ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA DUE

CURVE

1. Data la curva di equazioni parametriche $\varphi(t) = (e^t, \sqrt{2}t, -e^{-t})$, $t \in [-1, 1]$.

a) Dire se la curva è regolare, chiusa, semplice e determinarne la lunghezza.

b) Determinarne versore tangente, normale e binormale nel punto $\varphi(0)$.

2. Data la curva $\varphi(t) = (1 - t, t - t^2 - 1, t)$ con $t \in [0, 2]$, provare che la curva è piana (torsione nulla) e determinare l'equazione del piano su cui giace.

3. Data la curva $\varphi(t) = (t^2, t^3, t^2)$ con $t \in [0, 1]$.

a) Stabilire se è regolare, semplice e chiusa.

b) Calcolarne la lunghezza.

4. Data la curva $\varphi(t) = (2\cos t, \sin t, 2\sin t - 2\cos t - 1)$ con $t \in [0, 2\pi]$, provare che la curva è semplice, chiusa e piana. Determinare l'equazione del piano su cui giace.

5. Data la curva $\varphi(t) = (\sin t, \cos t, t^2)$, $t \in [-\pi, \pi]$, stabilire se è regolare, biregolare, semplice e chiusa. Determinarne versore tangente, normale e binormale e piano osculatore nel punto $\varphi(0)$.

RISOLUZIONE

1. (a) La curva risulta di classe $\mathcal{C}^1$ in $[-1, 1]$ con $\varphi'(t) = (e^t, \sqrt{2}, e^{-t})$ e

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{e^{2t} + 2 + e^{-2t}} = \sqrt{\frac{e^{4t} + 2e^{2t} + 1}{e^{2t}}} = \frac{e^{2t} + 1}{e^t} = e^t + e^{-t} > 0, \quad \forall t \in (-1, 1).$$

Poichè $\|\varphi'(t)\| > 0$, $\forall t \in (-1, 1)$, la curva risulta regolare. La curva non è chiusa essendo $\varphi(-1) = (\frac{1}{e}, -\sqrt{2}, -e) \neq (e, \sqrt{2}, -\frac{1}{e}) = \varphi(1)$. La curva è semplice poichè se $t_1 \neq t_2$ allora $\sqrt{2}t_1 \neq \sqrt{2}t_2$ e quindi $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$. Infine, la lunghezza della curva è data da

$$L(\varphi) = \int_{-1}^{1} e^t + e^{-t} dt = 2(e - \frac{1}{e})$$

(b) Risulta $\varphi(0) = (1, 0, -1)$, $\varphi'(0) = (1, \sqrt{2}, 1)$ e $\varphi''(0) = (1, 0, -1)$. Dunque il versore tangente in $\varphi(0)$ è dato da

$$T = \frac{\varphi'(0)}{\|\varphi'(0)\|} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}),$$

il versore binormale è

$$B = \frac{\varphi'(0) \wedge \varphi''(0)}{\|\varphi'(0) \wedge \varphi''(0)\|} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2})$$

mentre il versore normale è

$$N = B \wedge T = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$$

NOTA: La curva non è parametrizzata mediante ascissa curvilinea

2. La curva è curva biregolare con

$$\varphi'(t) = (-1, 1-2t, 1), \quad \varphi''(t) = (0, -2, 0) \quad \text{e} \quad \varphi'''(t) = (0, 0, 0)$$

Dunque

$$\varphi'(t) \wedge \varphi''(t) = (2, 0, 2)$$

ed il versore binormale è

$$B(t) = \frac{\varphi'(t) \wedge \varphi''(t)}{\|\varphi'(t) \wedge \varphi''(t)\|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

Essendo il versore binormale costante ne deduciamo che la curva è curva piana. In alternativa, per provare che la curva è piana si poteva osservare che la torsione è nulla essendo

$$\tau(t) = -\frac{\varphi'(t) \wedge \varphi''(t) \cdot \varphi'''(t)}{\|\varphi'(t) \wedge \varphi''(t)\|} = \frac{(2, 0, 2) \cdot (0, 0, 0)}{2\sqrt{2}} = 0$$

(NOTA: La curva non è parametrizzata mediante ascissa curvilinea).
Essendo la curva piana, il piano su cui giace la curva è il piano osculatore in un generico punto della curva $\varphi(t_0)$ ovvero il piano ortogonale al versore binormale $B(t_0)$ passante per $\varphi(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ di equazione generica

$$B(t_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

Essendo $B(t) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ per ogni $t \in [0, 2]$ e scegliendo $t_0 = 1$, avremo $\varphi(1) = (0, -1, 1)$ e dunque il piano della curva ha equazione

$$B(1) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \iff (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) \cdot (x, y + 1, z - 1) = 0 \iff x + z - 1 = 0$$

3. **(a)** La curva $\varphi(t) = (t^2, t^3, t^2)$ è di classe $\mathcal{C}^1$ in $[0, 1]$ ed essendo $\varphi'(t) = (2t, 3t^2, 2t) \neq (0, 0, 0)$ per ogni $t \in (0, 1)$, la curva risulta regolare in $[0, 1]$. La curva è semplice poichè se $t_1 \neq t_2$ allora $t_1^3 \neq t_2^3$ e quindi $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$. La curva non è chiusa essendo $\varphi(0) = (0, 0, 0) \neq (1, 1, 1) = \varphi(1)$.

(b) Essendo di classe $\mathcal{C}^1$, la lunghezza della curva è data da

$$L(\varphi) = \int_0^1 \|\varphi'(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{8t^2 + 9t^4} dt = \int_0^1 t\sqrt{8 + 9t^2} dt$$
$$= \frac{1}{18}\left[\frac{(8+9t^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{27}(17\sqrt{17} - 8\sqrt{8})$$

4. La curva è semplice poichè se $t_1 \neq t_2$, $t_1, t_2 \in [0, 2\pi)$, allora $\cos t_1 \neq \cos t_2$ oppure $\sin t_1 \neq \sin t_2$ e dunque $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$. Inoltre $\varphi(0) = (2, 0, -3) = \varphi(2\pi)$, dunque la curva è chiusa. Per provare che la curva è piana determiniamo il versore binormale. La curva è di classe $\mathcal{C}^3$ con

$$\varphi'(t) = (-2\sin t, \cos t, 2\cos t + 2\sin t),\ \ \varphi''(t) = (-2\cos t, -\sin t,\ -2\sin t + 2\cos t)$$

e

$$\varphi'''(t) = (2\sin t, -\cos t, -2\cos t - 2\sin t).$$

Dunque

$$\varphi'(t) \wedge \varphi''(t) = (2, -4, 2)$$

ed il versore binormale è

$$B(t) = \frac{\varphi'(t) \wedge \varphi''(t)}{\|\varphi'(t) \wedge \varphi''(t)\|} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$$

Essendo il versore binormale costante ne deduciamo che la curva è curva piana. In alternativa, per provare che la curva è piana si poteva osservare che la torsione è nulla essendo

$$\tau(t) = -\frac{\varphi'(t) \wedge \varphi''(t) \cdot \varphi'''(t)}{\|\varphi'(t) \wedge \varphi''(t)\|} = 0$$

Essendo la curva piana, il piano su cui giace la curva è il piano osculatore in un generico punto della curva $\varphi(t_0)$ ovvero il piano ortogonale al versore binormale $B(t_0)$ passante per $\varphi(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ di equazione generica

$$B(t_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

Essendo $B(t) = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$ per ogni $t \in [0, 2\pi]$ e scegliendo $t_0 = 0$, avremo $\varphi(0) = (2, 0, -3)$ e dunque il piano della curva ha equazione

$$B(0)\cdot(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \Leftrightarrow (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})\cdot(x-2, y, z+3) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + z + 1 = 0$$

5. La curva è di classe $\mathcal{C}^3$ in $[-\pi, \pi]$ con

$$\varphi'(t) = (\cos t, -\sin t, 2t), \quad \varphi''(t) = (-\sin t, -\cos t, 2) \quad \text{e} \quad \varphi'''(t) = (-\cos t, \sin t, 0)$$

Dunque, essendo $\|\varphi'(t)\| = \sqrt{1+4t^2} > 0$ e $\|\varphi''(t)\| = \sqrt{5} > 0$ per ogni $t \in (-\pi, \pi)$, si ha che la curva risulta regolare e biregolare.
La curva risulta chiusa essendo $\varphi(\pi) = (0, -1, \pi^2) = \varphi(-\pi)$. La curva risulta inoltre semplice poichè se $t_1, t_2 \in (-\pi, \pi]$ sono tali che $t_1 \neq t_2$ allora $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$, poichè se $\sin t_1 = \sin t_2$ allora $t_1 t_2 \geq 0$ e $t_1^2 \neq t_2^2$.
In $\varphi(0) = (0, 1, 0)$ abbiamo

$$\varphi'(0) = (1, 0, 0), \quad \varphi''(0) = (0, -1, 2) \quad \text{e} \quad \varphi'''(0) = (-1, 0, 0)$$

quindi il versore tangente è dato da

$$T(0) = \frac{\varphi'(0)}{\|\varphi'(0)\|} = (1, 0, 0),$$

il versore binormale è

$$B(0) = \frac{\varphi'(0) \wedge \varphi''(0)}{\|\varphi'(t0) \wedge \varphi''(0)\|} = (0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$$

ed il versore normale è

$$N(0) = B(0) \wedge T(0) = (0, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$$

Il piano osculatore per $\varphi(0)$ è il piano ortogonale al versore binormale $B(0)$ passante per $\varphi(0) = (0, 1, 0)$ di equazione

$$B(0) \cdot (x, y-1, z) = 0 \Longleftrightarrow 2(y-1) + z = 0 \Longleftrightarrow 2y + z = 2$$

Derivabilità e differenziabilità per funzioni di due variabili

1. Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2 - x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,

a) Stabilire se è continua in $(0,0)$.

b) Calcolarne, se esistono, le derivate parziali in $(0,0)$.

c) Stabilire se è differenziabile in $(0,0)$.

2. Data la funzione $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$,

a) Stabilire se è derivabile nel suo dominio.

b) Determinare, se esiste, la derivata lungo la direzione $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ nel punto $(0,0)$.

c) Stabilire se è differenziabile nel suo dominio.

3. Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\arctan\frac{1}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,

a) Stabilire se è continua in $(0,0)$.

b) Calcolarne, se esistono, le derivate parziali in $(0,0)$.

c) Stabilire se è differenziabile in $(0,0)$.

4. Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \frac{8y^3 - x^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,

a) Stabilire se è continua in $(0,0)$.

b) Calcolarne, se esistono, le derivate parziali in $(0,0)$.

c) Stabilire se esiste un versore $\lambda \in \mathbb{R}^2$ tale che $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0,0) = 0$.

5. Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^2 - y^3}{x^2+2y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,

a) Stabilire se è continua in $(0,0)$.

b) Calcolarne le derivate parziali e la derivata nella direzione $\mathbf{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ in $(0,0)$.

c) Stabilire se è differenziabile in $(0,0)$.

6. Data la funzione $f(x,y) = \log(1+|xy|)$,

a) Stabilire dove risulta derivabile nel suo dominio e calcolarne le derivate parziali.

b) Determinarne, se esiste, la derivata lungo la direzione $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ nel punto $(0,0)$.

7. Data la funzione $f(x,y) = \sqrt{|x^2 - y^2|}$,

a) stabilire dove risulta derivabile nel suo dominio e calcolarne le derivate parziali,

b) determinare per quali versori $\nu \in \mathbb{R}^2$ esiste $\dfrac{\partial f}{\partial \nu}(0,0)$.

8. Data la funzione $f(x,y) = |x - y^2|$,

a) stabilire dove risulta derivabile nel suo dominio e calcolarne le derivate parziali,

b) determinare per quali versori $\nu \in \mathbb{R}^2$ esiste $\dfrac{\partial f}{\partial \nu}(0,0)$.

9. Data la funzione $f(x,y) = |y - 2x| \log(1+x)$,

a) stabilire se risulta derivabile nel suo dominio e calcolarne le derivate parziali,

b) stabilire se risulta differenziabile in $(0,0)$.

Risoluzione

1. **(a)** Per calcolare $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, passando alle coordinate polari, calcoliamo innanzitutto $\lim_{\rho\to 0^+} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Abbiamo

$$\lim_{\rho\to 0^+} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \lim_{\rho\to 0^+} \rho(\cos\theta\sin^2\theta - \cos^2\theta\sin\theta) = 0, \quad \forall\theta \in [0, 2\pi].$$

Inoltre il limite risulta uniforme rispetto a $\theta \in [0, 2\pi]$ essendo

$$|\rho(\cos\theta\sin^2\theta - \cos^2\theta\sin\theta)| \leq 2\rho, \quad \forall\theta \in [0, 2\pi].$$

Quindi risulta $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ e dunque la funzione è continua in $(0,0)$.

(b) Poichè $f(x,0) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, la funzione risulta derivabile parzialmente rispetto ad x in $(0,0)$ con $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Analogalmente, essendo $f(0,y) = 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, la funzione risulta derivabile parzialmente rispetto ad y in $(0,0)$ con $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

(c) Dobbiamo verificare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

A tale scopo, passando alle coordinate polari, calcoliamo $\lim_{\rho\to 0^+} \frac{f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)}{\rho}$. Abbiamo

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)}{\rho} = \lim_{\rho\to 0^+} (\cos\theta\sin^2\theta - \cos^2\theta\sin\theta) = \cos\theta\sin^2\theta - \cos^2\theta\sin\theta$$

Ne segue che il limite sopra non esiste e dunque che la funzione non è differenziabile in $(0,0)$.

2. (a) La funzione data risulta definita e continua in tutto $\mathbb{R}^2$. Inoltre, essendo

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{xy} & \text{se } xy \geq 0 \\ \sqrt{-xy} & \text{se } xy < 0 \end{cases}$$

possiamo dire che la funzione risulta derivabile parzialmente in ogni punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tale che $x_0y_0 \neq 0$ con

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{y_0}{2\sqrt{x_0y_0}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{x_0}{2\sqrt{x_0y_0}} \quad \text{se } x_0y_0 > 0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{-y_0}{2\sqrt{-x_0y_0}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{-x_0}{2\sqrt{-x_0y_0}} \quad \text{se } x_0y_0 < 0$$

Rimane da discutere la derivabilità nei punti degli assi cartesiani.
Nell'origine del piano si ha che la funzione risulta derivabile parzialmente infatti, essendo $f(x,0) = f(0,y) = 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, si ha che $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
La funzione non risulta invece derivabile parzialmente nei restanti punti degli assi. Infatti, nel punto $(x_0, 0)$ con $x_0 \neq 0$ avremo che la funzione risulta derivabile parzialmente rispetto ad x con $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) = 0$, essendo $f(x,0) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, mentre non risulta derivabile parzialmente rispetto ad y essendo

$$\lim_{h\to 0^\pm} \frac{f(x_0,h) - f(x_0,0)}{h} = \lim_{h\to 0\pm} \frac{\sqrt{|x_0h|}}{h} = \sqrt{|x_0|} \lim_{h\to 0\pm} \frac{\sqrt{|h|}}{h} = \pm\infty$$

Analogalmente, nel punto $(0, y_0)$ con $y_0 \neq 0$ avremo che la funzione risulta derivabile parzialmente rispetto ad y con $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y_0) = 0$, essendo $f(0,y) = 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, mentre non risulta derivabile parzialmente rispetto ad x.

(b) La funzione non ammette derivata lungo la direzione $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ nel punto $(0,0)$ in quanto

$$\lim_{h\to 0^\pm} \frac{f(\frac{h}{\sqrt{2}}, \frac{h}{\sqrt{2}}) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0\pm} \frac{\sqrt{\frac{h^2}{2}}}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{h\to 0\pm} \frac{|h|}{h} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(c) Dal Teorema del differenziale e da quanto ottenuto in (a) possiamo affermare che la funzione risulta differenziabile in ogni punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tale che $x_0 y_0 \neq 0$ poichè risulta derivabile parzialmente con derivate parziali continue.
Non risulta invece differenziabile nel punto $(0,0)$ poichè, per quanto provato in (b), non ammette derivata direzionale nella direzione $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. In alternativa, dalla definizione, abbiamo che non risulta differenziabile in $(0,0)$ in quanto $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} \neq 0$. Infatti, passando alle coordinate polari, abbiamo

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) - f(0,0)}{\rho} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\sqrt{\rho^2 |\cos\theta\sin\theta|}}{\rho} = \sqrt{|\cos\theta\sin\theta|}, \quad \forall\theta \in [0, 2\pi]$$

e dunque non esiste il limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
Infine la funzione non risulta differenziabile nei restanti punti degli assi cartesiani non essendo ivi derivabile parzialmente.

3. (a) La funzione è continua in $(0,0)$ essendo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Infatti, utilizzando le coordinate polari, abbiamo

$$\lim_{\rho\to 0^+} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \lim_{\rho\to 0^+} \rho^2 \arctan\frac{1}{\rho^2} = 0 \quad \forall\theta \in [0, 2\pi]$$

ed il limite è uniforme rispetto a θ essendo $f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^2 \arctan\frac{1}{\rho^2}$ funzione del solo raggio ρ.

(b) La funzione risulta derivabile parzialmente in $(0,0)$, infatti si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \arctan\frac{1}{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} h \arctan\frac{1}{h^2} = 0$$

e analogalmente

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{h} = \lim_{k\to 0} \frac{k^2 \arctan\frac{1}{k^2}}{k} = 0$$

(c) La funzione risulta differenziabile in $(0,0)$ in quanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)\arctan\frac{1}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} \arctan\frac{1}{x^2+y^2} = 0$$

4. (a) La funzione è continua in $(0,0)$ essendo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Infatti, passando alle coordinate polari, abbiamo

$$\lim_{\rho\to 0^+} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{8\rho^3 \sin^3\theta - \rho^3\cos^3\theta}{\rho^2} = 0 \quad \forall\theta \in [0, 2\pi]$$

ed il limite è uniforme rispetto a θ in quanto

$$|f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)| = |\frac{8\rho^3\sin^3\theta - \rho^3\cos^3\theta}{\rho^2}| = \rho|8\sin^3\theta - \cos^3\theta| \leq 9\rho \quad \forall\theta\in[0,2\pi]$$

(b) La funzione risulta derivabile parzialmente in $(0,0)$, infatti essendo $f(x,0) = -x$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, si ha che $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -1$ mentre essendo $f(0,y) = 8y$ per ogni $y\in\mathbb{R}$, si ha che $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 8$.

(c) La funzione ammette derivata lungo ogni direzione $\mathbf{v} = (\alpha,\beta)$ nel punto $(0,0)$ con

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\alpha h,\beta h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{8\beta^3h^3-\alpha^3h^3}{h^2}}{h} = 8\beta^3 - \alpha^3$$

Avremo che allora che $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$ se e solo se $8\beta^3 = \alpha^3$ da cui, essendo $\alpha^2+\beta^2 = 1$, si ottiene $\alpha = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$ e $\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. Dunque i versori $\mathbf{v}_+ = (\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}})$ e $\mathbf{v}_- = (-\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}})$ sono tali che $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}_\pm}(0,0) = 0$.

5. **(a)** Proviamo che $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$. A tale scopo, passando alle coordinate polari, calcoliamo $\lim\limits_{\rho\to 0^+} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$. Abbiamo

$$\lim_{\rho\to 0^+} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) = \lim_{\rho\to 0^+}\rho\frac{2\cos\theta\sin^2\theta - \sin^3\theta}{\cos^2\theta + 2\sin^2\theta} = 0, \quad \forall\theta\in[0,2\pi].$$

Inoltre il limite risulta uniforme rispetto a $\theta\in[0,2\pi]$ essendo

$$|\rho\frac{2\cos\theta\sin^2\theta - \sin^3\theta}{\cos^2\theta + 2\sin^2\theta}| \leq \rho\frac{\sin^2\theta(2|\cos\theta| + |\sin\theta|)}{1+\sin^2\theta} \leq 3\rho, \quad \forall\theta\in[0,2\pi].$$

Quindi risulta $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ e dunque la funzione è continua in $(0,0)$.

(b) Poichè $f(x,0) = 0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, la funzione risulta derivabile parzialmente rispetto ad x in $(0,0)$ con $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Mentre, essendo $f(0,y) = -\frac{y}{2}$ per ogni $y\in\mathbb{R}$, la funzione risulta derivabile parzialmente rispetto ad y in $(0,0)$ con $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -\dfrac{1}{2}$. Infine la funzione risulta derivabile in $(0,0)$ nella direzione $\mathbf{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ essendo

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\frac{h}{\sqrt{2}},\frac{h}{\sqrt{2}}) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{\sqrt{2}} - \frac{h^3}{2\sqrt{2}}}{h(\frac{h^2}{2}+h^2)} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

(c) Da quanto ottenuto sopra e dal Teorema sulla derivata direzionale possiamo concludere che la funzione non risulta differenziabile in $(0,0)$ in quanto

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,0) = \frac{1}{3\sqrt{2}} \neq \nabla f(0,0)\cdot\mathbf{v} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

In alternativa, utilizzando la definizione, proviamo che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{2xy^2-y^3}{x^2+2y^2}+\frac{y}{2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \neq 0.$$

Infatti, passando alle coordinate polari, abbiamo

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho\frac{2\cos\theta\sin^2\theta-\sin^3\theta}{\cos^2\theta+2\sin^2\theta}+\frac{\rho\sin\theta}{2}}{\rho} = \frac{2\cos\theta\sin^2\theta-\sin^3\theta}{\cos^2\theta+2\sin^2\theta}+\frac{\sin\theta}{2}$$

Ne segue che non esiste il limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e dunque che la funzione non è differenziabile in $(0,0)$.

6. (a) La funzione data risulta definita e continua in tutto $\mathbb{R}^2$. Inoltre, essendo

$$f(x,y) = \begin{cases} \log(1+xy) & \text{se } xy \geq 0 \\ \log(1-xy) & \text{se } xy < 0 \end{cases}$$

possiamo dire che la funzione risulta derivabile parzialmente in ogni punto $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ tale che $x_0y_0 \neq 0$ con

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{y_0}{1+x_0y_0} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{x_0}{1+x_0y_0} \quad \text{se } x_0y_0>0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{-y_0}{1-x_0y_0} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{-x_0}{1-x_0y_0} \quad \text{se } x_0y_0<0$$

Rimane da discutere la derivabilità nei punti degli assi cartesiani.

Nell'origine del piano si ha che la funzione risulta derivabile parzialmente infatti, essendo $f(x,0)=f(0,y)=0$ per ogni $x,y\in\mathbb{R}$, si ha che $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

La funzione non risulta invece derivabile parzialmente nei restanti punti degli assi. Infatti, nel punto $(x_0,0)$ con $x_0\neq 0$ avremo che la funzione risulta derivabile parzialmente rispetto ad x con $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)=0$, essendo $f(x,0)=0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, mentre non risulta derivabile parzialmente rispetto ad y essendo

$$\lim_{h\to 0^\pm} \frac{f(x_0,h)-f(x_0,0)}{h} = \lim_{h\to 0\pm} \frac{\log(1+|x_0h|)}{h} = |x_0| \lim_{h\to 0\pm} \frac{|h|}{h} = \pm|x_0|$$

Analogalmente, nel punto $(0,y_0)$ con $y_0\neq 0$ avremo che la funzione risulta derivabile parzialmente rispetto ad y con $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y_0)=0$, essendo $f(0,y)=0$ per ogni $y\in\mathbb{R}$, mentre non risulta derivabile parzialmente rispetto ad x.

(b) La funzione ammette derivata lungo la direzione $\nu=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ nel punto $(0,0)$ con $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0,0)=0$ in quanto

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\frac{h}{\sqrt{2}},\frac{h}{\sqrt{2}})-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log(1+\frac{h^2}{2})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{2} = 0$$

7. **(a)** La funzione data risulta definita e continua in tutto $\mathbb{R}^2$. Inoltre, essendo

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - y^2} & \text{se } |x| \geq |y| \\ \sqrt{y^2 - x^2} & \text{se } |x| < |y| \end{cases}$$

possiamo affermare che la funzione risulta derivabile parzialmente in ogni punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tale che $|x_0| \neq |y_0|$ con

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - y_0^2}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 - y_0^2}} \quad \text{se } |x_0| > |y_0|$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{x_0}{\sqrt{y_0^2 - x_0^2}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{y_0}{\sqrt{y_0^2 - x_0^2}} \quad \text{se } |x_0| < |y_0|$$

Rimane da discutere la derivabilità nei punti delle bisettrici $y = \pm x$.
Nell'origine del piano si ha che la funzione non risulta derivabile parzialmente rispetto ad x e ad y poichè non esistono i limiti

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

La funzione non risulta inoltre derivabile parzialmente nei restanti punti delle bisettrici $y = \pm x$. Infatti, nel punto $(x_0, \pm x_0)$, con $x_0 \neq 0$ avremo che la funzione non risulta derivabile parzialmente rispetto ad x e ad y poichè non esistono i limiti

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, \pm x_0) - f(x_0, \pm x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{|2hx_0 + h^2|}}{h} = \sqrt{|2x_0|} \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{|h|}}{h}$$

e

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, \pm x_0 + h) - f(x_0, \pm x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{|\pm 2hx_0 + h^2|}}{h} = \sqrt{|2x_0|} \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{|h|}}{h}$$

(b) La funzione ammette derivata lungo la direzione $\nu = (\alpha, \beta)$ nel punto $(0,0)$ se esiste finito il limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\alpha h, \beta h) - f(0,0)}{h} = \sqrt{|\alpha^2 - \beta^2|} \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

e quindi se e solo se risulta $\alpha^2 = \beta^2$. Dunque la funzione risulta derivabile in $(0,0)$ solo lungo le direzioni $\nu_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\nu_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\nu_3 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $\nu_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ per le quali risulta $\dfrac{\partial f}{\partial \nu_i}(0,0) = 0$.

8. **(a)** La funzione data risulta definita e continua in tutto $\mathbb{R}^2$. Inoltre, essendo

$$f(x,y) = \begin{cases} x - y^2 & \text{se } x \geq y^2 \\ y^2 - x & \text{se } x < y^2 \end{cases}$$

possiamo affermare che la funzione risulta derivabile parzialmente in ogni punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tale che $x_0 \neq y_0^2$ con

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -2y_0 \quad \text{se } x_0 > y_0^2$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 2y_0 \quad \text{se } x_0 < y_0^2$$

Rimane da discutere la derivabilità nei punti della parabola $x = y^2$.
Nell'origine del piano si ha che la funzione non risulta derivabile parzialmente rispetto ad x poichè non esiste i limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

mentre risulta derivabile parzialmente rispetto ad y con

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h} = 0$$

La funzione non risulta inoltre derivabile parzialmente nei restanti punti della parabola $x = y^2$. Infatti, nel punto (y_0^2, y_0), con $y_0 \neq 0$ avremo che la funzione non risulta derivabile parzialmente rispetto ad x e ad y poichè non esistono i limiti

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(y_0^2 + h, y_0) - f(y_0^2, y_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|y_0^2 + h - y_0^2|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

e

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(y_0^2, y_0 + h) - f(y_0^2, y_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|y_0^2 - (y_0 + h)^2|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h||2y_0 + h|}{h} = |2y_0| \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

(b) La funzione ammette derivata lungo la direzione $\nu = (\alpha, \beta)$ nel punto $(0, 0)$ se esiste finito il limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\alpha h, \beta h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|\alpha h - (\beta h)^2|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|\,|\alpha - \beta^2 h|}{h} = |\alpha| \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

e quindi se e solo se risulta $\alpha = 0$. Dunque la funzione risulta derivabile in $(0, 0)$ solo lungo le direzioni $\nu_\pm = (0, \pm 1)$ per le quali risulta $\dfrac{\partial f}{\partial \nu_\pm}(0, 0) = 0$.

9. **(a)** La funzione data risulta definita e continua nel suo dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > -1\}$. Inoltre, essendo

$$f(x, y) = \begin{cases} (y - 2x) \log(1 + x) & \text{se } y \geq 2x \\ (2x - y) \log(1 + x) & \text{se } y < 2x \end{cases}$$

possiamo affermare che la funzione risulta derivabile parzialmente in ogni punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tale che $y_0 \neq 2x_0$ con

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -2\log(1+x_0) + \frac{y_0 - 2x_0}{1+x_0} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \log(1+x_0) \quad \text{se } y_0 > 2x_0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2\log(1+x_0) + \frac{2x_0 - y_0}{1+x_0} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -\log(1+x_0) \quad \text{se } y_0 < 2x_0$$

Rimane da discutere la derivabilità nei punti della retta $y = 2x$.
Nell'origine del piano si ha che la funzione risulta derivabile parzialmente rispetto ad x con

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|2h|\log(1+h)}{h} = \lim_{h\to 0} |2h| = 0$$

e risulta derivabile parzialmente rispetto ad y essendo $f(0,y) = 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}$ e dunque

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

La funzione non risulta derivabile parzialmente nei restanti punti della retta $y = 2x$. Infatti, nel punto $(x_0, 2x_0)$, con $x_0 \neq 0$ avremo che la funzione non risulta derivabile parzialmente rispetto ad x e ad y poichè non esistono i limiti

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, 2x_0) - f(x_0, 2x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|2h|\log(1+x_0+h)}{h} = \log(1+x_0) \lim_{h\to 0} \frac{|2h|}{h}$$

e

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, 2x_0+k) - f(x_0, 2x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|k|\log(1+x_0)}{k} = \log(1+x_0) \lim_{k\to 0} \frac{|k|}{k}$$

(b) La funzione risulta derivabile parzialmente in $(0,0)$ inoltre

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|h-2k|\log(1+h)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

e passando alle coordinate polari abbiamo per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$ tale che $\sin\theta \neq 2\cos\theta$,

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{|\rho\cos\theta - 2\rho\sin\theta|\log(1+\rho\cos\theta)}{\rho} = \lim_{\rho\to 0^+} \log(1+\rho\cos\theta)|\cos\theta - 2\sin\theta| = 0$$

ed il limite risulta uniforme rispetto a θ. Infatti, poichè $\frac{\log(1+w)}{w} \to 1$ per $w \to 0$, esiste $\delta > 0$ tale che per $|w| < \delta$ risulta $0 < \frac{\log(1+w)}{w} < 2$ e dunque per $0 < \rho < \delta$ si ha

$$\begin{aligned} |\log(1+\rho\cos\theta)|\cos\theta - 2\sin\theta|| &= \left|\frac{\log(1+\rho\cos\theta)}{\rho\cos\theta}\right| |\rho\cos\theta||\cos\theta - 2\sin\theta| \\ &\leq 2|\rho\cos\theta||\cos\theta - 2\sin\theta| \leq 6\rho \end{aligned}$$

per ogni θ. Quindi

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Ricerca di massimi e minimi liberi e su domini ristretti

1. Data la funzione $f(x,y) = e^{y^2-x^2}$

a) Determinarne massimi e minimi relativi nel suo dominio.

b) Determinarne massimi e minimi assoluti nel triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.

2. Data la funzione $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{x-y}$

a) Determinarne massimi e minimi relativi nel suo dominio.

b) Determinarne massimi e minimi assoluti nel triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$.

3. Data la funzione $f(x,y) = x^2+y^2+xy+3x$,

a) Determinarne massimi e minimi relativi nel suo dominio.

b) Determinarne massimi e minimi assoluti in $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{|x|}{2} \leq y \leq 1\}$.

4. Data la funzione $f(x,y) = x(y+1)e^{x-y}$,

a) Determinare, se esistono, massimi e minimi relativi nel suo dominio.

b) Scrivere l'equazione del piano tangente nel punto $P(1,0)$

5. Data la funzione $f(x,y) = x^2+2y^2$,

a) Determinarne, se esistono, massimi e minimi relativi nel suo dominio.

b) Determinarne i punti di massimo e di minimo assoluti nell'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 1, y \geq 0\}.$$

6. Data la funzione $f(x,y) = e^{(x+1)^2+(y-1)^2}$,

a) Determinarne, se esistono, massimi e minimi relativi nel suo dominio.

b) Determinarne i punti di massimo e di minimo assoluti nell'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}.$$

7. Data la funzione $f(x,y) = x^2 - \log\dfrac{x}{y} + y$

a) determinarne, se esistono, massimi e minimi relativi nel suo dominio,

b) determinarne massimi e minimi assoluti sul triangolo di vertici $(1,1)$, $(2,1)$ e $(2,2)$.

8. Data la funzione $f(x,y) = e^{xy-y^2}$,

a) determinarne, se esistono, massimi e minimi relativi nel suo dominio,

b) determinarne massimi e minimi assoluti nel dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq y,\ 0 \leq x\}$$

.

9. Data la funzione $f(x,y) = e^{xy-x^2}$,

a) determinarne, se esistono, massimi e minimi relativi nel suo dominio,

b) determinarne massimi e minimi assoluti nel dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq y,\ 0 \leq x\}$$

.

10. Data la funzione $f(x,y) = (3y-1)\log(2+x)$

a) Determinarne il dominio.

b) Determinarne, se esistono, massimi e minimi relativi nel suo dominio.

c) Determinarne massimi e minimi assoluti nell'insieme

$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}.$$

11. Data la funzione $f(x,y) = (2x+1)\log(3-y)$

a) Determinarne il dominio.

b) Determinarne, se esistono, massimi e minimi relativi nel suo dominio.

c) Determinarne massimi e minimi assoluti nell'insieme

$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}.$$

Risoluzione

1. **(a)** La funzione risulta definita e di classe $\mathcal{C}^2$ su tutto $\mathbb{R}^2$. Ne segue che gli eventuali punti di massimi e minimi relativi saranno punti stazionari della funzione. I punti stazionari sono le soluzione del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2xe^{y^2-x^2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2ye^{y^2-x^2} = 0 \end{cases}$$

che ammette come unica soluzione il punto $O(0,0)$. Per determinare la natura di tale punto stazionario valutiamo il determinante Hessiano. Essendo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = (-2+4x^2)e^{y^2-x^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -4xye^{y^2-x^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (2+4y^2)e^{y^2-x^2}$$

risulta

$$Hf(0,0) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

Quindi $O(0,0)$ non è né punto di massimo nè punto di minimo e dunque la funzione non ammette massimi e minimi relativi nel suo dominio.

(b) Essendo la funzione continua sul triangolo chiuso e limitato T, dal Teorema di Weierstrass la funzione ammette massimo e minimo assoluto in T. Per quanto provato nel precedente punto, la funzione non ammette punti stazionari interni al triangolo T, dunque massimo e minimo assoluti dovranno necessariamente appartenere alla frontiera ∂T. Abbiamo che $f(x,0) = e^{-x^2}$ è funzione decrescente in $[0,1]$, quindi

$$\max_{x\in[0,1]} f(x,0) = f(0,0) = 1 \quad \text{e} \quad \min_{x\in[0,1]} f(x,0) = f(1,0) = \frac{1}{e}.$$

Inoltre $f(0,y) = e^{y^2}$ è funzione crescente in $[0,1]$, quindi

$$\max_{y\in[0,1]} f(0,y) = f(0,1) = e \quad \text{e} \quad \min_{y\in[0,1]} f(0,y) = f(0,0) = 1.$$

Infine, $f(x, 1-x) = e^{1-2x}$ è funzione decrescente in $[0,1]$, quindi

$$\max_{x\in[0,1]} f(x,1-x) = f(0,1) = e \quad \text{e} \quad \min_{x\in[0,1]} f(x,1-x) = f(1,0) = \frac{1}{e}.$$

Riunendo quanto ottenuto, risulta che punto di massimo assoluto è $(0,1)$ e punto di minimo assoluto è $(1,0)$.

2. (a) La funzione risulta definita e di classe $\mathcal{C}^2$ su tutto $\mathbb{R}^2$. Ne segue che gli eventuali punti di massimi e minimi relativi saranno punti stazionari della funzione. I punti stazionari sono le soluzione del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2x + x^2 + y^2)e^{x-y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (2y - x^2 - y^2)e^{x-y} = 0 \end{cases}$$

che ammette come soluzioni il punto $O(0,0)$ e $P(-1,1)$. Per determinare la natura di tali punti stazionari valutiamo il determinante Hessiano. Essendo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = (2 + 4x + x^2 + y^2)e^{x-y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -(2x - 2y + x^2 + y^2)e^{x-y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (2 - 4y + x^2 + y^2)e^{x-y}$$

risulta

$$Hf(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

Quindi $O(0,0)$ è punto di minimo relativo con $f(0,0) = 0$. Mentre risulta

$$Hf(-1,1) = \begin{vmatrix} 0 & 2e^{-2} \\ 2e^{-2} & 0 \end{vmatrix} = -4e^{-4}$$

Quindi $P(-1,1)$ non è nè punto di massimo nè punto di minimo. Dunque la funzione ammette un solo punto di minimo relativo e nessun punto di massimo relativo nel suo dominio.

(b) Essendo la funzione continua sul triangolo chiuso e limitato T, dal Teorema di Weierstrass la funzione ammette massimo e minimo assoluto in T. Per quanto provato nel precedente punto, la funzione non ammette punti stazionari interni al triangolo T, dunque massimo e minimo assoluti dovranno necessariamente appartenere alla frontiera ∂T. Abbiamo che $f(x,0) = x^2e^x$ è funzione crescente in $[0,1]$, quindi

$$\max_{x\in[0,1]} f(x,0) = f(1,0) = e \quad \text{e} \quad \min_{x\in[0,1]} f(x,0) = f(0,0) = 0.$$

Inoltre $f(x,x) = 2x^2$ è funzione crescente in $[0,1]$, quindi

$$\max_{x\in[0,1]} f(x,x) = f(1,1) = 2 \quad \text{e} \quad \min_{x\in[0,1]} f(x,x) = f(0,0) = 0.$$

Infine, $f(1,y) = (1 + y^2)e^{1-y}$ è funzione decrescente in $[0,1]$, quindi

$$\max_{y\in[0,1]} f(1,y) = f(1,0) = e \quad \text{e} \quad \min_{y\in[0,1]} f(1,y) = f(1,1) = 2.$$

Riunendo quanto ottenuto, risulta che punto di massimo assoluto è $(1,0)$ e punto di minimo assoluto è $(0,0)$.

3. **(a)** La funzione risulta definita e di classe $\mathcal{C}^2$ su tutto $\mathbb{R}^2$. Ne segue che gli eventuali punti di massimo e minimo relativi saranno punti stazionari della funzione. I punti stazionari sono le soluzione del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y + 3 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + x = 0 \end{cases}$$

che ammette come unica soluzione il punto $P(-2,1)$. Per determinare la natura di tale punto stazionario valutiamo il determinante Hessiano. Essendo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$$

risulta

$$Hf(-2,1) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

Quindi $P(-2,1)$ è punto di minimo relativo con $f(-2,1) = -3$.

(b) Osserviamo innanzitutto che A è un triangolo chiuso di vertici i punti $O(0,0)$, $P(-2,1)$ e $Q(2,1)$. Essendo la funzione continua sull'insieme chiuso e limitato A, dal Teorema di Weierstrass la funzione ammette massimo e minimo assoluto in A. Per quanto provato nel precedente punto, la funzione non ammette punti stazionari interni al triangolo A, dunque massimo e minimo assoluti dovranno necessariamente appartenere alla frontiera ∂A. Abbiamo che $f(x,1) = x^2 + 4x + 1$ è funzione crescente in $[-2,2]$, quindi

$$\max_{x \in [-2,2]} f(x,1) = f(2,1) = 13 \quad \text{e} \quad \min_{x \in [-2,2]} f(x,1) = f(-2,1) = -3.$$

Inoltre $f(x, \frac{x}{2}) = \frac{7}{4}x^2 + 3x$ è funzione crescente in $[0,2]$, quindi

$$\max_{x \in [0,2]} f(x, \frac{x}{2}) = f(2,1) = 13 \quad \text{e} \quad \min_{x \in [0,2]} f(x, \frac{x}{2}) = f(0,0) = 0.$$

Infine, $f(x, -\frac{x}{2}) = \frac{3}{4}x^2 + 3x$ è funzione crescente in $[-2,0]$, quindi

$$\max_{x \in [-2,0]} f(x, -\frac{x}{2}) = f(0,0) = 0 \quad \text{e} \quad \min_{x \in [-2,0]} f(x, -\frac{x}{2}) = f(-2,1) = -3.$$

Riunendo quanto ottenuto, risulta che punto di massimo assoluto è $Q(2,1)$ e punto di minimo assoluto è $P(-2,1)$.

4. **(a)** La funzione risulta definita e di classe $\mathcal{C}^2$ su tutto $\mathbb{R}^2$. Ne segue che gli eventuali punti di massimo e di minimo relativi saranno punti stazionari della funzione. I punti stazionari sono tutte e sole le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (y+1)(x+1)e^{x-y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -xye^{x-y} = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (x+1)(y+1) = 0 \\ xy = 0 \end{cases}$$

che ammette come soluzioni i punti $P_1(-1,0)$ e $P_2(0,-1)$. Per determinare la natura di tali punti stazionari valutiamo il determinante hessiano. Essendo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = (y+1)(x+2)e^{x-y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -y(x+1)e^{x-y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x(y-1)e^{x-y}$$

risulta

$$Hf(-1,0) = \begin{vmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{vmatrix} = e^{-2} > 0$$

ed essendo $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0) = e^{-1} > 0$, otteniamo che $P_1(-1,0)$ è punto di minimo relativo. Mentre essendo

$$Hf(0,-1) = \begin{vmatrix} 0 & e \\ e & 0 \end{vmatrix} = -e^2 < 0$$

otteniamo che $P_2(0,1)$ non è nè punto di massimo nè punto di minimo relativo. Ne segue che la funzione ammette un solo punto di minimo relativo e nessun punto di massimo relativo nel suo dominio.

(b) Ricordando che l'equazione del piano tangente al grafico di $f(x,y)$ in (x_0,y_0) è

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0),$$

essendo $f(1,0) = e$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 2e$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0$ otteniamo che

$$z = e + 2e(x-1) = 2e\,x - e$$

è l'equazione del piano tangente cercata.

5. **(a)** La funzione risulta definita e di classe $\mathcal{C}^2$ su tutto $\mathbb{R}^2$. Ne segue che gli eventuali punti di massimi e minimi relativi saranno punti stazionari della funzione. I punti stazionari sono le soluzione del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y = 0 \end{cases}$$

che ammette come unica soluzione il punto $O(0,0)$. Per determinare la natura di tale punto stazionario valutiamo il determinante Hessiano. Essendo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4$$

risulta

$$Hf(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

Quindi $O(0,0)$ è punto di minimo relativo.
In alternativa, osservato che $f(0,0) =$ e che $f(x,y) > 0$ per ogni $(x,y) \neq (0,0)$ si poteva direttamente concludere che $O(0,0)$ è punto di minimo assoluto per $f(x,y)$ in $\mathbb{R}^2$.

(b) Essendo la funzione continua sul dominio chiuso e limitato D, dal Teorema di Weierstrass la funzione ammette massimo e minimo assoluto in D. Per quanto provato nel precedente punto, la funzione non ammette punti stazionari interni a D, dunque massimo e minimo assoluti dovranno necessariamente appartenere alla frontiera ∂D. Abbiamo che $f(x,0) = x^2$ è funzione crescente in $[0,1]$ e decrescente in $[-1,0]$, quindi

$$\min_{x\in[-1,1]} f(x,0) = f(0,0) = 0 \quad \text{e} \quad \max_{x\in[-1,1]} f(x,0) = f(\pm 1, 0) = 1.$$

Una parametrizzazione della restante parte della frontiera ∂D è data da $y = \sqrt{1-x^2}$ con $x \in [-1,1]$. Usando tale parametrizzazione otteniamo $f(x,\sqrt{1-x^2}) = 2 - x^2$, funzione crescente in $[-1,0]$ e decrescente in $[0,1]$, quindi

$$\max_{x\in[-1,1]} f(x,\sqrt{1-x^2}) = f(0,1) = 2 \quad \text{e} \quad \min_{x\in[-1,1]} f(x,\sqrt{1-x^2}) = f(\pm 1, 0) = 1.$$

In alternativa, un'altra parametrizzazione dell'arco di circonferenza della frontiera ∂D è data utilizzando le coordinate polari: $x = \cos\theta$ e $y = \sin\theta$ con $\theta \in [0,\pi]$. Usando tale parametrizzazione otteniamo $f(\cos\theta, \sin\theta) = 1 + \sin^2\theta$, funzione crescente in $[0,\frac{\pi}{2}]$ e decrescente in $[\frac{\pi}{2},\pi]$, quindi

$$\max_{\theta\in[0,\pi]} f(\cos\theta,\sin\theta) = f(0,1) = 2 \quad \text{e} \quad \min_{\theta\in[0,\pi]} f(\cos\theta,\sin\theta) = f(\pm 1, 0) = 1.$$

Riunendo quanto ottenuto, risulta che punto di massimo assoluto è $(0,1)$ e punto di minimo assoluto è $(0,0)$.

6. **(a)** La funzione risulta definita e di classe $\mathcal{C}^2$ su tutto $\mathbb{R}^2$. Ne segue che gli eventuali punti di massimo e minimo relativo saranno punti stazionari della funzione. I punti stazionari sono le soluzione del sistema

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2(3 + 4x + 2x^2)e^{(x+1)^2+(y-1)^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4(x+1)(y-1)e^{(x+1)^2+(y-1)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2(3 - 4y + 2y^2)e^{(x+1)^2+(y-1)^2}$$

risulta

$$Hf(-1,1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Quindi $P(-1,1)$ è punto di minimo relativo. In alternativa era sufficiente osservare che $f(-1,1) = 1$ e che $f(x,y) \geq 1$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Quindi $P(-1,1)$ risulta punto di minimo assoluto.

(b) Essendo la funzione continua sull'insieme chiuso e limitato D, dal Teorema di Weierstrass la funzione ammette massimo e minimo assoluto in D. Per quanto provato nel precedente punto, la funzione non ammette punti stazionari interni a D, dunque massimo e minimo assoluti dovranno necessariamente appartenere alla frontiera ∂D. Abbiamo che $f(x,0) = f(x,2) = e^{(x+1)^2+1}$ è funzione crescente in $[-1,1]$ e quindi

$$\min_{x\in[-1,1]} f(x,0) = f(-1,0) = e \quad \text{e} \quad \max_{x\in[-1,1]} f(x,0) = f(1,0) = e^5.$$

e

$$\min_{x\in[-1,1]} f(x,2) = f(-1,2) = e \quad \text{e} \quad \max_{x\in[-1,1]} f(x,2) = f(1,2) = e^5.$$

Inoltre, $f(-1,y) = e^{(y-1)^2}$ è funzione decrescente in $[0,1]$ e crescente in $[1,2]$, quindi

$$\min_{y\in[0,2]} f(-1,y) = f(-1,1) = 1 \quad \text{e} \quad \max_{y\in[0,2]} f(-1,y) = f(-1,0) = f(-1,2) = e.$$

Analogalmente, $f(1,y) = e^{4+(y-1)^2}$ è funzione decrescente in $[0,1]$ e crescente in $[1,2]$, quindi

$$\min_{y\in[0,2]} f(1,y) = f(1,1) = e^4 \quad \text{e} \quad \max_{y\in[0,2]} f(1,y) = f(1,0) = f(1,2) = e^5.$$

Riunendo quanto ottenuto, risulta che punto di minimo assoluto è $P(-1,1)$ mentre punti di minimo assoluto sono $Q(1,0)$ e $R(1,2)$.

7. **(a)** La funzione risulta definita e di classe $\mathcal{C}^2$ sul suo dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy > 0\}$. Essendo il dominio insieme aperto, ne segue che gli eventuali punti di massimo e minimo relativo saranno punti stazionari della funzione. I punti stazionari sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - \frac{1}{x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y} + 1 = 0 \end{cases}$$

che ammette come soluzioni i punti $P_\pm(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -1)$. Essendo $P_+ \notin D$, si ha che l'unico punto stazionario della funzione è $P_-(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -1)$. Per determinare la natura di tale punto stazionario valutiamo il determinante Hessiano. Essendo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 + \frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{1}{y^2}$$

risulta

$$Hf(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -1) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

Quindi $P_-(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -1)$ è punto di sella e la funzione non ammette punti di massimo e di minimo relativo nel suo dominio.

(b) Essendo la funzione continua sul triangolo chiuso e limitato T, dal Teorema di Weierstrass la funzione ammette massimo e minimo assoluto in T. Per quanto provato nel precedente punto, la funzione non ammette punti stazionari interni a T, dunque massimo e minimo assoluti dovranno necessariamente appartenere alla frontiera ∂T. Abbiamo che $f(x,1) = x^2 - \log x + 1$ è funzione crescente in $[1,2]$ ($\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - \frac{1}{x} > 0$ in $[1,2]$) e quindi

$$\min_{x\in[1,2]} f(x,1) = f(1,1) = 2 \quad \text{e} \quad \max_{x\in[1,2]} f(x,1) = f(2,1) = 5 - \log 2.$$

Inoltre, $f(2,y) = 4 - \log\frac{2}{y} + y$ è funzione crescente in $[1,2]$ ($\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y} + 1 > 0$ in $[1,2]$) e dunque

$$\min_{y\in[1,2]} f(2,y) = f(2,1) = 5 - \log 2 \quad \text{e} \quad \max_{y\in[1,2]} f(2,y) = f(2,2) = 6$$

Infine, $f(x,x) = x^2 + x$ è funzione crescente in $[1,2]$ ($\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 1 > 0$ in $[1,2]$) da cui

$$\min_{x\in[1,2]} f(x,x) = f(1,1) = 2 \quad \text{e} \quad \max_{y\in[1,2]} f(x,x) = f(2,2) = 6.$$

Riunendo quanto ottenuto, risulta che punto di minimo assoluto è $P(1,1)$ mentre punto di minimo assoluto è $Q(2,2)$.

8. **(a)** La funzione risulta definita e di classe $\mathcal{C}^2$ su tutto $\mathbb{R}^2$. Ne segue che gli eventuali punti di massimo e minimo relativo saranno punti stazionari della funzione. I punti stazionari sono le soluzione del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ye^{xy-y^2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x-2y)e^{xy-y^2} = 0 \end{cases}$$

che ammette come unica soluzione il punto $O(0,0)$. Per determinare la natura di tale punto stazionario valutiamo il determinante Hessiano. Essendo

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y^2 e^{xy-y^2}, \\ &\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = e^{xy-y^2} + y(x-2y)e^{xy-y^2} \\ &\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2e^{xy-y^2} + (x-2y)^2 e^{xy-y^2} \end{aligned}$$

risulta

$$Hf(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1$$

Quindi $O(0,0)$ non è ne' punto di minimo relativo ne' punto di massimo. Ne segue allora che la funzione non ammette massimi e minimi relativi nel suo dominio.

(b) Essendo la funzione continua sull'insieme chiuso e limitato D, dal Teorema di Weierstrass la funzione ammette massimo e minimo assoluto in D. Per quanto provato nel precedente punto, la funzione non ammette punti stazionari interni a D, dunque massimo e minimo assoluti dovranno necessariamente appartenere alla frontiera ∂D. Abbiamo che $f(x,0) = 1$ è funzione costante in $[0,1]$. Inoltre, $f(0,y) = e^{-y^2}$ è funzione decrescente in $[0,1]$, quindi

$$\max_{x\in[0,1]} f(0,y) = f(0,0) = 1 \quad \text{e} \quad \min_{x\in[0,1]} f(0,y) = f(0,1) = e^{-1}.$$

Infine, utilizzando le coordinate polari $x = \cos\theta$ e $y = \sin\theta$ otteniamo che $f(x, \sqrt{1-x^2}) = g(\theta) = e^{\sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta}$ dove $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Per studiare la monotonia di tale funzione osserviamo che posto $h(\theta) = \sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta$ risulta

$$h'(\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta = \cos(2\theta) - \sin(2\theta)$$

e dunque che $h'(\theta) > 0$ se e solo se $0 \le 2\theta \le \frac{\pi}{4}$, ovvero $0 \le \theta \le \frac{\pi}{8}$. Ne segue allora che $h(\theta)$ risulta strettamente crescente in $[0, \frac{\pi}{8}]$, strettamente decrescente in $[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2}]$ e dunque che

$$\max_{\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]} h(\theta) = h(\frac{\pi}{8}) = \alpha^1 \quad \text{e} \quad \min_{\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]} h(\theta) = h(\frac{\pi}{2}) = -1.$$

Essendo l'esponenziale funzione crescente, ne deduciamo che

$$\max_{\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]} g(\theta) = g(\frac{\pi}{8}) = e^{\alpha} \quad \text{e} \quad \min_{\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]} g(\theta) = g(\frac{\pi}{2}) = e^{-1}.$$

Riunendo quanto ottenuto, risulta che punto di massimo assoluto è $P(\cos\frac{\pi}{8}, \sin\frac{\pi}{8})$ e punto di minimo assoluto è $O(0,1)$.

9. **(a)** La funzione risulta definita e di classe $\mathcal{C}^2$ su tutto $\mathbb{R}^2$. Ne segue che gli eventuali punti di massimo e minimo relativo saranno punti stazionari della funzione. I punti stazionari sono le soluzione del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (y-2x)e^{xy-x^2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{xy-x^2} = 0 \end{cases}$$

che ammette come unica soluzione il punto $O(0,0)$. Per determinare la natura di tale punto stazionario valutiamo il determinante Hessiano. Essendo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2e^{xy-x^2} + (y-2x)^2 e^{xy-x^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = e^{xy-x^2} + x(y-2x)e^{xy-x^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^2 e^{xy-x^2}$$

[1] si ha che $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ e $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$, da cui $\alpha = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$

risulta

$$Hf(0,0) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Quindi $O(0,0)$ non è ne' punto di minimo relativo ne' punto di massimo. Ne segue allora che la funzione non ammette massimi e minimi relativi nel suo dominio.

(b) Essendo la funzione continua sull'insieme chiuso e limitato D, dal Teorema di Weierstrass la funzione ammette massimo e minimo assoluto in D. Per quanto provato nel precedente punto, la funzione non ammette punti stazionari interni a D, dunque massimo e minimo assoluti dovranno necessariamente appartenere alla frontiera ∂D. Abbiamo che $f(0,y) = 1$ è funzione costante in $[0,1]$. Inoltre, $f(x,0) = e^{-x^2}$ è funzione decrescente in $[0,1]$, quindi

$$\max_{y\in[0,1]} f(x,0) = f(0,0) = 1 \quad \text{e} \quad \min_{y\in[0,1]} f(x,0) = f(1,0) = e^{-1}.$$

Infine, utilizzando le coordinate polari $x = \cos\theta$ e $y = \sin\theta$ otteniamo che $f(\sqrt{1-y^2}, y) = g(\theta) = e^{\sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta}$ dove $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Per studiare la monotonia di tale funzione osserviamo che posto $h(\theta) = \sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta$ risulta

$$h'(\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta = \cos(2\theta) + \sin(2\theta)$$

e dunque che $h'(\theta) > 0$ se e solo se $0 \le 2\theta \le \frac{3\pi}{4}$, ovvero $0 \le \theta \le \frac{3\pi}{8}$. Ne segue allora che $h(\theta)$ risulta strettamente crescente in $[0, \frac{3\pi}{8}]$, strettamente decrescente in $[\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}]$ e dunque che

$$\max_{\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]} h(\theta) = h(\frac{3\pi}{8}) = \alpha^2 \quad \text{e} \quad \min_{\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]} h(\theta) = h(\frac{\pi}{2}) = -1.$$

Essendo l'esponenziale funzione crescente, ne deduciamo che

$$\max_{\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]} g(\theta) = g(\frac{3\pi}{8}) = e^{\alpha} \quad \text{e} \quad \min_{\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]} g(\theta) = g(\frac{\pi}{2}) = e^{-1}.$$

Riunendo quanto ottenuto, risulta che punto di massimo assoluto è $P(\cos\frac{\pi}{8}, \sin\frac{\pi}{8})$ e punto di minimo assoluto è $O(0,1)$.

10. **(a)** La funzione risulta definita e di classe $\mathcal{C}^2$ in tutto il suo dominio

$$D = \{(x,y) \,|\, x > -2\}.$$

(b) Gli eventuali punti di massimo e minimo relativo saranno punti stazionari della funzione ovvero le soluzione del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3y-1}{2+x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3\log(2+x) = 0 \end{cases}$$

[2]si ha che $\cos\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ e $\sin\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$, da cui $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$

che ammette come unica soluzione il punto $P(-1, \frac{1}{3})$. Per determinare la natura di tale punto stazionario valutiamo il determinante Hessiano. Essendo

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{3y-1}{(2+x)^2},\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{3}{2+x}\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0
\end{aligned}$$

risulta

$$Hf(-1, \frac{1}{3}) = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9$$

Quindi $P(-1, \frac{1}{3})$ non è ne' punto di minimo relativo ne' punto di massimo. Ne segue allora che la funzione non ammette massimi e minimi relativi nel suo dominio.

(c) Essendo la funzione continua sull'insieme chiuso e limitato D, dal Teorema di Weierstrass la funzione ammette massimo e minimo assoluto in D. Per quanto provato nel precedente punto, la funzione non ammette punti stazionari interni a D, dunque massimo e minimo assoluti dovranno necessariamente appartenere alla frontiera ∂D. Abbiamo che $f(-1, y) = 0$ è funzione costante in $[-1, 1]$, mentre $f(1, y) = (3y-1)\log 3$ è funzione crescente in $[-1, 1]$, quindi

$$\max_{y\in[-1,1]} f(1, y) = f(1, 1) = 2\log 3 \quad \text{e} \quad \min_{y\in[-1,1]} f(1, y) = f(1, -1) = -4\log 3.$$

Si ha poi che $f(x, -1) = -4\log(2 + x)$ è funzione decrescente in $[-1, 1]$, mentre $f(x, 1) = 2\log(2 + x)$ è funzione crescente in $[-1, 1]$, quindi

$$\max_{x\in[-1,1]} f(x, -1) = f(-1, -1) = 0 \quad \text{e} \quad \min_{x\in[-1,1]} f(x, -1) = f(1, -1) = -4\log 3.$$

e

$$\max_{x\in[-1,1]} f(x, 1) = f(1, 1) = 2\log 3 \quad \text{e} \quad \min_{x\in[-1,1]} f(x, 1) = f(-1, 1) = 0.$$

Riunendo quanto ottenuto, risulta che punto di massimo assoluto è $P(1, 1)$ e punto di minimo assoluto è $P(1, -1)$.

11. (a) La funzione risulta definita e di classe $\mathcal{C}^2$ in tutto il suo dominio

$$D = \{(x, y) \,|\, y < 3\}.$$

(b) Gli eventuali punti di massimo e minimo relativo saranno punti stazionari della funzione ovvero le soluzione del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2\log(3-y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{2x+1}{3-y} = 0 \end{cases}$$

che ammette come unica soluzione il punto $P(-\frac{1}{2}, 2)$. Per determinare la natura di tale punto stazionario valutiamo il determinante Hessiano. Essendo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{2}{3-y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{2x+1}{(3-y)^2},$$

risulta

$$Hf(-\frac{1}{2}, 2) = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

Quindi $P(-\frac{1}{2}, 2)$ non è ne' punto di minimo relativo ne' punto di massimo. Ne segue allora che la funzione non ammette massimi e minimi relativi nel suo dominio.

(c) Essendo la funzione continua sull'insieme chiuso e limitato D, dal Teorema di Weierstrass la funzione ammette massimo e minimo assoluto in D. Per quanto provato nel precedente punto, la funzione non ammette punti stazionari interni a D, dunque massimo e minimo assoluti dovranno necessariamente appartenere alla frontiera ∂D. Abbiamo che $f(-1, y) = -\log(3-y)$ è funzione crescente in $[-1, 1]$ mentre $f(1, y) = 3\log(3-y)$ è funzione decrescente in $[-1, 1]$, quindi

$$\max_{y\in[-1,1]} f(-1,y) = f(-1,1) = -\log 2 \quad \text{e} \quad \min_{y\in[-1,1]} f(-1,y) = f(-1,-1) = -\log 4.$$

mentre

$$\max_{y\in[-1,1]} f(1,y) = f(1,-1) = 3\log 4 \quad \text{e} \quad \min_{y\in[-1,1]} f(1,y) = f(1,1) = 3\log 2.$$

Si ha poi che $f(x, -1) = (2x+1)\log 4$ e $f(x, 1) = (2x+1)\log 2$ sono funzioni crescenti in $[-1, 1]$, quindi

$$\max_{x\in[-1,1]} f(x,-1) = f(1,-1) = 3\log 4 \quad \text{e} \quad \min_{x\in[-1,1]} f(x,-1) = f(-1,-1) = -\log 4.$$

e

$$\max_{x\in[-1,1]} f(x,1) = f(1,1) = 3\log 2 \quad \text{e} \quad \min_{x\in[-1,1]} f(x,1) = f(-1,1) = -\log 2.$$

Riunendo quanto ottenuto, risulta che punto di massimo assoluto è $P(1, -1)$ e punto di minimo assoluto è $P(-1, -1)$.

Integrali doppi

1. Dato il dominio piano omogeneo $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 4x^2 + y^2 \leq 4,\, 0 \leq y \leq 2x\}$

a) Determinarne l'area.

b) Determinarne il baricentro.

2. Dato il corpo piano omogeneo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\, 0 \leq y \leq x\}$,

a) Determinarne le coordinate del baricentro.

b) Calcolare $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x}\, dx\, dy$.

3. Calcolare $\displaystyle\iint_D xy\, dx\, dy$ essendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 2,\, 0 \leq x \leq y^2,\, y \geq 0\}$.

4. Calcolare il flusso del campo $F(x,y,z) = (y^2, x, z)$ attraverso la superficie

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = x^2 + y^2,\, 1 \leq z \leq 4\}.$$

5. Calcolare $\displaystyle\iiint_E x^2 + y^2\, dxdydz$ essendo

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1,\, 0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}.$$

6. Calcolare il baricentro del corpo piano

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1,\, y \geq \sqrt{3}x\}$$

di densità di massa $\sigma(x,y) = y$.

7. Calcolare il baricentro del corpo piano

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1,\, x \geq \sqrt{3}|y|\}$$

di densità di massa $\sigma(x,y) = x$.

8. Determinare il baricentro del corpo piano

$$D = \{(x,y) \,|\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\, x \geq 0,\, y \geq 0\}$$

di densità di massa $\sigma(x,y) = x$.

Risoluzione

1. Per calcolare l'integrale $m(E) = \iint_E dxdy$ passiamo alle coordinate ellittiche ponendo

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = 2\rho\sin\theta \end{cases}$$

Il dominio E risulta immagine mediante le coordinate ellittiche del rettangolo $T = \{(\rho,\theta)\,|\,\rho\in[0,1],\ \theta\in[0,\frac{\pi}{4}]\}$ essendo $(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2})$, punto di intersezione dell'ellisse $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ con la retta $y=2x$, corrispondente alle coordinate cilindriche $\rho=1$ e $\theta=\frac{\pi}{4}$. Poichè il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione è pari a 2ρ otteniamo

$$m(E) = \iint_E dxdy = \iint_T 2\rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 2\rho d\rho d\theta = \frac{\pi}{4}$$

(b) Utilizzando sempre le coordinate ellittiche per il calcolo degli integrali, otteniamo che le coordinate del baricentro sono

$$x_0 = \frac{1}{m(E)}\iint_E xdxdy = \frac{4}{\pi}\iint_T 2\rho^2\cos\theta d\rho d\theta = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 2\rho^2\cos\theta d\rho d\theta = \frac{4}{\pi}\frac{\sqrt{2}}{3}$$

e

$$y_0 = \frac{1}{m(E)}\iint_E xdxdy = \frac{4}{\pi}\iint_T 4\rho^2\sin\theta d\rho d\theta = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 4\rho^2\sin\theta d\rho d\theta = \frac{4}{\pi}(\frac{4}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3})$$

2. **(a)** Per determinare le coordinate del baricentro, osserviamo innanzitutto che essendo l'area della corona circolare $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\}$ pari a 3π, l'area del corpo D è data da $m(D)=\frac{3}{8}\pi$. Per calcolare l'integrale $\iint_D x\,dxdy$ passiamo alle coordinate polari ponendo

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

Allora il dominio D risulta immagine mediante tale trasformazione del rettangolo $T = \{(\rho,\theta)\,|\,\rho\in[1,2],\ \theta\in[0,\frac{\pi}{4}]\}$. Poichè il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione è pari a ρ otteniamo

$$\iint_D x\,dxdy = \iint_T \rho^2\cos\theta\,d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_1^2 \rho^2\cos\theta\,d\rho d\theta = \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_1^2 [\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{7}{6}\sqrt{2}$$

Ne segue che l'ascissa del baricentro di D è

$$x_G = \frac{1}{m(D)}\iint_D x\,dxdy = \frac{8}{3\pi}\frac{7\sqrt{2}}{6} = \frac{28}{9}\frac{\sqrt{2}}{\pi}$$

Analogalmente, per calcolare l'integrale $\iint_D y\,dxdy$ passiamo alle coordinate polari. Si ottiene

$$\iint_D y\,dxdy = \iint_T \rho^2 \sin\theta\,d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_1^2 \rho^2 \sin\theta\,d\rho d\theta = \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_1^2 [-\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{7}{6}(2-\sqrt{2})$$

Ne segue che l'ordinata del baricentro di D è

$$y_G = \frac{1}{m(D)} \iint_D y\,dxdy = \frac{8}{3\pi}\frac{7}{6}(2-\sqrt{2}) = \frac{28}{9}\frac{2-\sqrt{2}}{\pi}$$

(b) Utilizzando sempre le coordinate polari, otteniamo

$$\iint_D \frac{y}{x}\,dxdy = \iint_T \rho\tan\theta\,d\rho d\theta = \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_1^2 [-\log|\cos\theta|]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{2}(-\log\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{3}{4}\log 2$$

3. Per calcolare l'integrale $\iint_D xydxdy$, osservato che

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x=y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\pm 1 \end{cases},$$

possiamo procedere in tre differrenti modi.

I. Il dominio D è normale rispetto a x con $D=\{(x,y)\,|\,x\in[0,1],\ \sqrt{x}\le y\le\sqrt{2-x^2}\}$ e dalle formule di riduzione otteniamo:

$$\begin{aligned}\iint_D xy\,dxdy &= \int_0^1 (\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2-x^2}} xy\,dy)\,dx = \int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2-x^2}} dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 2x-x^3-x^2\,dx = \frac{1}{2}\left[x^2-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{5}{24}\end{aligned}$$

II. Il dominio D è normale rispetto a y con $D=D_1\cup D_2$ essendo

$$D_1=\{(x,y)\,|\,y\in[0,1],\ 0\le x\le y^2\} \quad \text{e} \quad D_2=\{(x,y)\,|\,y\in[1,\sqrt{2}],\ 0\le x\le\sqrt{2-y^2}\}$$

dalle formule di riduzione e dall'additività dell'integrale otteniamo:

$$\begin{aligned}\iint_D xy\,dxdy &= \iint_{D_1} xy\,dxdy + \iint_{D_2} xy\,dxdy \\ &= \int_0^1 (\int_0^{y^2} xy\,dx)\,dy + \int_1^{\sqrt{2}} (\int_0^{\sqrt{2-y^2}} xy\,dx)\,dy \\ &= \int_0^1 y\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{y^2} dy + \int_1^{\sqrt{2}} y\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2-y^2}} dy \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 y^5\,dy + \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}} 2y-y^3 dy = \frac{1}{2}\left[\frac{y^6}{6}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[y^2-\frac{y^4}{4}\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{5}{24}\end{aligned}$$

III. Utilizzando le coordinate polari poniamo

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

Il dominio D risulta immagine mediante le coordinate polari del dominio $T = \{(\rho,\theta)\,|\,\theta \in [\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}],\ \rho \in [\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta},\sqrt{2}]\}$. Dalle formule di cambiamento di variabili e di riduzione (T è dominio normale rispetto a θ) otteniamo

$$\begin{aligned}\iint_D xydxdy &= \iint_T \rho^3\cos\theta\sin\theta d\rho d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_{\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}}^{\sqrt{2}}\rho^3\cos\theta\sin\theta d\rho\Big)d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_{\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}}^{\sqrt{2}}d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta - \frac{1}{4}\frac{\cos^5\theta}{\sin^7\theta}d\theta \\ &= \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{24}\left[\frac{\cos^6\theta}{\sin^6\theta}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5}{24}\end{aligned}$$

4. Per calcolare il flusso $\Phi(F) = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{N}\,d\sigma$, determiniamo innanzitutto una parametrizzazione della superficie $\mathcal{S}$. Utilizzando le coordinate cilindriche abbiamo che $\mathcal{S} = \varphi(T)$ essendo

$$\varphi : \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = \rho^2 \end{cases} \qquad \text{dove } (\rho,\theta) \in T = [1,2]\times[0,2\pi].$$

Risulta allora $\varphi_\rho(\rho,\theta) = (\cos\theta,\sin\theta,2\rho)$ e $\varphi_\theta(\rho,\theta) = (-\rho\sin\theta,\rho\cos\theta,0)$ e quindi

$$\varphi_\rho(\rho,\theta)\wedge\varphi_\theta(\rho,\theta) = (-2\rho^2\cos\theta, -2\rho^2\sin^2\theta, \rho).$$

Allora, dalle formule di riduzione, otteniamo:

$$\begin{aligned}\Phi(F) &= \int_{\mathcal{S}} \mathbf{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{N}d\sigma = \iint_T \mathbf{F}(\varphi(\rho,\theta))\cdot\varphi_\rho(\rho,\theta)\wedge\varphi_\theta(\rho,\theta)\,d\rho\,d\theta \\ &= \iint_T -2\rho^4\cos\theta\sin^2\theta - 2\rho^3\sin\theta\cos\theta + \rho^3\,d\rho\,d\theta \\ &= \int_1^2\Big(\int_0^{2\pi} -2\rho^4\cos\theta\sin^2\theta - 2\rho^3\sin\theta\cos\theta + \rho^3 d\theta\Big)d\rho \\ &= \int_1^2\left[-2\rho^4\frac{\sin^3\theta}{3} - 2\rho^3\frac{\sin^2\theta}{2} + \rho^3\theta\right]_0^{2\pi}d\rho \\ &= 2\pi\int_1^2\rho^3 d\rho = 2\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_1^2 = \frac{15}{2}\pi\end{aligned}$$

In alternativa, osservato che la superficie $\mathcal{S}$ è descritta dall'equazione cartesiana $z = x^2+y^2$ con $(x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$, abbiamo che $\mathcal{S} = \psi(D)$ essendo

$$\psi : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases} \qquad \text{dove } (u, v) \in D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq u^2 + v^2 \leq 4\}.$$

Risulta allora $\psi_u(u, v) = (1, 0, 2u)$ e $\psi_v(u, v) = (0, 1, 2v)$ e quindi

$$\psi_u(u, v) \wedge \psi_v(u, v) = (-2u, -2v, 1).$$

Allora, dalla definizione di flusso otteniamo:

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\sigma = \iint_D \mathbf{F}(\psi(u, v) \cdot \psi_u(u, v) \wedge \psi_v(u, v)\, du\, dv = \iint_D -2uv^2 - 2uv + u^2 + v^2 du\, dv$$

Per calcolare l'integrale doppio possiamo utilizzare le coordinate polari ponendo $\begin{cases} u = \rho \cos\theta \\ v = \rho \sin\theta \end{cases}$.

Il dominio D risulta immagine mediante le coordinate polari del dominio

$$T = \{(\rho, \theta) \,|\, \theta \in [0, 2\pi],\ \rho \in [1, 2]\}$$

Dalle formule di cambiamento di variabili e di riduzione otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\sigma &= \iint_T (-2\rho^3 \cos\theta \sin^2\theta - 2\rho^2 \sin\theta \cos\theta + \rho^2)\rho\, d\rho\, d\theta \\ &= \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} -2\rho^4 \cos\theta \sin^2\theta - 2\rho^3 \sin\theta \cos\theta + \rho^3 d\theta \right) d\rho = \frac{15}{2}\pi \end{aligned}$$

5. Il dominio E risulta dominio normale rispetto al piano (x, y) con

$$E = \{(x, y, z) \,|\, (x, y) \in D,\ 0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}\} \text{ dove } D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Dalle formule di riduzione risulta

$$\iiint_E x^2 + y^2\, dxdydz = \iint_D \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} x^2 + y^2 dz \right) dxdy = \iint_D (x^2 + y^2)\sqrt{4 - x^2 - y^2} dxdy$$

e passando alle coordinate polari otteniamo

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \rho^3 \sqrt{4 - \rho^2} d\rho \right) d\theta = 2\pi \left[\frac{4}{3}(4 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}(4 - \rho^2)^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{64}{15} - \frac{11}{5}\sqrt{3} \right)$$

In alternativa, osservato che l'intersezione tra il cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ è data da

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z^2 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

potremo scrivere $E = E_1 \cup E_2$ dove

$$E_1 = \{(x,y,z) \,|\, z \in [0,\sqrt{3}],\ (x,y) \in D\} \quad \text{e} \quad E_2 = \{(x,y,z) \,|\, z \in [\sqrt{3},2],\ (x,y) \in D_z\}$$

essendo $D = \{(x,y) \,|\, x^2+y^2 \le 1\}$ e $D_z = \{(x,y) \,|\, x^2+y^2 \le 4-z^2\}$ se $z \in [\sqrt{3},2]$. Dalle formule di riduzione si ottiene allora

$$\iiint_E x^2+y^2\,dxdydz = \int_0^{\sqrt{3}} (\iint_D x^2+y^2\,dxdy)dz + \int_{\sqrt{3}}^2 (\iint_{D_z} x^2+y^2\,dxdy)dz$$

ed utilizzando le coordinate polari per calcolare l'integrale doppio si ha

$$\begin{aligned}\iiint_E x^2+y^2\,dxdydz &= \int_0^{\sqrt{3}} (\int_0^{2\pi} (\int_0^1 \rho^3\,d\rho)d\theta)dz + \int_{\sqrt{3}}^2 (\int_0^{2\pi} (\int_0^{\sqrt{4-z^2}} \rho^3\,d\rho)d\theta)dz \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\pi}{2}dz + \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{\pi}{2}(4-z^2)^2dz = \frac{\pi}{2}\sqrt{3} + \frac{\pi}{2}\left[16z - \frac{8}{3}z^3 + \frac{z^5}{5}\right]_{\sqrt{3}}^2 \\ &= 2\pi(\frac{64}{15} - \frac{11}{5}\sqrt{3})\end{aligned}$$

6. Utilizzando le coordinate polari poniamo

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

Il dominio D risulta immagine mediante le coordinate polari del dominio $T = \{(\rho,\theta) \,|\, \theta \in [\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}],\ \rho \in [0,1]\}$. Dalle formule di cambiamento di variabili e di riduzione otteniamo

$$m(D) = \iint_D ydxdy = \iint_T \rho^2 \sin\theta d\rho d\theta = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \sin\theta d\theta \int_0^1 \rho^2 d\rho = \frac{1}{3}$$

Denotate con (x_B, y_B) le coordinate del baricentro otteniamo

$$x_B = 3\iint_D yxdxdy = 3\iint_T \rho^3\cos\theta\sin\theta d\rho d\theta = 3\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \cos\theta\sin\theta d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = 0$$

mentre

$$y_B = 3\iint_D y^2dxdy = 3\iint_T \rho^3\sin^2\theta d\rho d\theta = 3\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \sin^2\theta d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{3}{8}\pi.$$

7. Il dominio D risulta immagine, mediante le coordinate polari, del dominio $T = \{(\rho,\theta) \,|\, \theta \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}],\ \rho \in [0,1]\}$. Dalle formule di cambiamento di variabili e di riduzione otteniamo allora che

$$m(D) = \iint_D ydxdy = \iint_T \rho^2\cos\theta\,d\rho d\theta = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos\theta\,d\theta \int_0^1 \rho^2\,d\rho = \frac{1}{3}$$

Denotate con (x_B, y_B) le coordinate del baricentro otteniamo

$$\begin{aligned} x_B &= 3\iint_D x^2 dxdy = 3\iint_T \rho^3\cos^2\theta\, d\rho d\theta = 3\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2\theta\, d\theta \int_0^1 \rho^3\, d\rho \\ &= \frac{3}{2}\left[\theta+\cos\theta\sin\theta\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{8}+\frac{3\sqrt{3}}{16} \end{aligned}$$

mentre, dalla simmetria del dominio e della densità di massa rispetto all'asse x deduciamo che $y_B = 0$.

8. Il dominio D risulta immagine mediante le coordinate polari del dominio

$$T = \{(\rho,\theta)\,|\,\theta\in[0,\frac{\pi}{2}],\ \rho\in[1,2]\}.$$

Dalle formule di cambiamento di variabili e di riduzione otteniamo

$$m(D) = \iint_D x\, dxdy = \iint_T \rho^2\cos\theta d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \int_1^2 \rho^2 d\rho = \frac{7}{3}$$

Denotate con (x_B, y_B) le coordinate del baricentro otteniamo

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{3}{7}\iint_D x^2 dxdy = \frac{3}{7}\iint_T \rho^3\cos^2\theta d\rho d\theta = \frac{3}{7}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta \int_1^2 \rho^3 d\rho \\ &= \frac{3}{56}\left[\theta+\sin\theta\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\rho^4\right]_1^2 = \frac{45}{112}\pi \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} y_B &= \frac{3}{7}\iint_D xydxdy = \frac{3}{7}\iint_T \rho^3\sin\theta\cos\theta\, d\rho d\theta = \frac{3}{7}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta \int_1^2 \rho^3 d\rho \\ &= \frac{3}{56}\left[\sin^2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\rho^4\right]_1^2 = \frac{45}{56}. \end{aligned}$$

Integrali tripli

1. Dato il solido E ottenuto dall'intersezione del cono $z \leq 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ con il paraboloide $z \geq x^2 + y^2 - 5$.

a) Determinarne il volume.

b) Determinarne le coordinate del baricentro.

2. Dato il solido $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 1 - z \leq x^2 + y^2 \leq 1 - \frac{z^2}{9},\, z \leq 2\}$,

a) Determinarne il volume.

b) Calcolare $\displaystyle\iiint_D x^2 + y^2 \, dxdydz$.

3. Sia D il solido delimitato dai paraboloidi $z = x^2 + y^2$ e $z = 4 - x^2 - y^2$.

a) Determinarne il volume.

b) Determinarne le coordinate del baricentro.

4. Calcolare il volume del solido $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1,\, 0 \leq z \leq 2 + x^2 + y^2\}$

5. Determinare il baricentro del corpo solido $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq z \leq 6 - \sqrt{x^2+y^2}\}$ di densità di massa costante.

6. Determinare il baricentro del corpo solido $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq z \leq 2\}$ di densità di massa $\sigma(x,y,z) = z$.

7. Calcolare $\displaystyle\iiint_E x \, dxdydz$ essendo

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \geq 1,\, 0 \leq z \leq 3 - \sqrt{x^2+y^2}\}.$$

8. Determinare il baricentro del corpo

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 4 - z,\, z \geq 0\}$$

di densità di massa $\sigma(x,y,z) = z$.

9. Calcolare il volume della regione

$$R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 3(x^2 + y^2) \leq z \leq 1 + x^2 + y^2\}.$$

Risoluzione

1. **(a)** Osserviamo innanzitutto che l'intersezione tra il cono ed il paraboloide è data da

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 - 5 \\ z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = z + 5 \\ z + 5 = (1 - z)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = -1 \end{cases}$$

Dunque E risulta dominio normale rispetto al piano (x, y) con

$E = \{(x, y, z) \,|\, (x, y) \in D,\ x^2 + y^2 - 5 \le z \le 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$ dove $D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \le 4\}$

Dalle formule di riduzione risulta allora

$$m(E) = \iiint_E dxdydz = \iint_D \left(\int_{x^2+y^2-5}^{1-\sqrt{x^2+y^2}} dz\right)dxdy = \iint_D 6 - \sqrt{x^2 + y^2} - (x^2 + y^2)dxdy$$

e passando alle coordinate polari otteniamo

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 (6 - \rho - \rho^2)\rho d\rho\right)d\theta = 2\pi \left[3\rho^2 - \frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 = \frac{32}{3}\pi$$

In alternativa, osservato che

$$E = \{(x, y, z) \,|\, z \in [-5, 1],\ (x, y) \in D_z\}$$

dove $D_z = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \le 5 + z\}$ se $z \in [-5, -1]$ e $D_z = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \le (1 - z)^2\}$ se $z \in [-1, 1]$, si ottiene

$$\begin{aligned} m(E) &= \iiint_E dxdydz = \int_{-5}^{1} \left(\iint_{D_z} dxdy\right)dz = \int_{-5}^{1} m(D_z)\ dz \\ &= \int_{-5}^{-1} \pi(5 + z)dz + \int_{-1}^{1} \pi(1 - z)^2 dz = \pi \left[z - z^2 + \frac{z^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \pi \left[5z + \frac{z^2}{2}\right]_{-5}^{-1} \\ &= \frac{32}{3}\pi \end{aligned}$$

(b) Dette (x_0, y_0, z_0) le coordinate del baricentro, osserviamo che essendo il dominio simmetrico rispetto all'asse z risulta $x_0 = y_0 = 0$. Per determinare z_0 calcoliamo innanzitutto l'integrale

$$I = \iiint_E z dxdydz$$

A tale scopo, procedendo come nel precedente punto, otteniamo

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left(\int_{x^2+y^2-5}^{1-\sqrt{x^2+y^2}} z\ dz\right)dxdy = \frac{1}{2}\iint_D (1 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 - (x^2 + y^2 - 5)^2 dxdy \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 ((1 - \rho)^2 - (\rho^2 - 5)^2)\rho\ d\rho\right)d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 -\rho^5 + 11\rho^3 - 2\rho^2 - 24\rho\ d\rho\right)d\theta \\ &= 2\pi \left[-\frac{\rho^6}{6} + \frac{11\rho^4}{4} - \frac{2\rho^3}{3} - 12\rho^2\right]_0^2 = -20\pi \end{aligned}$$

o in alternativa

$$I=\int_{-5}^{1}(\iint_{D_z} zdxdy)dz=\int_{-5}^{-1}\pi z(5+z)dz+\int_{-1}^{1}\pi z(1-z)^2dz=...=-20\pi$$

Quindi

$$z_0=\frac{1}{m(E)}\iiint_E zdxdydz=\frac{-20\pi}{\frac{32}{3}\pi}=-\frac{15}{8}$$

2. **(a)** Osserviamo innanzitutto che l'intersezione tra l'ellissoide $x^2+y^2+\frac{z^2}{9}=1$ ed il paraboloide $1-z=x^2+y^2$ è data da

$$\begin{cases} x^2+y^2+\frac{z^2}{9}=1 \\ 1-z=x^2+y^2(\geq 0) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

Dunque abbiamo $D=D_1\cup D_2$ essendo

$$D_1=\{(x,y,z)\,|\,z\in[0,1],\,(x,y)\in C_z,\}\text{ dove } C_z=\{(x,y)\,|\,1-z\leq x^2+y^2\leq 1-\frac{z^2}{9}\}$$

e

$$D_2=\{(x,y,z)\,|\,z\in[1,2],\,(x,y)\in D_z,\}\text{ dove } D_z=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 1-\frac{z^2}{9}\}$$

Dalle formule di riduzione risulta allora

$$m(D_1)=\iiint_{D_2} dxdydz=\int_0^1(\iint_{C_z} dxdy)dz=\pi\int_0^1 z-\frac{z^2}{9}dz=\pi\left[\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{27}\right]_0^1=\frac{25}{54}\pi$$

e

$$m(D_2)=\iiint_{D_2} dxdydz=\int_1^2(\iint_{D_z} dxdy)dz=\pi\int_1^2 1-\frac{z^2}{9}dz=\pi\left[z-\frac{z^3}{27}\right]_1^2=\frac{20}{27}\pi$$

Quindi $M(D)=m(D_1)+m(D_2)=\dfrac{65}{54}\pi$.

(b) Usando l'additività dell'integrale triplo e quanto ottenuto nel precedente punto otteniamo

$$\begin{aligned}\mathcal{I}&=\iiint_D x^2+y^2dxdydz=\iiint_{D_1} x^2+y^2dxdydz+\iiint_{D_2} x^2+y^2dxdydz\\&=\int_0^1(\iint_{C_z} x^2+y^2dxdy)dz+\int_1^2(\iint_{D_z} x^2+y^2dxdy)dz\end{aligned}$$

e passando alle coordinate polari otteniamo

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-\frac{z^2}{9}}} \rho^3 d\rho\, d\theta\Big) dz + \int_1^2 \Big(\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{1-\frac{z^2}{9}}} \rho^3 d\rho\, d\theta\Big) dz \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^1 (1-\frac{z^2}{9})^2 - (1-z)^2 dz + \frac{\pi}{2} \int_1^2 (1-\frac{z^2}{9})^2 dz \\
&= \frac{\pi}{2} \left[-\frac{2z^3}{27} + \frac{z^5}{405} + z^2 - \frac{z^3}{3} \right]_0^1 + \frac{\pi}{2} \left[z - \frac{2z^3}{27} + \frac{z^5}{405} \right]_1^2 = \frac{467}{810}\pi
\end{aligned}
$$

3. **(a)** L'intersezione tra i due paraboloidi è data da

$$
\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 4 - x^2 - y^2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = 2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}
$$

Dunque abbiamo $D = D_1 \cup D_2$ essendo

$$
D_1 = \{(x,y,z) \,|\, z \in [0,2],\ (x,y) \in C_z, \} \text{ dove } C_z = \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 \leq z\}
$$

e

$$
D_2 = \{(x,y,z) \,|\, z \in [2,4],\ (x,y) \in D_z, \} \text{ dove } D_z = \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 4 - z\}
$$

Dalle formule di riduzione risulta allora

$$
m(D_1) = \iiint_{D_1} dxdydz = \int_0^2 \Big(\iint_{C_z} dxdy\Big) dz = \pi \int_0^2 z dz = \pi \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^2 = 2\pi
$$

e

$$
m(D_2) = \iiint_{D_2} dxdydz = \int_2^4 \Big(\iint_{D_z} dxdy\Big) dz = \pi \int_2^4 4 - z dz = \pi \left[4z - \frac{z^2}{2} \right]_2^4 = 2\pi
$$

Quindi $M(D) = m(D_1) + m(D_2) = 4\pi$. In alternativa, osservato che

$$
D = \{(x,y,z) \,|\, (x,y) \in C,\ x^2 + y^2 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\} \text{ dove } C = \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 2\}
$$

si ottiene

$$
m(D) = \iiint_D dxdydz = \iint_C \Big(\int_{x^2+y^2}^{4-x^2-y^2} dz\Big) dxdy = 2 \iint_C 2 - x^2 - y^2 \, dxdy
$$

da cui, passando alle coordinate polari,

$$
m(D) = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (2 - \rho^2)\rho \, d\rho d\theta = 4\pi \left[\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} = 4\pi
$$

(b) Osservato che il solido è simmetrico rispetto all'asse z, dette (x_B, y_B, z_B) le coordinate del baricentro, risulta $x_B = y_B = 0$. Mentre

$$z_B = \frac{1}{4\pi} \iiint_D z\, dxdydz$$

Procedendo come nel precedente punto, si ottiene

$$\begin{aligned} \iiint_D z\, dxdydz &= \iiint_{D_1} z\, dxdydz + \iiint_{D_2} z\, dxdydz \\ &= \int_0^2 (\iint_{C_z} z\, dxdy) dz + \int_2^4 (\iint_{D_z} z\, dxdy) dz \\ &= \pi \int_0^2 z^2 dz + \pi \int_2^4 4z - z^2 dz = \frac{8\pi}{3} + \frac{16\pi}{3} = 8\pi \end{aligned}$$

da cui $z_B = 2$.

NOTA: la risoluzione dell'esercizio poteva semplificarsi osservando che il dominio risulta simmetrico rispetto al piano $z = 2$ e dunque osservando che per simmetria si ha $m(D_1) = m(D_2)$ e $z_B = 2$.

4. L'intersezione del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con il paraboloide $z = x^2 + y^2 + 2$ è data da

$$\begin{cases} z = 2 + x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

Dunque E risulta dominio normale rispetto al piano (x, y) con

$$E = \{(x, y, z) \,|\, (x, y) \in D,\ 0 \le z \le 2 + x^2 + y^2\} \quad \text{dove} \quad D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \le 1\}$$

Dalle formule di riduzione risulta allora

$$m(E) = \iiint_E dxdydz = \iint_D (\int_0^{2+x^2+y^2} dz) dxdy = \iint_D 2 + x^2 + y^2 dxdy$$

e passando alle coordinate polari otteniamo

$$m(E) = \int_0^{2\pi} (\int_0^1 (2 + \rho^2) \rho d\rho) d\theta = 2\pi \left[\rho^2 + \frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = \frac{5}{2}\pi$$

In alternativa, osservato che

$$E = \{(x, y, z) \,|\, z \in [0, 3],\ (x, y) \in D_z\}$$

dove $D_z = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \le 1\}$ se $z \in [0, 2]$ e $D_z = \{(x, y) \,|\, z - 2 \le x^2 + y^2 \le 1\}$ se $z \in [2, 3]$, si ottiene

$$\begin{aligned} m(E) &= \iiint_E dxdydz = \int_0^3 (\iint_{D_z} dxdy) dz = \int_0^3 m(D_z)\, dz \\ &= \int_0^2 \pi dz + \int_2^3 \pi (3 - z) dz = 2\pi + \pi \left[3z - \frac{z^2}{2}\right]_2^3 = \frac{5}{2}\pi \end{aligned}$$

5. Osservato che essendo il dominio simmetrico rispetto all'asse z e la densità di massa costante, si ha che dette (x_B, y_B, z_B) le coordinate del baricentro risulta $x_B = y_B = 0$ mentre

$$z_B = \frac{1}{m(E)} \iiint_E z\, dxdydz \quad \text{dove} \quad m(E) = \iiint_E dxdydz$$

Per calcolare tali integrali, osserviamo innanzitutto che l'intersezione del cono $z = 6 - \sqrt{x^2+y^2}$ con il paraboloide $z = x^2+y^2$ è data da

$$\begin{cases} z = 6 - \sqrt{x^2+y^2} \\ z = x^2+y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2 = 4 \\ z = 4 \end{cases}$$

Dunque E risulta dominio normale rispetto al piano (x, y) con

$$E = \{(x, y, z) \,|\, (x, y) \in D,\ x^2+y^2 \le z \le 6 - \sqrt{x^2+y^2}\} \ \text{ dove } \ D = \{(x, y) \,|\, x^2+y^2 \le 4\}$$

Dalle formule di riduzione risulta allora

$$m(E) = \iiint_E dxdydz = \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^{6-\sqrt{x^2+y^2}} dz\right)dxdy = \iint_D 6 - \sqrt{x^2+y^2} - x^2 - y^2\, dxdy$$

e passando alle coordinate polari otteniamo

$$m(E) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 (6 - \rho - \rho^2)\rho d\rho\right)d\theta = 2\pi \left[3\rho^2 - \frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 = \frac{32}{3}\pi$$

Quindi

$$\begin{aligned} z_B &= \frac{3}{32\pi} \iiint_E z\, dxdydz = \frac{3}{32\pi} \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^{6-\sqrt{x^2+y^2}} z\, dz\right)dxdy \\ &= \frac{3}{64\pi} \iint_D (6 - \sqrt{x^2+y^2})^2 - (x^2+y^2)^2\, dxdy \\ &= \frac{3}{64\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 ((6-\rho)^2 - \rho^4)\rho d\rho\right)d\theta = \frac{3}{32} \left[18\rho^2 - 4\rho^3 + \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{6}\right]_0^2 = \frac{25}{8} \end{aligned}$$

In alternativa, osservato che

$$E = \{(x, y, z) \,|\, z \in [0, 6],\ (x, y) \in D_z\}$$

dove $D_z = \{(x, y) \,|\, x^2+y^2 \le z\}$ se $z \in [0, 4]$ e $D_z = \{(x, y) \,|\, \sqrt{x^2+y^2} \le 6 - z\}$ se $z \in [4, 6]$, si ottiene

$$\begin{aligned} m(E) &= \iiint_E dxdydz = \int_0^6 \left(\iint_{D_z} dxdy\right)dz = \int_0^6 m(D_z)\, dz \\ &= \int_0^4 \pi z dz + \int_4^6 \pi(6-z)^2 dz = 8\pi + \pi \left[36z - 6z^2 + \frac{z^3}{3}\right]_4^6 = \frac{32}{3}\pi \end{aligned}$$

e quindi

$$
\begin{aligned}
z_B &= \frac{3}{32\pi}\iiint_E z\,dxdydz = \frac{3}{32\pi}\int_0^6 (\iint_{D_z} z\,dxdy)dz = \frac{3}{32\pi}\int_0^6 zm(D_z)\,dz \\
&= \frac{3}{32\pi}\int_0^4 \pi z^2 dz + \frac{3}{32\pi}\int_4^6 \pi z(6-z)^2 dz = 2 + \frac{3}{32}\left[18z^2 - 4z^3 + \frac{z^4}{4}\right]_4^6 = \frac{25}{8}
\end{aligned}
$$

6. Osservato che il solido è simmetrico rispetto all'asse z e che la densità di massa dipende solo dalla variabile z, dette (x_B, y_B, z_B) le coordinate del baricentro, risulta $x_B = y_B = 0$. Mentre

$$
z_B = \frac{1}{m(E)}\iiint_D z^2\,dxdydz \quad \text{dove} \quad m(E) = \iiint_E z\,dxdydz
$$

Per calcolare tali integrali osserviamo innanzitutto che l'intersezione del cilindro $x^2+y^2 = 1$ con il paraboloide $z = x^2 + y^2$ è data da

$$
\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}
$$

Dunque E risulta dominio normale rispetto al piano (x, y) con

$$
E = \{(x,y,z)\,|\,(x,y) \in C,\ x^2+y^2 \le z \le 2\} \ \text{ dove } \ C = \{(x,y)\,|\,1 \le x^2+y^2 \le 2\}
$$

Dalle formule di riduzione risulta allora

$$
m(E) = \iiint_E z\,dxdydz = \iint_C (\int_{x^2+y^2}^2 z\,dz)dxdy = \frac{1}{2}\iint_C 4 - (x^2+y^2)^2\,dxdy
$$

e passando alle coordinate polari otteniamo

$$
m(E) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\int_1^{\sqrt{2}}(4-\rho^4)\rho d\rho)d\theta = \pi\left[2\rho^2 - \frac{\rho^6}{6}\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{5}{6}\pi
$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
z_B &= \frac{6}{5\pi}\iiint_E z^2\,dxdydz = \frac{6}{5\pi}\iint_C (\int_{x^2+y^2}^2 z^2\,dz)dxdy = \frac{2}{5\pi}\iint_C 8 - (x^2+y^2)^3\,dxdy \\
&= \frac{2}{5\pi}\int_0^{2\pi}(\int_1^{\sqrt{2}}(8-\rho^6)\rho\,d\rho)d\theta = \frac{4}{5}\left[4\rho^2 - \frac{\rho^8}{8}\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{17}{10}
\end{aligned}
$$

In alternativa, osservato che

$$
E = \{(x,y,z)\,|\,z \in [1,2],\ (x,y) \in C_z\} \quad \text{dove} \quad C_z = \{(x,y)\,|\,1 \le x^2+y^2 \le z\}
$$

si ottiene

$$m(E) = \iiint_E z\,dxdydz = \int_1^2 (\iint_{C_z} dxdy) z dz = \int_1^2 z m(C_z)\ dz$$
$$= \int_1^2 \pi z(z-1)dz = \pi \left[\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2}\right]_1^2 = \frac{5}{6}\pi$$

e quindi

$$z_B = \frac{6}{5\pi} \iiint_E z^2\,dxdydz = \frac{6}{5\pi} \int_1^2 (\iint_{C_z} dxdy) z^2 dz = \int_1^2 z^2 m(C_z)\ dz$$
$$= \frac{6}{5\pi} \int_1^2 \pi z^2(z-1)dz = \frac{6}{5} \left[\frac{z^4}{4} - \frac{z^3}{3}\right]_1^2 = \frac{17}{10}$$

7. Il dominio E risulta dominio normale rispetto al piano (x, y) con

$$E = \{(x, y, z) \,|\, (x, y) \in C,\ 0 \le z \le 3 - \sqrt{x^2 + y^2}\} \text{ dove } C = \{(x, y) \,|\, 1 \le \sqrt{x^2 + y^2} \le 3\}$$

Dalle formule di riduzione risulta allora

$$\iiint_E x\,dxdydz = \iint_C (\int_0^{3-\sqrt{x^2+y^2}} x\,dz)\,dxdy = \iint_C x(3 - \sqrt{x^2 + y^2})\,dxdy$$

e passando alle coordinate polari otteniamo

$$\iiint_E x\,dxdydz = \int_0^{2\pi} (\int_1^3 \rho^2 \cos\theta(3-\rho)d\rho)\,d\theta = \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta \int_1^3 3\rho^2 - \rho^3\,d\rho = 0$$

In alternativa, osservato che l'intersezione tra il cilindro $x^2+y^2 = 1$ ed il cono $\sqrt{x^2 + y^2} = 3 - z$ è data da

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 3 - z \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

potremo scrivere

$$E = \{(x, y, z) \,|\, z \in [0, 2],\ (x, y) \in C_z\} \quad \text{dove} \quad C_z = \{(x, y) \,|\, 1 \le \sqrt{x^2 + y^2} \le 3 - z\}$$

Dalle formule di riduzione si ottiene allora

$$\iiint_E x\,dxdydz = \int_0^2 (\iint_{C_z} x\,dxdy) dz$$

ed utilizzando le coordinate polari per calcolare l'integrale doppio si ha

$$\iiint_E x\,dxdydz = \int_0^2 (\int_0^{2\pi} (\int_1^3 \rho^2 \cos\theta\,d\rho) d\theta) dz = \int_0^2 dz \int_0^{2\pi} \cos\theta\,d\theta \int_1^3 \rho^2\,d\rho = 0$$

8. Il dominio E risulta dominio normale rispetto al piano (x,y) con

$$E = \{(x,y,z) \,|\, (x,y) \in C,\, 0 \le z \le 4 - \sqrt{x^2+y^2}\} \text{ dove } C = \{(x,y) \,|\, 1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 4\}$$

Dalle formule di riduzione risulta allora

$$m(E) = \iiint_E z\,dxdydz = \iint_C \Big(\int_0^{4-\sqrt{x^2+y^2}} z\,dz\Big)\,dxdy = \iint_C \frac{1}{2}(4-\sqrt{x^2+y^2})^2\,dxdy$$

e passando alle coordinate polari otteniamo

$$\begin{aligned} m(E) &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big(\int_1^4 \rho(4-\rho)^2 d\rho\Big)\,d\theta = \pi\cos\theta d\int_1^4 \rho(\rho^2-8\rho+16)\,d\rho \\ &= \pi\left[8\rho^2 - \frac{8}{3}\rho^3 + \frac{\rho^4}{4}\right]_1^4 = \frac{63}{4}\pi \end{aligned}$$

In alternativa, osservato che l'intersezione tra il cilindro $x^2+y^2=1$ ed il cono $\sqrt{x^2+y^2} = 4-z$ è data da

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ \sqrt{x^2+y^2} = 4-z \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=3 \end{cases}$$

potremo scrivere

$$E = \{(x,y,z) \,|\, z \in [0,3],\, (x,y) \in C_z\} \quad \text{dove} \quad C_z = \{(x,y) \,|\, 1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 4-z\}$$

Dalle formule di riduzione si ottiene allora

$$\begin{aligned} m(E) &= \iiint_E z\,dxdydz = \int_0^3 \Big(\iint_{C_z} z\,dxdy\Big)dz = \pi\int_0^3 z((4-z)^2-1)\,dz \\ &= \pi\int_0^3 z(15-8z+z^2)\,dz = \pi\left[\frac{15}{2}z^2 - 8\frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4}\right]_0^3 = \frac{63}{4}\pi \end{aligned}$$

Per quanto riguarda le coordinate (x_B, y_B, z_B) del baricentro, osserviamo che per simmetria del dominio e della densità di massa risulta $x_B = y_B = 0$ mentre

$$z_B = \frac{1}{m(E)}\iiint_E z^2\,dxdydz = \frac{4}{63\pi}\iiint_E z^2\,dxdydz$$

e procedendo come sopra si ottiene $z_B = \frac{48}{35}$.

9. Osserviamo che l'intersezione tra i paraboloidi $z = 3(x^2+y^2)$ e $z = 1+x^2+y^2$ è data da

$$\begin{cases} z = 3(x^2+y^2) \\ z = 1+x^2+y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2 = \frac{1}{2} \\ z = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Il dominio E risulta dunque dominio normale rispetto al piano (x, y) con

$$E = \{(x, y, z) \,|\, (x, y) \in C,\, 3(x^2 + y^2) \leq z \leq 1 + x^2 + y^2\} \text{ dove } C = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\}$$

Dalle formule di riduzione risulta allora

$$V(E) = \iiint_E dxdydz = \iint_C (\int_{3(x^2+y^2)}^{1+x^2+y^2} dz)\, dxdy = \iint_C 1 + x^2 + y^2 - 3(x^2 + y^2)\, dxdy$$

e passando alle coordinate polari otteniamo

$$\begin{aligned} V(E) &= \int_0^{2\pi} (\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1 + \rho^2 - 3\rho^2)\rho\, d\rho)\, d\theta = 2\pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \rho - 2\rho^3\, d\rho \\ &= 2\pi \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{2}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

In alternativa, osservato che $E = E_1 \cup E_2$ dove

$$E_1 = \{(x, y, z) \,|\, z \in [0, 1],\, (x, y) \in D_z\} \quad \text{con} \quad D_z = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq \frac{z}{3}\}$$

e

$$E_2 = \{(x, y, z) \,|\, z \in [1, \frac{3}{2}],\, (x, y) \in C_z\} \quad \text{con} \quad C_z = \{(x, y) \,|\, z - 1 \leq x^2 + y^2 \leq \frac{z}{3}\},$$

dalle formule di riduzione otteniamo

$$\begin{aligned} V(E) = V(E_1) + V(E_2) &= \iiint_{E_1} dxdydz + \iiint_{E_2} dxdydz \\ &= \int_0^1 (\iint_{D_z} dxdy) dz + \int_1^{\frac{3}{2}} (\iint_{C_z} dxdy) dz = \pi \int_0^1 \frac{z}{3}\, dz + \pi \int_1^{\frac{3}{2}} (\frac{z}{3} - z + 1)\, dz \\ &= \pi \left[\frac{z^2}{6}\right]_0^1 + \pi \left[z - \frac{z^2}{3}\right]_1^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Campi vettoriali

1. Dato il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(\dfrac{\sin x}{z}, \dfrac{\cos y}{z}, \dfrac{\cos x - \sin y}{z^2}\right)$,

a) Stabilire se il campo è irrotazionale nel suo dominio.

b) Stabilire se il campo è conservativo nel suo dominio ed in caso affermativo determinarne un potenziale.

2. Dato il campo vettoriale $F(x,y) = \left(\dfrac{2x}{(y+x^2)^2}, 2y + \dfrac{1}{(y+x^2)^2}\right)$,

a) Stabilire se il campo è irrotazionale sul suo dominio.

b) Stabilire se il campo è conservativo sul suo dominio ed in caso affermativo determinarne un potenziale.

c) Calcolarne il lavoro lungo la curva di equazione cartesiana $y = 1 - x^2$, $x \in [-1, 1]$.

3. Dato il campo vettoriale $F(x,y) = (2x \log y, \frac{x^2}{y} + 2y \log y)$,

a) Stabilire se il campo è conservativo sul suo dominio ed in caso affermativo determinarne un potenziale.

b) Calcolarne il lavoro lungo la curva $\varphi(t) = (e^t, e^{2t})$, $t \in [0, 1]$.

4. Dato il campo vettoriale $F(x,y) = (2x \sin y + \cos x, x^2 \cos y + \sin y)$, stabilire se il campo è conservativo sul suo dominio ed in caso affermativo determinarne un potenziale. Calcolarne il lavoro lungo la curva $\varphi(t) = (\pi \cos t, \pi \sin t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

5. Dato il campo vettoriale $F(x,y,z) = (xz^2, yz^2, z(x^2+y^2+z^2))$, stabilire se il campo è conservativo sul suo dominio ed in caso affermativo determinarne un potenziale. Calcolarne il lavoro lungo la curva $\varphi(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

6. Dato il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(\dfrac{2x}{z}, \dfrac{2y}{z}, \dfrac{z - x^2 - y^2}{z^2}\right)$, stabilire se il campo è conservativo sul suo dominio ed in caso affermativo determinarne un potenziale. Calcolarne il lavoro lungo la curva $\varphi(t) = (\cos t, \sin t, -1)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

7. Dato il campo vettoriale $F(x,y) = \left(\dfrac{y^2 x}{x^2 - 1} + x^2, y \log(x^2 - 1)\right)$, stabilire se il campo è conservativo sul suo dominio ed in caso affermativo determinarne un potenziale. Calcolarne il lavoro lungo la curva $\varphi(t) = (3 + \cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi]$.

8. Dato il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (\frac{yz - z^2 + yx^2}{x^2}, \frac{x^2 - z}{x}, \frac{2z - y}{x})$$

stabilire se risulta conservativo nel suo dominio ed in caso affermativo calcolarne un potenziale. Calcolarne il lavoro lungo la curva $\varphi(t) = (1 + t, \cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi]$.

9. Dato il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (\frac{\log z}{y}, \frac{y^2 - x\log z}{y^2}, \frac{x}{yz}),$$

stabilire se risulta conservativo nel suo dominio ed in caso affermativo calcolarne un potenziale. Calcolarne il lavoro lungo la curva $\varphi(t) = (\cos t, 1 + \sin t, 1)$, $t \in [0, \pi]$.

10. Dato il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (\frac{\log z}{y}, \frac{y - x\log z}{y^2}, \frac{x}{yz}),$$

stabilire se risulta conservativo nel suo dominio ed in caso affermativo calcolarne un potenziale. Calcolarne il lavoro lungo la curva $\varphi(t) = (\sin t, 2 + \cos t, 1)$, $t \in [0, \pi]$.

11. Dato il campo vettoriale $F(x,y) = (1 + 3x^2 + \sqrt{\frac{y}{x}}, 2 + 2y + \sqrt{\frac{x}{y}})$,

a) Stabilire se il campo è conservativo sul suo dominio ed in caso affermativo determinarne un potenziale.

b) Calcolarne il lavoro lungo la curva $\varphi(t) = (t^2 + 1, t + 2)$, $t \in [0, 1]$.

Risoluzione

1. **(a)** Il campo è definito e di classe $\mathcal{C}^1$ nel suo dominio $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z \neq 0\}$ ove risulta irrotazionale essendo

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = -\frac{\sin x}{z^2} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = -\frac{\cos y}{z^2} = \frac{\partial F_3}{\partial y}, \quad \forall (x, y) \in A.$$

(b) Poichè il dominio A non risulta semplicemente connesso, non possiamo dire che essendo irrotazionale il campo è conservativo in A. Possiamo però dire che essendo irrotazionale il campo risulta conservativo nelle componenti semplicemente connesse $A^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z > 0\}$ e $A^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z < 0\}$.
Per determinare un potenziale $U(x, y, z)$ di $F(x, y, z)$ in $A^\pm$, osserviamo che tale funzione dovrà soddisfare le condizioni

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\sin x}{z}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\cos y}{z} \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\cos x - \sin y}{z^2}$$

Dalla prima delle tre condizioni abbiamo che

$$U(x, y, z) = \int \frac{\sin x}{z} dx = -\frac{\cos x}{z} + C_1(y, z)$$

e dalla seconda

$$\frac{\cos y}{z} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial C_1}{\partial y}$$

Dunque

$$C_1(y, z) = \int \frac{\cos y}{z} dy = \frac{\sin y}{z} + C_2(z)$$

da cui

$$U(x, y, z) = -\frac{\cos x}{z} + \frac{\sin y}{z} + C_2(z).$$

Dalla terza delle tre condizioni abbiamo infine che

$$\frac{\cos x - \sin y}{z^2} = \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\cos x}{z^2} - \frac{\sin y}{z^2} + C_2'(z)$$

da cui $C_2'(z) = 0$ e quindi $C_2(z) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Un potenziale in $A^\pm$ sarà allora $U^\pm(x, y, z) = \frac{\sin y - \cos x}{z} + c_\pm$, $c_\pm \in \mathbb{R}$ non necessariamente uguali. Ne segue che la funzione

$$U(x, y, z) = \begin{cases} \frac{\sin y - \cos x}{z} + c_+, & \text{se } z > 0 \\ \frac{\sin y - \cos x}{z} + c_-, & \text{se } z < 0 \end{cases}$$

con $c_\pm \in \mathbb{R}$ è un potenziale del campo $F(x, y, z)$ in A e quindi il campo risulta conservativo nel suo dominio.

2. **(a)** Il campo è definito e di classe $\mathcal{C}^1$ nel suo dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \neq -x^2\}$ ove risulta irrotazionale essendo

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{4x}{(y+x^2)^3} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \quad \forall (x, y) \in A.$$

(b) Il dominio D non risulta semplicemente connesso e dunque non possiamo affermare che, essendo irrotazionale, il campo risulta conservativo in D. Possiamo però affermare che essendo irrotazionale il campo risulta conservativo nelle componenti semplicemente connesse $D^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > -x^2\}$ e $D^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y < -x^2\}$.
Per determinare un potenziale $U(x, y)$ di $F(x, y)$ in $D^\pm$, osserviamo che tale funzione dovrà soddisfare le condizioni

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2x}{(y+x^2)^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 2y + \frac{1}{(y+x^2)^2}$$

Dalla prima delle due condizioni abbiamo che

$$U(x, y) = \int \frac{2x}{(y+x^2)^2} dx = -\frac{1}{y+x^2} + C(y)$$

e dalla seconda

$$2y + \frac{1}{(y+x^2)^2} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{(y+x^2)^2} + C'(y)$$

Dunque $C'(y) = 2y$ e quindi $C(y) = y^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$. Un potenziale in $D^\pm$ sarà allora $U^\pm(x, y) = -\frac{1}{y+x^2} + y^2 + c_\pm$, $c_\pm \in \mathbb{R}$ non necessariamente uguali. Ne segue che la funzione

$$U(x, y) = \begin{cases} -\frac{1}{y+x^2} + y^2 + c_+, & \text{se } y > -x^2 \\ -\frac{1}{y+x^2} + y^2 + c_-, & \text{se } y < -x^2 \end{cases}$$

con $c_\pm \in \mathbb{R}$ è un potenziale del campo $F(x, y)$ in D e quindi il campo risulta conservativo nel suo dominio.

(c) Poichè il campo è convervativo in D ed il sostegno della curva è contenuto in D, e precisamente $\varphi([-1, 1]) \subset D^+$, avremo che il lavoro del campo lungo la curva è dato da $L_\varphi(F) = U(\varphi(1)) - U(\varphi(-1))$ essendo U un potenziale del campo F. Allora, per quanto ottenuto nel precedente punto, risulta

$$L_\varphi(F) = U(1, 0) - U(-1, 0) = 0$$

3. **(a)** Il campo è definito e di classe $\mathcal{C}^1$ nel suo dominio $A = \{(x, y) \,|\, y > 0\}$ ove risulta irrotazionale essendo

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{2x}{y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \forall (x, y) \in A.$$

Poichè il dominio A risulta semplicemente connesso, ne deduciamo che il campo è conservativo in A. Per determinarne un potenziale $U(x, y)$, osserviamo che tale funzione dovrà soddisfare le condizioni

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x \log y \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x^2}{y} + 2y \log y$$

Dalla prima delle due condizioni abbiamo che

$$U(x, y) = \int 2x \log y dx = x^2 \log y + c(y)$$

e dalla seconda

$$\frac{x^2}{y} + 2y \log y = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x^2}{y} + c'(y)$$

Dunque $c(y) = \int 2y \log y dy = y^2 \log y - \frac{y^2}{2} + c$, $c \in \mathbb{R}$, ed un potenziale sarà

$$U(x, y) = x^2 \log y + y^2 \log y - \frac{y^2}{2}.$$

(b) Poichè $F(x, y)$ è campo conservativo nel suo dominio A e la curva ha sostegno γ contenuto in A, dal Teorema di caratterizzazione dei campi conservativi abbiamo che

$$L_\gamma(F) = \int_\gamma F \cdot ds = U(\varphi(1)) - U(\varphi(0))$$

dove $U(x, y)$ è un potenziale del campo $F(x, y)$. Essendo $\varphi(1) = (e, e^2)$ e $\varphi(0) = (1, 1)$, dal precedente punto otteniamo

$$L_\gamma(F) = 2e^2 + 2e^4 - \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}e^4 + 2e^2 - \frac{1}{2}$$

4. Il campo è definito e di classe $\mathcal{C}^1$ nel suo dominio $A = \mathbb{R}^2$ ove risulta irrotazionale essendo

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2x \cos y = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \forall (x, y) \in A.$$

Poichè il dominio A risulta semplicemente connesso, ne deduciamo che il campo è conservativo in A. Per determinarne un potenziale $U(x, y)$, osserviamo che tale funzione dovrà soddisfare le condizioni

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x \sin y + \cos x \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 \cos y + \sin y$$

Dalla prima delle due condizioni abbiamo che

$$U(x,y) = \int 2x \sin y + \cos x dx = x^2 \sin y + \sin x + c(y)$$

e dalla seconda

$$x^2 \cos y + \sin y = \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 \cos y + c'(y)$$

Dunque $c(y) = \int \sin y \, dy = -\cos y + c$, $c \in \mathbb{R}$, ed un potenziale sarà

$$U(x,y) = x^2 \sin y + \sin x - \cos y.$$

Poichè $F(x,y)$ è campo conservativo nel suo dominio A e la curva ha sostegno γ contenuto in A, dal Teorema di caratterizzazione dei campi conservativi abbiamo che

$$L_\gamma(F) = \int_\gamma F \cdot ds = U(\varphi(\frac{\pi}{2})) - U(\varphi(0))$$

Essendo $\varphi(\frac{\pi}{2}) = (0,\pi)$ e $\varphi(0) = (\pi, 0)$, da cui $U(0,\pi) = 1$ e $U(\pi,0) = -1$, otteniamo $L_\gamma(F) = 2$.

5. Il campo è definito e di classe $\mathcal{C}^1$ nel suo dominio $A = \mathbb{R}^3$ ove risulta irrotazionale essendo

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = 2xz = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = 2yz = \frac{\partial F_3}{\partial y}, \quad \forall (x,y) \in A.$$

Poichè il dominio A risulta semplicemente connesso possiamo dire che essendo irrotazionale il campo è conservativo in A. Per determinare un potenziale $U(x,y,z)$ di $F(x,y,z)$ in A osserviamo che tale funzione dovrà soddisfare le condizioni

$$\frac{\partial U}{\partial x} = xz^2, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = yz^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial z} = z(x^2 + y^2 + z^2)$$

Dalla prima delle tre condizioni abbiamo che

$$U(x,y,z) = \int xz^2 dx = \frac{x^2 z^2}{2} + C_1(y,z)$$

e dalla seconda

$$yz^2 = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial C_1}{\partial y}$$

Dunque

$$C_1(y,z) = \int yz^2 dy = \frac{y^2 z^2}{2} + C_2(z)$$

da cui

$$U(x,y,z) = \frac{x^2 z^2}{2} + \frac{y^2 z^2}{2} + C_2(z).$$

Dalla terza delle tre condizioni abbiamo infine che

$$z(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{\partial U}{\partial z} = x^2 z + y^2 z + C_2'(z)$$

da cui $C_2'(z) = z^3$ e quindi $C_2(z) = \frac{z^4}{4} + c$, $c \in \mathbb{R}$. Un potenziale in A sarà allora

$$U(x, y, z) = \frac{x^2 z^2}{2} + \frac{y^2 z^2}{2} + \frac{z^4}{4} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Poichè il campo è conservativo in A ed il sostegno della curva è contenuto in A, avremo che il lavoro del campo lungo la curva è dato da $L_\varphi(F) = U(\varphi(2\pi)) - U(\varphi(0))$ essendo U un potenziale del campo F. Allora, per quanto ottenuto sopra, risulta

$$L_\varphi(F) = U(1, 0, 2\pi) - U(1, 0, 0) = 2\pi^2(1 + 2\pi^2)$$

6. Il campo è definito e di classe $\mathcal{C}^1$ nel suo dominio $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z \neq 0\}$ ove risulta irrotazionale essendo

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = -\frac{2x}{z^2} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = -\frac{2y}{z^2} = \frac{\partial F_3}{\partial y}, \quad \forall (x, y, z) \in A.$$

Poichè il dominio A non risulta semplicemente connesso non possiamo dire che essendo irrotazionale il campo è conservativo in A. Possiamo però dire che essendo irrotazionale il campo risulta conservativo nelle componenti semplicemente connesse $A^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z > 0\}$ e $A^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z < 0\}$. Per determinare un potenziale $U(x, y, z)$ di $F(x, y, z)$ in $A^\pm$ osserviamo che tale funzione dovrà soddisfare le condizioni

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2x}{z}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2y}{z} \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{z - x^2 - y^2}{z^2}$$

Dalla prima delle tre condizioni abbiamo che

$$U(x, y, z) = \int \frac{2x}{z} dx = \frac{x^2}{z} + C_1(y, z)$$

e dalla seconda

$$\frac{2y}{z} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial C_1}{\partial y}$$

Dunque

$$C_1(y, z) = \int \frac{2y}{z} dy = \frac{y^2}{z} + C_2(z)$$

da cui

$$U(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{z} + C_2(z).$$

Dalla terza delle tre condizioni abbiamo infine che

$$\frac{z - x^2 - y^2}{z^2} = \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{x^2 + y^2}{z^2} + C_2'(z)$$

da cui $C_2'(z) = \frac{1}{z}$ e quindi $C_2(z) = \log|z| + c$, $c \in \mathbb{R}$. Un potenziale in $A^\pm$ sarà allora $U^\pm(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{z} + \log|z| + c^\pm$, $c^\pm \in \mathbb{R}$ non necessariamente uguali. Ne segue che la funzione

$$U(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{z} + \log z + c^+ & \text{se } z > 0 \\ \frac{x^2+y^2}{z} + \log(-z) + c^- & \text{se } z < 0 \end{cases}$$

con $c^\pm \in \mathbb{R}$ è un potenziale del campo in A e quindi che il campo risulta conservativo nel suo dominio.

Poichè il campo è conservativo in A ed il sostegno della curva è contenuto in A, avremo che il lavoro del campo lungo la curva è dato da $L_\varphi(F) = U(\varphi(\frac{\pi}{2})) - U(\varphi(0))$ essendo U un potenziale del campo F in A. Allora, per quanto ottenuto sopra, risulta

$$L_\varphi(F) = U(0,1,-1) - U(1,0,-1) = 0$$

7. l campo è definito e di classe $\mathcal{C}^1$ nel suo dominio $A = \{(x,y)\,|\,|x| > 1\}$ ove risulta irrotazionale essendo

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{2xy}{x^2-1} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in A.$$

Poichè il dominio A non risulta connesso, non possiamo concludere che il campo risulta conservativo nel suo dominio ma possiamo affermare che risulta conservativo nelle componenti semplicemente connesse $A^+ = \{(x,y)\,|\,x > 1\}$ e $A^- = \{(x,y)\,|\,x < -1\}$. Per determinarne un potenziale $U(x,y)$ in $A^\pm$, osserviamo che tale funzione dovrà soddisfare le condizioni

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{xy^2}{x^2-1} + x^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = y\log(x^2-1)$$

Dalla seconda delle due condizioni abbiamo che

$$U(x,y) = \int y\log(x^2-1)dy = \frac{y^2}{2}\log(x^2-1) + c(x)$$

e dalla prima

$$\frac{xy^2}{x^2-1} + x^2 = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{xy^2}{x^2-1} + c'(x)$$

Dunque $c'(x) = x^2$ da cui $c(x) = \frac{x^3}{3} + c$, $c \in \mathbb{R}$, ed un potenziale del campo nel suo dominio sarà

$$U(x,y) = \frac{y^2}{2}\log(x^2-1) + \frac{x^3}{3}.$$

Poichè $F(x,y)$ è campo conservativo nel suo dominio A e la curva ha sostegno γ contenuto in A, dal Teorema sul lavoro di un campo conservativo abbiamo che

$$L_\gamma(F) = \int_\gamma F \cdot ds = U(\varphi(\pi)) - U(\varphi(0))$$

dove $U(x,y)$ è un potenziale del campo $F(x,y)$. Essendo $\varphi(\pi) = (2,0)$ e $\varphi(0) = (4,0)$, otteniamo

$$L_\gamma(F) = \frac{8}{3} - \frac{64}{3} = -\frac{56}{3}$$

8. Il campo è definito e di classe $\mathcal{C}^1$ nel suo dominio $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \neq 0\}$ ove risulta irrotazionale essendo

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{z + x^2}{x^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{y - 2z}{x^2} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = -\frac{1}{x} = \frac{\partial F_3}{\partial y}, \quad \forall (x,y,z) \in D.$$

Poichè il dominio D non risulta connesso non possiamo dire che essendo irrotazionale il campo è conservativo in D, ma possiamo affermare che il campo risulta conservativo sulle componenti semplicemente connesse $D^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x > 0\}$ e $D^- = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x < 0\}$.

Per determinare un potenziale $U(x,y,z)$ di $F(x,y,z)$ in $D^\pm$ osserviamo che tale funzione dovrà soddisfare le condizioni

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{yz - z^2 + yx^2}{x^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x^2 - z}{x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{2z - y}{x}$$

Dalla seconda delle tre condizioni abbiamo che

$$U(x,y,z) = \int \frac{x^2 - z}{x} dy = \frac{x^2 y - zy}{x} + C_1(x,z)$$

e dalla prima

$$\frac{yz - z^2 + yx^2}{x^2} = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x^2 y + zy}{x^2} + \frac{\partial C_1}{\partial x}$$

Dunque

$$C_1(x,z) = \int -\frac{z^2}{x^2} dy = \frac{z^2}{x} + C_2(z)$$

da cui

$$U(x,y,z) = \frac{x^2 y - zy + z^2}{x} + C_2(z).$$

Dalla terza delle tre condizioni abbiamo infine che

$$\frac{2z - y}{x} = \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{2z - y}{x} + C_2'(z)$$

da cui $C_2'(z) = 0$ e quindi $C_2(z) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Un potenziale in D sarà allora

$$U(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^2 y - zy + z^2}{x} + c^+ & \text{se } (x,y,z) \in D^+ \\ \frac{x^2 y - zy + z^2}{x} + c^- & \text{se } (x,y,z) \in D^-, \end{cases}$$

dove $c^\pm \in \mathbb{R}$. Poichè il sostegno della curva è contenuto in D^+ e il campo è conservativo in D^+, avremo che il lavoro del campo lungo la curva è dato da $L_\varphi(F) = U(\varphi(\pi)) - U(\varphi(0))$ essendo U un potenziale del campo F. Allora, per quanto ottenuto sopra, risulta

$$L_\varphi(F) = U(1 + \pi, -1, 0) - U(1,1,0) = -2 - \pi$$

9. Il campo è definito e di classe $\mathcal{C}^1$ nel suo dominio $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y \neq 0,\ z > 0\}$ ove risulta irrotazionale essendo

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{\log z}{y^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{1}{yz} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = -\frac{x}{zy^2} = \frac{\partial F_3}{\partial y}, \quad \forall (x, y, z) \in D.$$

Poichè il dominio D non risulta connesso non possiamo dire che essendo irrotazionale il campo è conservativo in D, ma possiamo affermare che il campo risulta conservativo sulle componenti semplicemente connesse $D^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y > 0,\ z > 0\}$ e $D^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y < 0,\ z > 0\}$.

Per determinare un potenziale $U(x, y, z)$ di $F(x, y, z)$ in $D^\pm$ osserviamo che tale funzione dovrà soddisfare le condizioni

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\log z}{y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{y^2 - x \log z}{y^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{x}{yz}$$

Dalla terza delle tre condizioni abbiamo che

$$U(x, y, z) = \int \frac{x}{yz} dz = \frac{x \log z}{y} + C_1(x, y)$$

e dalla prima

$$\frac{\log z}{y} = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\log z}{y} + \frac{\partial C_1}{\partial x}$$

Dunque $\frac{\partial C_1}{\partial x} = 0$ da cui $C_1(x, y) = C_2(y)$ e dunque

$$U(x, y, z) = \frac{x \log z}{y} + C_2(y)$$

Dalla seconda delle tre condizioni abbiamo infine che

$$\frac{y^2 - x \log z}{y^2} = \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{x \log z}{y^2} + C_2'(y)$$

da cui $C_2'(y) = 1$ e quindi $C_2(y) = y + c$, $c \in \mathbb{R}$. Un potenziale in D sarà allora

$$U(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x \log z}{y} + y + c^+ & \text{se } (x, y, z) \in D^+ \\ \frac{x \log z}{y} + y + c^- & \text{se } (x, y, z) \in D^-, \end{cases}$$

dove $c^\pm \in \mathbb{R}$. Poichè il sostegno della curva è contenuto in D^+ e il campo è conservativo in D^+, avremo che il lavoro del campo lungo la curva è dato da $L_\varphi(F) = U(\varphi(\pi)) - U(\varphi(0))$ essendo U un potenziale del campo F. Allora, per quanto ottenuto sopra, risulta

$$L_\varphi(F) = U(-1, 1, 1) - U(1, 1, 1) = 0$$

10. Il campo è definito e di classe $\mathcal{C}^1$ nel suo dominio $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y \neq 0,\ z > 0\}$ ove risulta irrotazionale essendo

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{\log z}{y^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{1}{yz} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = -\frac{x}{zy^2} = \frac{\partial F_3}{\partial y}, \quad \forall (x, y, z) \in D.$$

Poichè il dominio D non risulta connesso non possiamo dire che essendo irrotazionale il campo è conservativo in D, ma possiamo affermare che il campo risulta conservativo sulle componenti semplicemente connesse $D^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y > 0,\ z > 0\}$ e $D^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y < 0,\ z > 0\}$.

Per determinare un potenziale $U(x, y, z)$ di $F(x, y, z)$ in $D^\pm$ osserviamo che tale funzione dovrà soddisfare le condizioni

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\log z}{y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{y - x\log z}{y^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{x}{yz}$$

Dalla terza delle tre condizioni abbiamo che

$$U(x, y, z) = \int \frac{x}{yz} dz = \frac{x \log z}{y} + C_1(x, y)$$

e dalla prima

$$\frac{\log z}{y} = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\log z}{y} + \frac{\partial C_1}{\partial x}$$

Dunque $\frac{\partial C_1}{\partial x} = 0$ da cui $C_1(x, y) = C_2(y)$ e dunque

$$U(x, y, z) = \frac{x \log z}{y} + C_2(y)$$

Dalla seconda delle tre condizioni abbiamo infine che

$$\frac{y - x\log z}{y^2} = \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{x \log z}{y^2} + C_2'(y)$$

da cui $C_2'(y) = \frac{1}{y}$ e quindi $C_2(y) = \log|y| + c$, $c \in \mathbb{R}$. Un potenziale in D sarà allora

$$U(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x \log z}{y} + \log y + c^+ & \text{se } (x, y, z) \in D^+ \\ \frac{x \log z}{y} + \log(-y) + c^- & \text{se } (x, y, z) \in D^-, \end{cases}$$

dove $c^\pm \in \mathbb{R}$. Poichè il sostegno della curva è contenuto in D^+ e il campo è conservativo in D^+, avremo che il lavoro del campo lungo la curva è dato da $L_\varphi(F) = U(\varphi(\pi)) - U(\varphi(0))$ essendo U un potenziale del campo F. Allora, per quanto ottenuto sopra, risulta

$$L_\varphi(F) = U(0, 1, 1) - U(0, 3, 1) = -\log 3$$

11. Il campo è definito e di classe $\mathcal{C}^1$ nel suo dominio $D = \{(x,y)\,|\,xy > 0\}$ ove risulta irrotazionale essendo

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{xy}} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D.$$

Poichè il dominio D non risulta connesso, non possiamo concludere che il campo risulta conservativo nel suo dominio ma possiamo affermare che risulta conservativo nelle componenti semplicemente connesse $D^+ = \{(x,y)\,|\,x > 0,\ y > 0\}$ e $D^- = \{(x,y)\,|\,x < 0\,y < 0\}$. Per determinarne un potenziale $U(x,y)$ in $D^\pm$, osserviamo che tale funzione dovrà soddisfare le condizioni

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 1 + 3x^2 + \sqrt{\frac{y}{x}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 2 + 2y + \sqrt{\frac{x}{y}}$$

Dalla prima delle due condizioni abbiamo che

$$U(x,y) = \int 1 + 3x^2 + \sqrt{\frac{y}{x}}\,dx = x + x^3 + 2\sqrt{xy} + c(y)$$

e dalla seconda

$$2 + 2y + \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\partial U}{\partial y} = \sqrt{\frac{x}{y}} + c'(y)$$

Dunque $c'(y) = 2 + 2y$ da cui $c(y) = 2y + y^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$, Un potenziale in D sarà allora

$$U(x,y) = \begin{cases} x + x^3 + 2\sqrt{xy} + 2y + y^2 + c^+ & \text{se } (x,y) \in D^+ \\ x + x^3 + 2\sqrt{xy} + 2y + y^2 + c^- & \text{se } (x,y) \in D^-, \end{cases}$$

dove $c^\pm \in \mathbb{R}$.

Poichè $F(x,y)$ è campo conservativo nel suo dominio D e la curva ha sostegno γ contenuto in D^+, dal Teorema sul lavoro di un campo conservativo abbiamo che

$$L_\gamma(F) = \int_\gamma F \cdot ds = U(\varphi(1)) - U(\varphi(0))$$

dove $U(x,y)$ è un potenziale del campo $F(x,y)$. Essendo $\varphi(1) = (2,3)$ e $\varphi(0) = (1,2)$, otteniamo

$$L_\gamma(F) = 15 + 2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

Equazioni differenziali

1. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = e^x + 11e^{2x} \\ y(0) = 3/2 \\ y'(0) = 1/2 \end{cases}$$

2. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = y \tan x + \frac{1}{\cos x} \\ y(0) = \pi \end{cases}$

3. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{y^2}{x} \tan \log x \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$

4. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$.

5. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y'' + 2y' - 8y = e^{2x}$.

6. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{xy} \\ y(-1) = 1 \end{cases}$$

e specificarne in dominio.

7. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y'' - 3y' + 2y = e^x$.

8. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{xy}{1+x^2} + x^3 \\ y(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$

9. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$

10. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y'' + 3y' + 2y = x + e^{2x}$.

11. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{xy}{1+x^2} + x^2 \\ y(0) = \pi \end{cases}$

12. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y'' - 3y' + 2y = x - xe^x$

13. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{xy-1}{x^2} \\ y(-1) = 2 \end{cases}$

14. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y'' - 4y' + 4y = (x-1)e^{2x}$.

15. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{\log x}{2y}, \\ y(1) = -1. \end{cases}$

16. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = y^3 \log x, \\ y(1) = 1. \end{cases}$

17. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 2xe^x \\ y(0) = \frac{3}{2} \\ y'(0) = \frac{5}{2} \end{cases}$$

18. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 4y' + 4y = 2xe^{2x}$$

Risoluzione

1. L'equazione è equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. Per risolvere tale equazione determiniamo innanzitutto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata $y''-5y'+6y = 0$. A tale scopo si osservi che l'equazione caratteristica $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ ammette due radici reali distinte $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_0(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{3x},$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sono costanti arbitrarie.
Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Come da suggerimento, cerchiamo tale soluzione della forma $y_p(x) = y_1(x) + y_2(x)$ essendo $y_1(x) = Ae^x$ soluzione dell'equazione $y''-5y'+6y = e^x$ e $y_2(x) = Bxe^{2x}$ soluzione dell'equazione (risonante) $y''-5y'+6y = 11e^{2x}$. Derivando due volte e sostituendo nelle rispettive equazioni otteniamo $A = \frac{1}{2}$ e $B = -11$. Dunque, la soluzione particolare cercata è

$$y_p(x) = \frac{1}{2}e^x - 11xe^{2x}$$

e per i noti teoremi sulle equazioni differenziali lineari non omogenee, l'integrale generale dell'equazione data è allora

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + \frac{1}{2}e^x - 11xe^{2x}$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sono costanti arbitrarie.
Determiniamo ora c_1 e c_2 di modo che risultino soddisfatte le condizioni iniziali $y(0) = \frac{1}{2}$ e $y'(0) = \frac{3}{2}$:

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ y'(0) = 2c_1 + 3c_2 + \frac{1}{2} - 11 = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = -8 \\ c_2 = 9 \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy proposto è allora

$$y(x) = -8e^{2x} + 9e^{3x} + \frac{1}{2}e^{x} - 11xe^{2x}$$

2. L'equazione è equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea, cioè del tipo $y' = a(x)y + b(x)$. L'integrale generale sarà allora della forma

$$y(x) = e^{A(x)}(\int b(x)e^{-A(x)}dx + C), \quad C \in \mathbb{R},$$

dove $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$. Essendo $a(x) = \tan x$ ed il dato iniziale in $x_0 = 0$, scegliamo come primitiva la funzione $A(x) = -\log(\cos x)$. L'integrale generale dell'equazione data sarà allora

$$y(x) = e^{-\log(\cos x)}(\int \frac{1}{\cos x}e^{\log(\cos x)}dx + C) = \frac{1}{\cos x}(\int dx + C) = \frac{1}{\cos x}(x + C), \quad C \in \mathbb{R},$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = \pi$ si ottiene $C = \pi$ e quindi a soluzione del problema di Cauchy proposto è

$$y(x) = \frac{1}{\cos x}(x + \pi)$$

3. L'equazione differenziale è equazione a variabili separabili del tipo $y' = a(x)b(y)$ con $a(x) = \frac{1}{x}\tan\log x$ e $b(y) = y^2$. Tale equazione ammette come soluzione singolare la funzione costante $y_0(x) = 0$ ma poichè stiamo cercando una soluzione soddisfacente la condizione iniziale $y(1) = 1$, tale soluzione apparterrà alla famiglia di soluzioni non nulle date (implicitamente) dalla formula

$$B(y) = A(x) + c, \ c \in \mathbb{R}$$

essendo $B(y)$ una primitiva di $\frac{1}{b(y)} = \frac{1}{y^2}$ e $A(x)$ una primitiva di $a(x) = \frac{1}{x}\tan\log x$. Scegliendo $B(y) = -\frac{1}{y}$ e $A(x) = -\log|\cos\log x|$, le soluzioni non nulle dell'equazione differenziale saranno date implicitamente da

$$\frac{1}{y(x)} = \log|\cos\log x| + c, \ c \in \mathbb{R} \iff y(x) = \frac{1}{\log|\cos\log x| + c}, \ c \in \mathbb{R}.$$

Poichè la nostra soluzione deve soddisfare la condizione iniziale $y(1) = 1$, la soluzione dovrà essere definita in un intorno di $x_0 = 1$ ove $\cos\log x > 0$. Dunque la soluzione cercata sarà data da

$$y(x) = \frac{1}{\log(\cos\log x) + c}, \ c \in \mathbb{R}.$$

Imponendo infine la condizione iniziale $y(1) = 1$ si ottiene $c = 1$ e quindi la soluzione del problema di Cauchy proposto è

$$y(x) = \frac{1}{\log(\cos\log x) + 1}$$

4. L'equazione è equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. Per risolvere tale equazione determiniamo innanzitutto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata $y''-4y'+4y=0$. A tale scopo si osservi che l'equazione caratteristica $\lambda^2-4\lambda+4=0$ ammette un'unica radice $\lambda_0=2$ e quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_0(x)=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$$

dove $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ sono costanti arbitrarie.
Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Come da suggerimento, osservato che il termine noto $g(x)=e^{2x}$ è soluzione dell'equazione omogenea (siamo in un *caso risonante*), cerchiamo tale soluzione della forma $y_p(x)=kx^2e^{2x}$. Derivando due volte e sostituendo nell'equazione completa otteniamo $k=\frac{1}{2}$. Dunque, soluzione particolare è

$$y_p(x)=\tfrac{1}{2}x^2e^{2x}$$

e per i noti teoremi sulle equazioni differenziali lineari non omogenee, l'integrale generale dell'equazione data è allora

$$y(x)=y_0(x)+y_p(x)=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+\tfrac{1}{2}x^2e^{2x}$$

dove $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ sono costanti arbitrarie.

5. L'equazione è equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. Per risolvere tale equazione determiniamo innanzitutto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata $y''+2y'-8y=0$.
A tale scopo si osservi che l'equazione caratteristica $\lambda^2+2\lambda-8=0$ ammette due radici reali $\lambda_1=2$ e $\lambda_2=-4$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_0(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{-4x},$$

dove $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ sono costanti arbitrarie.
Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Come da suggerimento, essendo il termine noto e^{2x} soluzione dell'equazione omogenea, cerchiamo tale soluzione della forma $y_p(x)=Axe^{2x}$. Derivando due volte e sostituendo nell' equazione differenziale completa otteniamo $A=\frac{1}{6}$ e quindi che soluzione particolare dell'equazione completa è

$$y_p(x)=\frac{1}{6}xe^{2x}$$

Per i noti teoremi sulle equazioni differenziali lineari non omogenee, l'integrale generale dell'equazione data è allora

$$y(x)=y_0(x)+y_p(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{-4x}+\frac{1}{6}xe^{2x}$$

dove $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ sono costanti arbitrarie.

6. L'equazione differenziale è equazione a variabili separabili del tipo $y' = a(x)b(y)$ con $a(x) = \frac{1}{x}$ e $b(y) = \frac{1}{y}$. Tale equazione non ammette soluzioni singolari quindi tutte le soluzioni saranno espresse implicitamente dalla formula

$$B(y) = A(x) + c, \ c \in \mathbb{R}$$

essendo $B(y)$ una primitiva di $\frac{1}{b(y)} = y$ e $A(x)$ una primitiva di $a(x) = \frac{1}{x}$. Scegliendo $B(y) = \frac{y^2}{2}$ e $A(x) = \log|x|$, le soluzioni dell'equazione differenziale saranno date da

$$\frac{y^2(x)}{2} = \log|x| + c, \ c \in \mathbb{R} \iff |y(x)| = \sqrt{2\log|x| + k}, \ k \in \mathbb{R}.$$

Poichè la nostra soluzione deve soddisfare la condizione iniziale $y(-1) = 1$, la soluzione dovrà essere definita in un intorno di $x_0 = -1 < 0$ con $y(-1) = 1 > 0$. Dunque la soluzione cercata sarà data da

$$y(x) = \sqrt{2\log(-x) + k}, \ k \in \mathbb{R}.$$

Imponendo infine la condizione iniziale $y(-1) = 1$ si ottiene $k = 1$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy proposto è

$$y(x) = \sqrt{2\log(-x) + 1}$$

definita e derivabile in $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{e}})$.

7. L'equazione è equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. Per risolvere tale equazione determiniamo innanzitutto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata $y''-3y'+2y = 0$. A tale scopo si osservi che l'equazione caratteristica $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ ammette due radici reali distinte $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_0(x) = c_1e^x + c_2e^{2x},$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sono costanti arbitrarie.
Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Come da suggerimento, cerchiamo tale soluzione della forma $y_p(x) = Axe^x$. Derivando due volte e sostituendo otteniamo $A = -1$. Dunque, la soluzione particolare cercata è $y_p(x) = -xe^x$ e per i noti teoremi sulle equazioni differenziali lineari non omogenee, l'integrale generale dell'equazione data è allora

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} - xe^x$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sono costanti arbitrarie.

8. L'equazione è equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea, cioè del tipo $y' = a(x)y + b(x)$. L'integrale generale sarà allora della forma

$$y(x) = e^{A(x)}(\int b(x)e^{-A(x)}dx + C), \quad C \in \mathbb{R},$$

dove $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$. Essendo $a(x) = \frac{x}{1+x^2}$, scegliamo come primitiva la funzione $A(x) = \frac{1}{2}\log(1 + x^2) = \log\sqrt{1 + x^2}$. L'integrale generale dell'equazione data sarà allora

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\log\sqrt{1+x^2}}(\int x^3 e^{-\log\sqrt{1+x^2}}dx + C) = \sqrt{1+x^2}(\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx + C) \\ &= \sqrt{1+x^2}(\frac{1}{3}\sqrt{1+x^2}(x^2-2) + C) = \frac{1}{3}(1+x^2)(x^2-2) + C\sqrt{1+x^2}, \quad C \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = \frac{1}{3}$ si ottiene $C = 1$ e quindi la soluzione del problema di Cauchy proposto è

$$y(x) = \frac{1}{3}(1+x^2)(x^2-2) + \sqrt{1+x^2}$$

9. L'equazione è equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. Per risolvere tale equazione determiniamo innanzitutto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata $y''-5y'+6y = 0$. A tale scopo si osservi che l'equazione caratteristica $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ ammette come radici $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_0(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$$

essendo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ costanti arbitrarie.
Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Come da suggerimento, osservato che il termine noto $g(x) = e^{2x}$ è soluzione dell'equazione omogenea (siamo in un *caso risonante*), cerchiamo tale soluzione della forma $y_p(x) = Axe^{2x}$. Derivando due volte e sostituendo nell'equazione completa otteniamo $A = -1$. Dunque, soluzione particolare è

$$y_p(x) = -xe^{2x}$$

e per i noti teoremi sulle equazioni differenziali lineari non omogenee, l'integrale generale dell'equazione data è allora

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} - xe^{2x}$$

10. L'equazione è equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. Per risolvere tale equazione determiniamo innanzitutto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata $y''+3y'+2y = 0$. A tale scopo si osservi che l'equazione caratteristica $\lambda^2+3\lambda+2=0$ ammette come radici $\lambda_1=-1$ e $\lambda_2=-2$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_0(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$$

essendo $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ costanti arbitrarie.
Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Come da suggerimento, cerchiamo tale soluzione della forma $y_p(x)=Ax+B+Ce^{2x}$. Derivando due volte e sostituendo nell'equazione completa otteniamo $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{3}{4}$ e $C=\frac{1}{12}$. Dunque, soluzione particolare è

$$y_p(x)=\frac{x}{2}-\frac{3}{4}+\frac{e^{2x}}{12}$$

e per i noti teoremi sulle equazioni differenziali lineari non omogenee, l'integrale generale dell'equazione data è allora

$$y(x)=y_0(x)+y_p(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+\frac{x}{2}+\frac{3}{4}+\frac{e^{2x}}{11}$$

11. L'equazione è equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea, cioè del tipo $y'=a(x)y+b(x)$. L'integrale generale sarà allora della forma

$$y(x)=e^{A(x)}(\int b(x)e^{-A(x)}dx+c),\quad c\in\mathbb{R},$$

dove $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$. Essendo $a(x)=\frac{x}{1+x^2}$, scegliamo come primitiva la funzione $A(x)=\frac{1}{2}\log(1+x^2)=\log\sqrt{1+x^2}$. L'integrale generale dell'equazione data sarà allora

$$\begin{aligned}y(x)&=e^{\log\sqrt{1+x^2}}(\int x^2e^{-\log\sqrt{1+x^2}}dx+c)=\sqrt{1+x^2}(\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx+c)\\&=\sqrt{1+x^2}(\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{2}\log(x+\sqrt{1+x^2})+c),\quad c\in\mathbb{R},\end{aligned}$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0)=\pi$ si ottiene $c=\pi$ e quindi la soluzione del problema di Cauchy proposto è

$$y(x)=\sqrt{1+x^2}(\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{2}\log(x+\sqrt{1+x^2})+\pi)$$

12. L'equazione è equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. Per risolvere tale equazione determiniamo innanzitutto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata $y''-3y'+2y=0$. A tale scopo si osservi che l'equazione caratteristica $\lambda^2-3\lambda+2=0$ ammette due radici reali distinte $\lambda_1=1$ e $\lambda_2=2$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_0(x)=c_1e^{x}+c_2e^{2x},$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sono costanti arbitrarie.
Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Come da suggerimento, cerchiamo tale soluzione della forma $y_p(x) = y_1(x) + y_2(x)$ essendo $y_1(x) = Ax + B$ soluzione dell'equazione $y'' - 3y' + 2y = x$ e $y_2(x) = x(Cx + D)e^x$ soluzione dell'equazione (risonante) $y'' - 3y' + 2y = -xe^x$. Derivando due volte e sostituendo nelle rispettive equazioni otteniamo $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{3}{4}$, $C = \frac{1}{2}$ e $D = 1$. Dunque, la soluzione particolare cercata è

$$y_p(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{4} + (\frac{x^2}{2} + x)e^x$$

e per i noti teoremi sulle equazioni differenziali lineari non omogenee, l'integrale generale dell'equazione data è allora

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4} + (\frac{x^2}{2} + x)e^x$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sono costanti arbitrarie.

13. L'equazione è equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea, cioè del tipo $y' = a(x)y + b(x)$. L'integrale generale sarà allora della forma

$$y(x) = e^{A(x)}(\int b(x)e^{-A(x)}dx + C), \quad C \in \mathbb{R},$$

dove $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$. Essendo $a(x) = \frac{1}{x}$, ed il dato iniziale in $x_0 = -1$, scegliamo come primitiva la funzione $A(x) = \log(-x)$. Le soluzioni definite in $(-\infty, 0)$ dell'equazione data saranno allora

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\log(-x)}(\int -\frac{1}{x^2}e^{-\log(-x)}dx + C) = -x(\int \frac{1}{x^3}dx + C) \\ &= -x(-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + C) = \frac{1}{2x} - Cx, \quad C \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

Imponendo la condizione iniziale $y(-1) = 2$ si ottiene $C = \frac{5}{2}$ e quindi la soluzione del problema di Cauchy proposto è

$$y(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{x} - 5x)$$

14. L'equazione è equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. Per risolvere tale equazione determiniamo innanzitutto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata $y'' - 4y' + 4y = 0$. A tale scopo si osservi che l'equazione caratteristica $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$ ammette un'unica radice reale $\lambda_0 = 2$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_0(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

essendo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ costanti arbitrarie.
Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Come da suggerimento, osservato che il termine noto $g(x) = (x-1)e^{2x}$ è soluzione dell'equazione omogenea (siamo in un *caso risonante*), cerchiamo tale soluzione della forma $y_p(x) = x^2(Ax+B)e^{2x}$. Derivando due volte e sostituendo nell'equazione completa otteniamo $A = \frac{1}{6}$ e $B = -\frac{1}{2}$. Dunque, soluzione particolare è

$$y_p(x) = x^2(\frac{1}{6}x - \frac{1}{2})e^{2x}$$

e per i noti teoremi sulle equazioni differenziali lineari non omogenee, l'integrale generale dell'equazione data è allora

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + x^2(\frac{1}{6}x - \frac{1}{2})e^{2x}$$

15. L'equazione differenziale è equazione a variabili separabili del tipo $y' = a(x)b(y)$ con $a(x) = \log x$ e $b(y) = \frac{1}{2y}$. Tale equazione non ammette soluzioni singolari e dunque tutte e sole le soluzioni saranno date (implicitamente) dalla formula

$$B(y) = A(x) + c, \ c \in \mathbb{R}$$

essendo $B(y)$ una primitiva di $\frac{1}{b(y)} = 2y$ e $A(x)$ una primitiva di $a(x) = \log x$. Scegliamo $B(y) = y^2$ e $A(x) = x\log x - x$, le soluzioni dell'equazione differenziale saranno date implicitamente da

$$y^2(x) = x\log x - x + c, \ c \in \mathbb{R} \iff |y(x)| = \sqrt{x\log x - x + c}, \ c \in \mathbb{R}.$$

Poichè la nostra soluzione deve soddisfare la condizione iniziale $y(1) = -1$, la soluzione in un intorno di $x_0 = -1$ dovrà verificare $y(x) < 0$. Dunque la soluzione cercata sarà data da

$$y(x) = -\sqrt{x\log x - x + c}, \ c \in \mathbb{R}.$$

Imponendo infine la condizione iniziale $y(1) = -1$ si ottiene $c = 2$ e quindi la soluzione del problema di Cauchy proposto è

$$y(x) = -\sqrt{x\log x - x + 2}$$

16. L'equazione differenziale è equazione a variabili separabili del tipo $y' = a(x)b(y)$ con $a(x) = \log x$ e $b(y) = y^3$. Tale equazione ammette come soluzione singolare la funzione $y_0(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Le soluzioni non nulle dell'equazione saranno invece date (implicitamente) dalla formula

$$B(y) = A(x) + c, \ c \in \mathbb{R}$$

essendo $B(y)$ una primitiva di $\frac{1}{b(y)} = \frac{1}{y^3}$ e $A(x)$ una primitiva di $a(x) = \log x$. Scegliamo $B(y) = -\frac{1}{2y^2}$ e $A(x) = x\log x - x$, le soluzioni dell'equazione differenziale saranno date implicitamente da

$$-\frac{1}{2y^2(x)} = x\log x - x + c,\ c \in \mathbb{R} \iff |y(x)| = \frac{1}{\sqrt{x - x\log x + c}},\ c \in \mathbb{R}.$$

Poichè la nostra soluzione deve soddisfare la condizione iniziale $y(1) = 1$, la soluzione in un intorno di $x_0 = 1$ dovrà verificare $y(x) > 0$. Dunque la soluzione cercata sarà data da

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x - x\log x + c}},\ c \in \mathbb{R}.$$

Imponendo infine la condizione iniziale $y(1) = 1$ si ottiene $c = -\frac{1}{2}$ e quindi la soluzione del problema di Cauchy proposto è

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x - x\log x - \frac{1}{2}}}$$

17. L'equazione è equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. Per risolvere tale equazione determiniamo innanzitutto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata $y'' - 5y' + 6y = 0$. A tale scopo si osservi che l'equazione caratteristica $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ ammette due radici reali distinte $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_0(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x},$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sono costanti arbitrarie.
Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Come da suggerimento, cerchiamo tale soluzione nella forma $y_p(x) = (Ax + B)e^x$. Derivando due volte e sostituendo nell' equazione otteniamo $A = 1$ e $B = \frac{3}{2}$. Dunque, la soluzione particolare cercata è

$$y_p(x) = (x + \frac{3}{2})e^x$$

e per i noti teoremi sulle equazioni differenziali lineari non omogenee, l'integrale generale dell'equazione data è allora

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + (x + \frac{3}{2})e^x$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sono costanti arbitrarie. Per determinare la soluzione del problema di Cauchy, osserviamo che affinchè la soluzione soddisfi le condizioni iniziali $y(0) = \frac{3}{2}$ e $y'(0) = \frac{5}{2}$ dovremo avere

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \\ 2c_1 + 3c_2 + 3 = \frac{5}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = \frac{1}{2} \\ c_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Dunque la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{3x} + (x + \frac{3}{2})e^{x}$$

18. L'equazione è equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. Per risolvere tale equazione determiniamo innanzitutto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata $y'' - 4y' + 4y = 0$. A tale scopo si osservi che l'equazione caratteristica $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ ammette un'unica radice $\lambda_0 = 2$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_0(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x},$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sono costanti arbitrarie.

Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Come da suggerimento, cerchiamo tale soluzione nella forma $y_p(x) = x^2(Ax + B)e^x$. Derivando due volte e sostituendo nell'equazione otteniamo $A = \frac{1}{3}$ e $B = 0$. Dunque, la soluzione particolare cercata è

$$y_p(x) = \frac{1}{3}x^3 e^{2x}$$

e per i noti teoremi sulle equazioni differenziali lineari non omogenee, l'integrale generale dell'equazione data è allora

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \frac{1}{3}x^3 e^{2x} = (c_1 + c_2 x + \frac{1}{3}x^3)e^{2x}$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sono costanti arbitrarie.