sqrt{3}})$, crescente su $(1-\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$ presentando un punto di minimo assoluto in $x_0 = 1-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ove $f(1-\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{\frac{4}{3}} = \sqrt{3}$. Essendo $f(1-\frac{1}{\sqrt{3}}) > 0$ la funzione f risulta sempre positiva su $I\!R$.

La derivata seconda di f su $I\!R$ vale $f''(x) = \frac{2}{(2-2x+x^2)^{3/2}}$ che è sempre positiva su $I\!R$. Concludiamo che f è strettamente convessa su $I\!R$.



3) Determinare lo sviluppo al quarto ordine per $x \to 0$ della funzione $f(x) = \cosh(x) - \dfrac{1}{\cos(x)}$.

Possibile soluzione: Come noto $\cosh(x) =_{x\to 0} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$. Essendo inoltre $1 - \cos(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ e $\frac{1}{1-y} =_{y\to 0} 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + o(y^4)$, otteniamo

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1-(1-\cos(x))} =_{x\to 0} 1 + \tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^4}{24} + o(x^4) + (\tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^4}{24} + o(x^4))^2 + o(x^4)$$
$$=_{x\to 0} 1 + \tfrac{x^2}{2} + (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{24})x^4 + o(x^4) =_{x\to 0} 1 + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{5}{24}x^4 + o(x^4).$$

Concludiamo che

$$\cosh(x) - \frac{1}{\cos(x)} =_{x\to 0} 1 + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{24} - (1 + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{5}{24}x^4 + o(x^4)) =_{x\to 0} -\tfrac{x^4}{6} + o(x^4)).$$

4) Determinare per quali $\alpha > 0$ risulta convergente l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha + x}\,dx$ e calcolarlo per $\alpha = 1/2$.

Possibile soluzione: Posto $f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha+x}$ si ha che f_α è positiva e continua su $(0,1]$ ed inoltre $f_\alpha(x) \sim_{x\to 0^+} \begin{cases} \frac{1}{x^\alpha} & \alpha \in (0,1) \\ \frac{1}{2x} & \alpha = 1 \\ \frac{1}{x} & \alpha > 1 \end{cases}$. Essendo come noto $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ convergente solo nel caso $p < 1$, per il criterio del confronto asintotico concludiamo che $\int_0^1 f_\alpha(x)\,dx$ è convergente per ogni $\alpha \in (0,1)$ e divergente per $\alpha \geq 1$.
Nel caso $\alpha = 1/2$ notiamo che

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+x}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = 2\log(1+\sqrt{x})$$

da cui

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+x}\,dx = 2\log(2).$$

5) Determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il carattere (convergenza semplice, assoluta) della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\cos(\frac{1}{n^\alpha}))$.

Possibile soluzione: Notiamo anzitutto che se $\alpha \leq 0$ si ha che $1 - \cos(\frac{1}{n^\alpha}) \not\to_{n\to\infty} 0$ e dunque la serie non è convergente.
Considerando il caso $\alpha > 0$, per definizione la serie converge assolutamente se è convergente la serie dei moduli dei suoi termini, cioè la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1 - \cos(\frac{1}{n^\alpha})$. Essendo $1 - \cos(\frac{1}{n^\alpha}) \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n^{2\alpha}}$, per il criterio del confronto asintotico il carattere di tale serie è quello della serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}}$, che, come noto, è convergente solo nel caso $2\alpha > 1$, cioè $\alpha > \frac{1}{2}$. Concludiamo che la serie proposta è assolutamente convergente se $\alpha > \frac{1}{2}$.
Se $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$ la serie non converge assolutamente ma possiamo usare il criterio di Leibniz per studiarne la convergenza semplice. Posto $a_n = 1 - \cos(\frac{1}{n^\alpha})$ si riconosce facilmente che per ogni $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$ la successione a_n è decrescente a zero. Infatti sappiamo che la funzione $\cos(x)$ è decrescente per $x \in [0,1]$ e la successione $\frac{1}{n^\alpha}$ decrescente a 0 per ogni $\alpha > 0$. Deduciamo che la loro composizione, $\cos(\frac{1}{n^\alpha})$, è una successione crescente e quindi, come detto, $a_n = 1 - \cos(\frac{1}{n^\alpha})$ è una successione decrescente e notoriamente infinitesima per ogni $\alpha > 0$. Ritornando alla serie in esame, essa si può scrivere nella forma $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ e viste le proprietà della successione a_n, dal criterio di Leibniz concludiamo che la serie è semplicemente convergente per ogni $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$.